

基于QP转化的约束非方系统模型预测控制

贾元昕 李大宇*

(北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029)

摘要: 针对带约束非方系统的控制问题,设计了一种基于标准二次规划(QP)转化方法的快速模型预测控制算法。首先利用非方传递函数矩阵对 Diophantine 方程进行求解,结合系统的单位阶跃响应矩阵重构系统的预测模型;然后,考虑系统的约束条件,包括输入输出变量、控制增量约束,通过引入松弛变量及等式转化,将模型预测控制 MPC 过程中的最小化目标函数问题转化为带有不等式约束的标准 QP 问题,实现最优控制律在迭代过程中的一步求解,从而解决传统控制方法中计算量大、不能够直接应用于在线控制的问题。将本文所提出的方法应用于经典的 Kalman 非方系统的控制。得到仿真结果表明,该预测控制方法在系统的抗噪声扰动、设定值跟踪等方面均有着较好的性能,同时能满足系统的约束条件,并得到满意的控制效果。

关键词: 模型预测控制; 二次规划; 非方系统; 约束控制

中图分类号: TP273

引言

随着过程工艺的不断发展和多变量系统的应用更加普遍,相对于单变量系统,多变量系统的控制问题复杂的多,导致常规 PID 控制策略不能够得到有效的实施。更为重要的是,考虑到实际工业过程中的可行性和安全性,多变量系统常伴随着系统变量的约束条件,带约束的多变量控制问题得到了越来越多的关注。模型预测控制(MPC)^[1]是一种基于模型的自动控制算法,包括预测模型、滚动优化及反馈校正3大要素。

由于能够同时考虑到系统的约束和估计,MPC被广泛的应用于工业过程控制中^[2]。广义预测控制(GPC)是最常用的MPC算法之一,GPC利用自回归模型解决因模型噪声或系统模型失配造成的控制偏差,表现出较好的控制性能^[1]。然而,在解决带约束多变量系统控制问题时,GPC仍面临很多问题,比如因为多变量和约束的存在导致在解决优化问题时GPC的计算量较大^[3],较长的计算时间可能导致较低的控制性能等。因此,减少GPC的计算量是至关重要的。

非方系统是一种特殊的多变量系统结构,其输入变量和输出变量的个数不相等,一些化学反应器如三阶分裂蒸馏塔模型^[4]均为非方系统。之前的理论中,非方系统的控制是通过在系统矩阵中删除或增加适当的数目输入输出变量将其转为方形系统进行控制实现的,这种做法会使得系统信息缺失,从而导致较差的控制性能^[5],所以,非方带约束系统的控制问题成为研究的热点之一^[6]。文献[7]分析了系统稳态解的相容性和唯一性,并给出了非方系统双层结构控制方案,但是并没有考虑到系统约束条件。本文提出一种新型带约束非方模型的预测控制算法,将MPC求解过程中的寻优问题转化为可以进一步求解的标准二次规划问题,不受系统输入输出数量的影响,同时适用于多变量方形系统的控制。通过和现有方法的仿真比较表明,所提出的方法能够有效的实现带约束非方系统的设定值跟踪,并且具有较好的抗干扰性能。

1 问题描述

考虑如下 m 个输入 n 个输出的非方 CARIMA 模型

$$\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{Y}(k) = \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{U}(k-1) + \mathbf{C}(z^{-1})\xi(k)/\Delta \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A}(z^{-1}) = \{A_{ii}(z^{-1})\}$ 、 $\mathbf{C}(z^{-1}) = \{C_{ii}(z^{-1})\}$ 为 $n \times n$ 维多项式矩阵, $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{B}(z^{-1}) = \{z^{-d_{ip}}B_{ip}(z^{-1})\}$ 为 $n \times m$ 维多项式矩阵, $p = 1, \dots, m$, ξ 为均

收稿日期: 2015-01-28

基金项目: 国家自然科学基金(61273132)

