用数学规划法求解天然气管道最优分配问题

黄英奇　魏玉峰　胡云姣 *
(北京化工大学理学院, 北京　100029)

摘　要: 建立了一种求解天然气系统最优分配问题的新方法。在数学模型中,引入连续变量代替离散的决策变量,这些连续变量是管道的“分段长度”,将混合整数非线性规划问题转化成连续的非线性规划问题。然后,用分解法求解连续的非线性规划问题。原来的非线性模型被分解成两个优化子系统:第一阶段子系统和第二阶段子系统。两个子系统之间的联系是天然气流速和管道“分段长度”,第一阶段计算出来的天然气流速作为输出变量代入第二阶段,第二阶段计算出来的管道“分段长度”作为输出变量代入第一阶段,它们在两个子系统之间反复迭代直到达到收敛标准。

关键词: 混合整数非线性规划; 离散的决策变量; 分段长度
中图分类号: O221

引　言

各行各业对网络流及其相关领域的要求越来越高,网络模型优化分配问题逐渐成为研究的重点[1]。近年来,随着经济的发展,天然气输送工程在国民经济中起到了越来越重要的作用[2]。所以,需要设计一个有效方法解决天然气管道直径的最优分配问题,使其造价最低,数学规划法是解决此类问题很有效的方法。本文以香港地区天然气管道改造工程为实例,抽象出数学模型,针对网络直径的最优分配问题设计了相关算法。即通过把管道“分段长度”转化成决策变量,求解管道直径最优分配。本算法可以解决树形网络的最优直径分配问题。

1　数学模型

1.1　原模型

在天然气管道中,存在 m 个管道, n 个结点, s 个可选的直径规格: $d_1, d_2, \cdots, d_h, \cdots, d_s$。问题的基本数学模型为

(MIP)

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{m} g(d_j) \cdot L_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad q_i^{\text{in}} - q_i^{\text{out}} = Q_i \tag{2}$$

$$P_j' - P_j'' = (K \cdot L_j \cdot q_j^{1.854}) / d_j^{4.854} \tag{3}$$

$$P_i \geq P_{\min} \tag{4}$$

其中, $g(d_j)$ 表示直径为 d_j 时管道 j 中的单位费用函数。q_i^{in}表示天然气流入结点 i 时的流速, q_i^{out}表示天然气流出结点 i 的流速, Q_i 表示结点处的需求流速。$(P_j' - P_j'')$表示管道 j 的上流压强与下流压强之差, L_j 表示管道 j 的长度。K 摩擦常量,其值为 261035。

问题(MIP)的目标函数是线性的,目标函数(1)表示最小化天然气管道的总体费用;约束条件式(2)表示任意的结点流速守恒等式;式(3)表示对任意管道满足压强下降等式;式(4)表示任意压强 P_i 都不小于管道允许的压强最小值。管道直径 d_j 的规格是离散的有限元素集合。所以它是离散的。压强下降等式约束是非线性的,即问题(MIP)是离散的非线性规划问题。

1.2　改进模型

对于原数学模型,决策变量是管道直径,它们是离散的,可在一个很小的集合内选择。另外,约束条件是结点压强下降等式和流速守恒性等式。最优管道直径分配问题是离散的非线性整数规划问题,传统的求解方法是分枝定界法,它属于列举法,随着管道规模增大,问题将会更加难解[3]。本文引入连续变量代替离散变量,使决策变量转换成连续的。把每个管道分割成若干个“分段”,每个“分段”对应一种规格直径。这样,原问题被转换成以“分段长度”为决策变量的非线性规划问题。避免了离散的决策

收稿日期: 2006-03-09
第一作者: 男,1980 年生,硕士生
*通讯联系人
E-mail: huyj @mail.buct.edu.cn

变量情况。具体转化如下:

已知可行的直径集合是 $(d_1, d_2, d_3, \cdots, d_h, \cdots, d_s)$,并且 $d_1 > d_2 > \cdots > d_h > \cdots > d_s$ 每个分段对应一个直径。把一段管道如下图划分