第一作者: 女, 1989年生, 硕士生

* 通讯联系人

E-mail: lidz@mail.buct.edu.cn

值为零的白噪声, $\Delta = 1 - z^{-1}$ 为算子, k 为采样时刻, 且有

$$A_{ii}(z^{-1}) = 1 + a_{i1}z^{-1} + \dots + a_{i,na_{ii}}z^{-na_{ii}}$$

$$B_{ip}(z^{-1}) = b_{ip_0} + b_{ip_1}z^{-1} + \dots + b_{ip,nb_{ip}}z^{-nb_{ip}}$$

$$C_{ii}(z^{-1}) = 1 + c_{ii_1}z^{-1} + \dots + c_{ii,nc_{ii}}z^{-nc_{ii}}$$

$$U(k) = [u_1(k), \dots, u_m(k)]^T$$

$$Y(k) = [y_1(k), \dots, y_n(k)]^T$$

$$\xi(k) = [\xi_1(k), \dots, \xi_n(k)]^T$$

分别表示 k 时刻系统的输入、输出和噪声向量。

2 非方系统模型预测控制

在广义模型预测控制中, 引入了 Diophantine 方程^[8], 针对 MIMO 系统, 本文采用的对应输出预测 $\hat{Y}(k+j|k)$ 的 Diophantine 方程为:

$$I = E_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta + z^{-1}F_j(z^{-1}) \quad (2)$$

式中, $E_j(z^{-1}) = I + E_j^{(1)}z^{-1} + \dots + E_j^{(j-1)}z^{-j+1}$ 是阶次为 $j-1$ 的多项式矩阵, $F_j(z^{-1}) = F_j^{(0)} + F_j^{(1)}z^{-1} + \dots + F_j^{(n_a)}z^{-n_a}$ 是阶次为 n 的多项式矩阵, $E_j^{(i)}$ 和 $F_j^{(i)}$ 均为 m 阶矩阵, 其中 $j = 1, 2, \dots, N$ 。

定义以下 Diophantine 方程^[9]:

$$G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = \tilde{G}_j(z^{-1}) + z^{-(j-1)}H_j(z^{-1}) \quad (3)$$

其中 G_j, \tilde{G}_j 和 H_j 均为 $m \times n$ 阶矩阵。

忽略系统未来噪声的影响, 第 j 步的预测输出可以表示为:

$$\hat{Y}(k+j|k) = \tilde{G}_j(z^{-1})\Delta U(k+j-1|k) + H_j(z^{-1})\Delta U(k) + F_j(z^{-1})Y(k) \quad (4)$$

其中, $\hat{Y}(k+j|k) = [\hat{y}(k+1|k), \dots, \hat{y}(k+N|k)]^T_{(n \times N) \times 1}$

$$\Delta U(k) = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_u-1)]^T_{(mN_u) \times 1}$$

$$H_j = H_j^{(0)} + H_j^{(1)}z^{-1} + \dots + H_j^{(n_b)}z^{-(n_b-1)}$$

定义多项式:

$$f(k+j) = H_j(z^{-1})\Delta U(k) + F_j(z^{-1})Y(k) + C(z^{-1})\xi(k)/\Delta$$

则系统的预测输出可以表示为:

$$\hat{Y}(k+j|k) = \tilde{G}_j\Delta U(k+j-1|k) + f(k+j) \quad (5)$$

其中 \tilde{G}_j 为 $n \times m$ 阶阶跃响应矩阵。则系统的控制问题可以转化为求解以下目标函数的最小值问题:

$$J = \sum_{j=1}^N \|\hat{Y}(k+j|k) - W(k+j)\|^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda$$

$$(j) \|\Delta U(k+j-1|k)\|^2 \quad (6)$$

其中, $W(k+j)$ 为参考轨迹, $\lambda(j) > 0$ 是加权因子。亦即求解优化问题:

$$\min_{\Delta U(k)} J \quad (7)$$

模型预测控制的目标即求解以上的优化问题。对于单变量系统, 可以直接利用所引入的 Diophantine 方程得到其解析解, 但是对于存在约束的多变量系统, 不能够一步得到优化问题的解。利用近年来所提出的优化算法 (PSO 算法^[10]等) 可以从一定程度上解决优化问题, 但由于随机搜索算法的不确定性, 导致所求得解不可信, 且其计算时间较长, 不能够直接用于系统的在线控制。