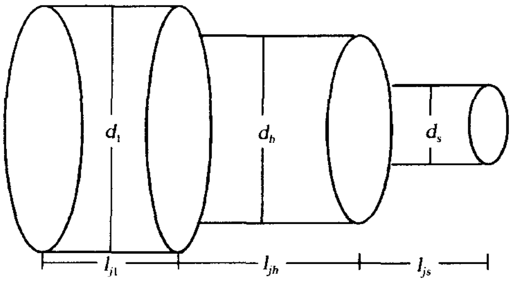

图 1 “分割”管道直径

Fig. 1 Diameter of “partition” pipeline

其中, l_{jh} 是管道 j 中直径 h 的“分段长度”。$\sum_{h=1}^{s} l_{jh} = L_j$。这样对模型改进后, l_{jh} 是连续的,它将作为新的决策变量,模型同时加入长度相等约束条件,直径规格大小根据高压向低压按降序排列。

(P)

$$\text{Min} \quad Cost = C^T \cdot l \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad A \cdot q = Q \tag{6}$$

$$A^T \cdot S \cdot p = \Lambda \cdot q \tag{7}$$

$$B \cdot l = L \tag{8}$$

$$l \geq 0$$

$$p \geq p_{min} \tag{4}$$

这里 C 是 $(m \times s) \times 1$ 维向量,表示每单位长度直径规格的费用; l 是 $(m \times s) \times 1$ 维向量,表示管道 j 中第 h 类直径规格的“分段长度”; L 是 $m \times 1$ 维向量表示管道的长度; q 是 $m \times 1$ 维向量,表示管道的流速; p 是 $n \times 1$ 维向量,表示结点压强; Q 是 $n \times 1$ 维向量,表示结点需求流速; S 是 $n \times n$ 维对角矩阵,对角元素是 $S_{ii} = p_i$; Λ 是 $m \times m$ 维对角矩阵,对角元素 $\Lambda_{jj} = (K \cdot |q_j|^{0.854} \cdot \sum_{h=1}^{s} (l_{jh}/d_h^{4.854}))$, $(j = 1, \cdots, m)$; B 是 $m \times (m \times s)$ 伴随矩阵,对角元素为全 1 的 s 维向量; A 是 $n \times m$ 维管道和长度的伴随矩阵:元素由 0, 1, - 1 组成,表示结点与管道连接状态。

1.3 改进模型的合理性

因为目标函数是管道直径的线性函数,直径集是离散的变量构成的,难以求解[4]。通过转化决策变量,把目标函数的决策变量由离散的转化成连续的,即决策变量转化成管道的“分段长度”,每段管道由不同的直径对应的“分段”组成。另外,为了保持总长度相等,增加长度等式约束 $B \cdot l = L$。同时,为了方便计算,建立管道和结点之间的联系,引入管道与结点的伴随矩阵 A_{nm}。这样,流动连续性等式约束条件就由(2)转化成(6),压强下降等式约束条件就由(3)转化成(7)。新模型通过以上的改进,离散的决策变量转化为连续的变量,原问题转化成带有线性目标函数的非线性规划问题。

2 二阶段算法设计

改进模型后,决策变量是连续变量,但仍然是非线性规划问题[5],我们考虑用二阶段法对其求解。算法思路是第一阶段在满足所有约束条件下求所有结点的压强和的最大值,第二阶段在满足所有约束条件下求费用最低。两阶段通过流速 q 和长度 l 反复迭代,最后达到收敛准则。

2.1 第一阶段

第一阶段最大化所有结点压强和,受流动连续性等式和压强下降等式约束,其中,管道“分段长度”l 是固定的,压强 p 和流速 q 可计算出来。描述如下

(P1)

$$\text{Min} \quad - I^T \cdot p \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \quad A \cdot q = Q \tag{10}$$

$$A^T \cdot S \cdot p = \Lambda \cdot q \tag{11}$$

其中, I 是 n 维向量,所有分量都是 1。转换后,(P1) 仍然是非线性问题,用二次规划法近似解 (P1),因此,(P1)被进一步分解成两个问题,主问题和子问题。主问题就是原问题(P1),子问题是近似主问题的二次规划问题。

主问题,即原问题(P1),因为约束条件是非线性的等式,难以求解,对主问题求其 Lagrangian 函数

$$L_{MP} = - I^T \cdot p - \lambda_q^T \cdot (A \cdot q - Q) - \lambda_p^T \cdot (A^T \cdot S \cdot p - \Lambda \cdot q) \tag{12}$$