3 一种新的带约束非方系统 MPC 算法

一般来说, 模型预测控制的目标有两个, 一是将预测输出和系统设定输出间的差值在预测域内实现最小化, 其中预测域表示为 $N(N \geq N_u)$, N_u 为控制域; 二是将控制增量限定在安全范围。由第 2 章可知, MPC 算法实现最优控制是通过求解优化问题 (7) 得到最优控制律并施加给系统。考虑到工业生产的需求, MPC 算法的应用过程中需要考虑系统的约束, 包括输入变量 $U(k)$ 、输出变量 $Y(k)$ 和控制增量 $\Delta U(k)$ 的约束等。方便起见, 所有这些变量约束都表示为与 $\Delta U(k)$ 相同的形式, 即为:

$$I\Delta U(k) \leq \Delta U_{\max}, \quad -I\Delta U(k) \leq -\Delta U_{\min}$$

$$L\Delta U(k) \leq U_{\max} - U(k-1), \quad -L\Delta U(k) \leq -U_{\min} + U(k-1)$$

$$\tilde{G}_j\Delta U(k) \leq Y_{\max} - f(k), \quad -\tilde{G}_j\Delta U(k) \leq -Y_{\min} + f(k)$$

其中, $\Delta U_{\max}, Y_{\max}, \Delta U_{\min}, Y_{\min}$ 分别为输入输出的上限和下限, L 为 $N_u * m$ 下三角矩阵, I 表示单位矩阵。

在必须考虑输出约束的情况下, 可能出现容许的设定值导致优化问题的空解而导致上面的优化问题成为不可行问题, 因此需要引入松弛变量对。可将优化问题 (7) 转化为以下形式:

$$\min \{ \|\mathbf{W}(k) - \tilde{G}_j(k)\Delta U(k-1) - f(k)\|^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Omega}^2 + \rho_{\min} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\min}\|^2 + \rho_{\max} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\max}\|^2 \} \quad (8)$$

满足 $\Delta U_{\min} \leq I\Delta U(k) \leq \Delta U_{\max}$

$$U_{\min} - U(k-1) \leq L\Delta U(k) \leq U_{\max} - U(k-1)$$

$$Y_{\min} - f(k) - \boldsymbol{\varepsilon}_{\min} \leq \tilde{G}_j(k)\Delta U(k) \leq Y_{\max} - f(k) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\max}$$

其中, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\min} \geq 0, \boldsymbol{\varepsilon}_{\max} \geq 0$ 是长度为 N 的松弛变量矩阵, $\rho_{\min} > 0, \rho_{\max} > 0$ 表示加权因子。

令 $\boldsymbol{X} = [\Delta \boldsymbol{U}^T(k) (\boldsymbol{\varepsilon}_{\max})^T (\boldsymbol{\varepsilon}_{\min})^T]^T$, 则优化问题 (8) 等价于:

$$\min_{\boldsymbol{X}} \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{X} \right\} \quad (9)$$