对 L_{MP} 应用泰勒级数展开

$$L_{MP}(q + \delta q, p + \delta p, \lambda_q, \lambda_p) = - I^T \cdot (p + \delta p) - \lambda_q^T \cdot X - \lambda_p^T \cdot Y - \lambda_p^T \cdot (A^T \cdot \delta S \cdot \delta p) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \cdot \delta q^T \cdot \{diag \cdot (\frac{\lambda_p \cdot \Lambda}{q})\} \cdot \delta q \tag{13}$$

其中, $X = A \cdot q + A \cdot \delta q - Q$, $Y = A^T \cdot S \cdot p - \Lambda \cdot q + 2A^T \cdot S \cdot \delta p - \alpha \cdot \Lambda \cdot \delta q$, $\alpha = 1.854$, $diag(\frac{\lambda_p \cdot \Lambda}{q})$ 是

$m \times m$ 维对角矩阵,对角元素为$\frac{\lambda_{p_j} \cdot \Lambda_{jj}}{q_j}$,$(j = 1, \cdots, m)$。

第一阶段子问题是与主问题等价的二次规划问题,由主问题的 Lagrangian 函数推出子问题的数学模型为

(SP1)

$$\text{Min}\quad -I^T \cdot (p + \delta p) - \delta p^T \cdot (\text{diag}(A \cdot \lambda_p)) \cdot \delta p + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \cdot \delta q^T \cdot \{\text{diag}(\frac{\lambda_p \cdot \Lambda}{q})\} \cdot \delta q \quad (14)$$

$$\text{s.t.}\quad Y = A^T \cdot S \cdot p - \Lambda \cdot q + 2A^T \cdot S \cdot \delta p - \alpha \cdot \Lambda \cdot \delta q = 0 \quad (15)$$

$$X = A \cdot q - Q + A \cdot \delta q = 0 \quad (16)$$

此时,目标函数是线性的,并带有 $2m$ 个等式约束,约束条件也是线性的。在子问题阶段,流速 q 和压强是固定的 p,需要计算出 δp 和 δq。

首先,求(SP1)的松弛 Lagrangian 函数

$$L_{ang} = -I^T \cdot (p + \delta p) - \delta p^T \cdot (\text{diag}(A \cdot \lambda_p)) \cdot \delta p + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \cdot \delta q^T \cdot \{\text{diag}(\frac{\lambda_p \cdot \Lambda}{q})\} \cdot \delta q - \lambda_q^T \cdot X - \lambda_p^T \cdot Y + (\frac{1}{2} \cdot X^T \cdot \rho_q \cdot X) + (\frac{1}{2} \cdot Y^T \cdot \rho_p \cdot Y) \quad (17)$$

其中,λ_p 和 λ_q 是拉格朗日乘子,ρ_p 是 $m \times m$ 维对角矩阵,压强下降约束的惩罚因子;ρ_q 是 $n \times n$ 维对角矩阵,流动连续约束的惩罚因子。求出 L_{aug}函数的 Hessian 矩阵和梯度向量,通过牛顿方程解出 δp 和 δq。然后用 δp 和 δq 更新 p 和 q。

牛顿方程公式为　$\nabla^2 L_{aug} \cdot \delta X = - \nabla L_{aug}$。其中,

$$\nabla^2 L_{aug} = \begin{bmatrix} \nabla^2_{qq} L_{aug} & \nabla^2_{qp} L_{aug} \\ \nabla^2_{pq} L_{aug} & \nabla^2_{pp} L_{aug} \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m+n)},$$

$$\nabla L_{aug} = \begin{bmatrix} \nabla_q L_{aug} \\ \nabla_p L_{aug} \end{bmatrix}_{(m+n) \times 1}, \delta X = \begin{bmatrix} \delta q \\ \delta p \end{bmatrix}_{(m+n) \times 1}。$$