满足 $\boldsymbol{A} \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} \text{式中, } \Delta \boldsymbol{U}(k) &= \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}, \boldsymbol{M}_1 = [\boldsymbol{I}_{N_u \times N_u} \quad \mathbf{0}_{N_u \times 2N}] \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\max} &= \boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{X}, \boldsymbol{M}_2 = [\mathbf{0}_{N \times N_u} \quad \boldsymbol{I}_{N \times N} \quad \mathbf{0}_{N \times N}] \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\min} &= \boldsymbol{M}_3 \boldsymbol{X}, \boldsymbol{M}_3 = [\mathbf{0}_{N \times N_u} \quad \mathbf{0}_{N \times N} \quad \boldsymbol{I}_{N \times N}] \\ \boldsymbol{Q} &= 2 (\boldsymbol{M}_1^T \tilde{\boldsymbol{G}}_j^T \tilde{\boldsymbol{G}}_j \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_1^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{M}_1) + 2\rho_{\min} \boldsymbol{M}_2^T \boldsymbol{M}_2 + \\ & 2\rho_{\max} \boldsymbol{M}_3^T \boldsymbol{M}_3 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r} = -2\boldsymbol{M}_1^T \tilde{\boldsymbol{G}}_j^T (\boldsymbol{W}(k) - \boldsymbol{f}(k))$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= [\boldsymbol{M}_1 \quad -\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{L} \boldsymbol{M}_1 \quad -\boldsymbol{L} \boldsymbol{M}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{G}}_j \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2 \\ & -\tilde{\boldsymbol{G}}_j \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_3 \quad -\boldsymbol{M}_2 \quad -\boldsymbol{M}_3]^T \\ \boldsymbol{b} &= [\Delta \boldsymbol{U}_{\max} \quad -\Delta \boldsymbol{U}_{\min} \quad \boldsymbol{U}_{\max} - \boldsymbol{U}(k-1) \quad -\boldsymbol{U}_{\min} + \\ & \boldsymbol{U}(k-1) \quad \boldsymbol{Y}_{\max} - \boldsymbol{f}(k) \quad -\boldsymbol{Y}_{\min} + \boldsymbol{f}(k) \quad \mathbf{0}_{N \times 1} \quad \mathbf{0}_{N \times 1}]^T \end{aligned}$$

由优化问题 (9) 可以看出, 这是一个标准的二次规划问题。系统的最优控制律增量 $\Delta \boldsymbol{U}(k)$ 可以通过解决二次规划问题 (9) 得出。

4 仿真例子

本节将利用所提出的方法对一个典型的带约束非方系统进行控制。Kalman 非方模型^[11] 是一个经典的非方系统, 包含 4 个输入变量、3 个输出变量。

其中, $u_1 \in [-0.5 \quad 0.5], u_2 \in [0.5 \quad 0.9], u_3 \in [0 \quad 1], u_4 \in [-0.5 \quad 0.5]$, 输出变量分别为 y_1, y_2, y_3 。

为实现控制, 选择离散时间 $T_s = 60 \text{ s}$ 进行离散化, 得到系统的差分方程为:

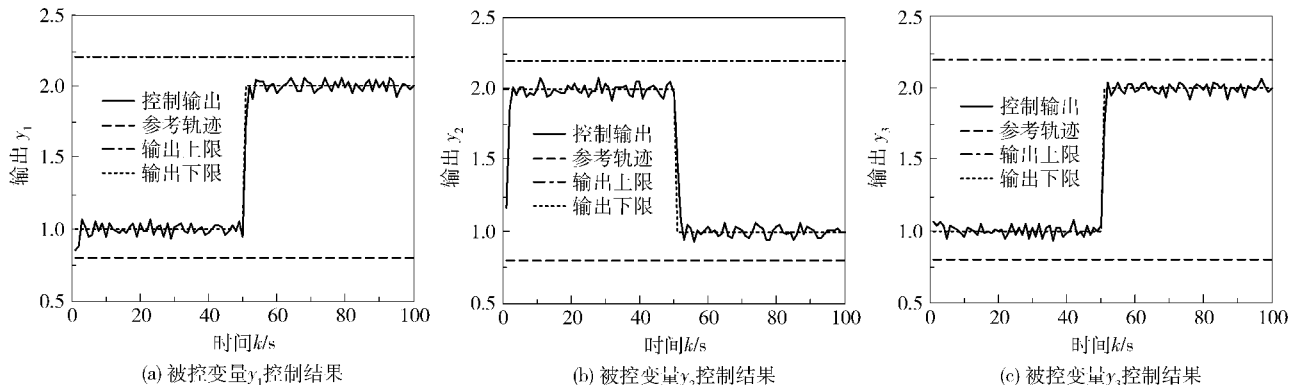


图 1 设定值跟踪实验 Kalman 系统的输出相应

Fig. 1 Output responses of the set point tracking control of the Kalman's system by the proposed algorithm

$$\begin{aligned} A_0 \boldsymbol{Y}(k) + A_1 \boldsymbol{Y}(k-1) + \dots + A_5 \boldsymbol{Y}(k-5) &= B_0 \boldsymbol{U} \\ (k-1) + B_1 \boldsymbol{U}(k-2) + \dots + B_4 \boldsymbol{U}(k-5) &+ \boldsymbol{\xi}(k) / \Delta \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2, y_3]^T, \boldsymbol{U} = [u_1, u_2, u_3]^T$ 。系统的参考轨迹分别为: 在 0 ~ 50 s 时刻, 控制目标值分别为 $\hat{y}_1 = 1, \hat{y}_2 = 2, \hat{y}_3 = 1$; 在 51 ~ 100 s 时刻, 控制目标值变化为 $\hat{y}_1 = 2, \hat{y}_2 = 1, \hat{y}_3 = 2$, 输出约束为 $y_1, y_2, y_3 \in [0.8 \quad 2.2]$ 。在仿真过程中, 对系统施加 5% 的噪声干扰。利用所提出的算法对系统实施控制, 得到的仿真结果如图 1 ~ 2 所示。其中, 图 1 为 3 个输出变量的参考轨迹及控制输出曲线, 从图中可以看出, 在噪声干扰和约束的条件下, 系统的输出能够稳定在目标值, $k = 50 \text{ s}$ 时刻, 能够适应参考轨迹的变化, 实现系统设定值快速跟踪。

图 2 表示 4 个输入变量值曲线图, 可以看出输入变量变化均在约束范围内。说明所提出的预测控制算法能够有效的实现系统设定值跟踪。仿真结果表明, 在参考轨迹发生变化时, 由于噪声的存在, 取稳态优化计算结果的平均值, 分别为 $\boldsymbol{Y}_{ss} = [2.02, 1.06, 2.08], \boldsymbol{U}_{ss} = [0.26, 0.64, 0.68, -0.19]$, 通过文献[7]中结果分析, 可知所提出的控制算法能够保证系统稳态解的相容性和唯一性, 在约束存在的条件下, 可以得到一致性的结果。

在实际工业生产中, 由于环境的不确定性和系统误操作等问题, 总是伴随着不可测干扰的出现, 抗干扰能力是评判控制方法优劣的标准之一。针对 Kalman 非方模型, 保持其输出变量的参考轨迹为 $\hat{y}_1 = 1, \hat{y}_2 = 2, \hat{y}_3 = 1$, 在 $k = 50 \text{ s}$ 时刻对系统施加 $d = 0.6$ 的突发噪声干扰, 输出约束分别为 $y_1, y_3 \in [0.6 \quad 1.5], y_2 \in [0.6 \quad 2.5]$, 所提出的算法得到的控制结果如图 3 所示, 3 个输出变量均能在 $k = 55$

s 时间内恢复到目标值,且系统的输出保持稳定。

以上的仿真结果可以得出,所提出的预测控制算法对于高阶的带约束非方系统的控制是有效的,

且表现出了较好的性能,能够同时实现系统的设定值跟踪和抗噪声扰动。本文所提出的方法同样能够应用于方形多变量系统的控制。

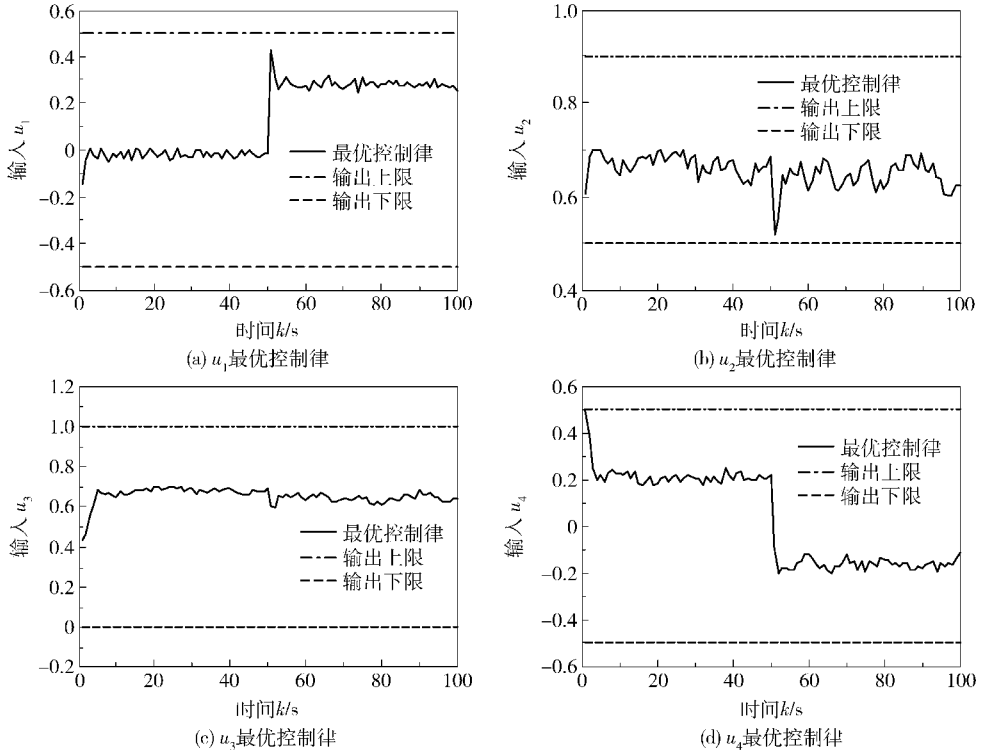


图2 Kalman 系统的操纵变量值变化曲线

Fig. 2 The input values of the four manipulated variables of the Kalman's system

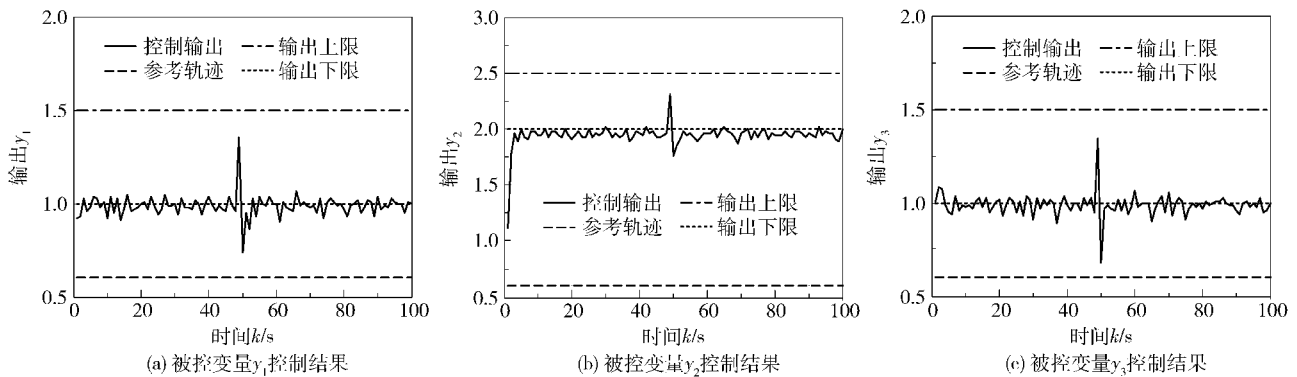


图3 Kalman 系统在随机噪声干扰下的输出曲线($k=50$ 施加 $d=0.6$ 的噪声)

Fig. 3 Output responses of the three control variables of the Kalman's system with disturbance (disturbance $d=0.6$ at $k=50$)

5 结论

(1)所提出方法实现了同解析解具有等效运算效率,同时淡化了非方系统的特殊性,能够同时实现非方系统和方形系统的预测控制;(2)柔化系数和权值的引入进一步提高了系统的控制性能;(3)有效的实现了系统设定值跟踪和抗干扰,提高了 MPC

对于约束多变量系统的控制性能。

参考文献:

[1] 席裕庚,李德伟,林姝. 模型预测控制-现状与挑战 [J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 222-236.
 Xi Y G, Li D W, Lin S. Model predictive control-states and challenges [J]. Acta Automation Sinica, 2013, 39

- (3): 222–236. (in Chinese)
- [2] 高强, 李航. 基于单变量与多变量系统的模型预测控制研究[J]. 计算机工程与设计, 2013, 34(9): 3266–3272.
- Gao Q, Li H. Research of model predictive control based on SISO and MIMO system [J]. Computer Engineering and Design, 2013, 34(9): 3266–3272. (in Chinese)
- [3] Wan Z Y, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 2003, 39(5): 837–846.
- [4] 要艳静, 王晶, 潘立登. 多变量多时滞非方系统的解耦内模控制[J]. 化工学报, 2008, 59(7): 1737–1742.
- Yao Y J, Wang J, Pan L D. Decoupling internal model control for multi-variable non-square system with time delays [J]. Journal of Chemical Industry and Engineering, 2008, 59(7): 1737–1742. (in Chinese)
- [5] 靳其兵, 刘斯文, 权玲. 基于奇异值分解的内模控制方法及在非方系统中的应用[J]. 自动化学报, 2011, 37(3): 354–359.
- Jin Q B, Liu S W, Quan L. Internal model control based on singular value decomposition and its application to non-square process [J]. Acta Automation Sinica, 2011, 37(3): 354–359. (in Chinese)
- [6] Lima F V, Georgakis C. Design of output constraints for model-based non-square controllers using interval operability [J]. Journal of Process Control, 2008, 18(6): 610–620.
- [7] 邹涛, 李海强, 丁宝苍, 等. 多变量预测控制系统稳态解的相容性与唯一性分析[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 519–529.
- Zou T, Li H Q, Ding B C, et al. Compatibility and uniqueness analyses of steady state solution for multi-variable predictive control systems [J]. Acta Automation Sinica, 2013, 39(5): 519–529. (in Chinese)
- [8] 金鑫, 池清华, 刘康玲, 等. 对角 CARIMA 模型抗扰约束广义预测控制[J]. 化工学报, 2014, 65(4): 1310–1316.
- Jin X, Chi Q H, Liu K L, et al. Disturbance rejection constraints generalized predictive control of diagonal CARIMA model [J]. Journal of Chemical Industry and Engineering, 2014, 65(4): 1310–1316. (in Chinese)
- [9] 丁宝苍. 预测控制的理论与方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 126–135.
- Ding B C. The theory and method of predictive control [M]. Beijing: China Machine Press, 126–135. (in Chinese)
- [10] 吴岳, 李国勇. 基于改进 PSO 算法的广义预测控制[J]. 计算机应用与软件, 2014, 31(7): 272–274.
- Wu Y, Li G Y. Generalized predictive control based on improved particle swarm optimization [J]. Computer Application and Software, 2014, 31(7): 272–274. (in Chinese)
- [11] Lü Y, Liang J. Multi-loop constrained iterative model predictive control using ARX–PLS decoupling structure [J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2013, 21(10): 1129–1143.

QP transformation based model predictive control for a non-square system with constraints

JIA YuanXin LI DaZi*

(College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: A model predictive control algorithm based on standard quadratic programming to solve the control problem for a non-square system with constraints has been studied. The transfer function of the non-square system is first used to solve the Diophantine equation and the model prediction is rebuilt by combination with the step response matrix of the system. Then, constraints of input variables, output variables and control increments are considered, and some slack variables are introduced to transform the minimization problem of MPC into a standard QP problem in order to obtain the optimal control law in one step during the iteration. The problems caused by computational complexity and infeasibility of traditional control methods can thus be solved. Simulation results for Kalman's system control show that the proposed algorithm has good performance in noise disturbance rejection and set-point tracing under the condition of constraints.

Key words: model predictive control; quadratic programming; non-square system; constrained control

<http://www.journal.buct.edu.cn>