牛顿方程包含 $2(m + n)$ 个等式约束,n 个 δp 和 m 个 δq。当 δX 计算出来后,更新解为:$X_{k+1} = X_k + \delta X_k$,当 δX 和 ∇L_{aug}的范数小于 ε 时,子问题算法结束。当最优的 q 和 p 计算出来后,把解带入主问题,检验所有约束条件是否满足,如果在主问题阶段最优条件不满足,更新拉格朗日乘子:$\lambda_{p_{i+1}} = \lambda_{p_i} - \rho_{p_i} c_{p_i}$,$\lambda_{q_{i+1}} = \lambda_{q_i} - \rho_{q_i} c_{q_i}$。其中,$c_{p_i}$和 c_{q_i}是主问题第 i 步的约束值,λ_{p_i}和 λ_{q_i}是主问题第 i 步的拉格朗日乘子。另外,如果 q_{k+1}和 p_{k+i}相对于 q 和 p 没有明显下降,则增加惩罚因子 ρ_q 和ρ_p,例如:如果$c_{i+1} < (1/\tau) \cdot c_i$ 不能满足,$\rho_{i+1} = t \cdot \rho_i$,其中 t 是惩罚因子的增长率。当(P1)的最小值满足必要条件,第一阶段结束,用第一阶段计算出来的 q 作为第二阶段输入值。

2.2　第二阶段

在第二阶段中,固定第一阶段输入的 q,计算“分段长度”l 和压强 p。(P2)是线性规划问题。

(P2)

$$\text{Min}\quad c^T \cdot l \quad (18)$$

$$\text{s.t.}\quad B \cdot l = L \quad (19)$$

$$A \cdot S \cdot p = \Lambda \cdot q \quad (20)$$

在此阶段,约束条件(19)和(20)都是线性等式约束条件,即可用单纯形法求解。第一阶段计算出来的 q 作为输入值是固定的,l 和 p 被计算出来,比较两阶段的压强,若相等,则算法结束;否则,把 l 作为第二阶段输出值代入第一阶段。

2.3　二阶段法计算步骤

本算法通过第一阶段和第二阶段之间反复迭代,寻找管道的最优“分段长度”,算法的终止准则是两阶段计算出来的压强相等,算法的具体流程为

①初始化

“分段长度”l:最大直径的“分段长度”设为整个管道 j 的长度,其余“分段长度”设为 0;

管道流速 q:管道中天然气的平均流速;

结点压强 p:所有结点压强都设为源结点的压强。

②第一阶段:l 固定,解出 q 和 p,q 作为输出值代入第二阶段。

③第二阶段:q 固定,解出 l 和 p。

④比较第一阶段和第二阶段分别计算出来的压强 p,若不相等,则把 l 作为输出值代入第一阶段,转到②。否则,算法结束。

3　结束语

天然气管道网络系统的优化问题是混合整数非线性规划问题,因为其变量是离散的,所以很难求解。尤其对于几百个结点和管道的大型网络,问题将更难求得最优分配,无论是遗传算法和分枝定界法,都无法求得满意解。本文采用“分割管道”的方法把原问题转化成连续的非线性规划问题,并用两阶段法设计求解,建立了一种求解天然气系统最优

分配角的新方法。

参考文献:

[1] 詹森. 网络流规划[M]. 北京: 科技出版社, 1997: 106 - 218.

[2] 赵秋红. 几类物流优化模型的研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2002.

[3] CHANG C. On the mixed integer signomial programming problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 170: 1436 - 1451.

[4] ZHU Guangyan, HENSON M A, MEGAN L. Dynamic modeling and linear model predictive control of gas pipeine networks[J]. Journal of Process Control, 2001, 11: 129 - 148.

[5] BRANDAO J. A tabu search algorithm for the open vehicle routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 157: 552 - 564.

A two phases method for optimization distributing in a gas pipeline

HUANG YingQi WEI YuFeng HU YunJiao

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: An improved method for solving the optimal distribution problem of a gas piping system is introduced. Mathematical programming has been used to solve for the optimal distribution and the problem represented by a mathematical model. The optimization problem is a mixed-integer non-linear programming problem, and in general discrete non-linear programming problems are difficult to solve. In this paper, several continuous variables are introduced to replace the discrete decision variables, most importantly the pipe "segment length", and in this way the original problem becomes a non-linear programming problem. The original non-linear programming problem is decomposed into two optimization subsystems, Phase 1 and Phase 2. The interconnection between Phase 1 and 2 involves the gas flow rate and the segment length. The output variables of Phase 1 are the input variables for Phase 2, and the output variables of Phase 2 are also the input variables for Phase 1.

Key words: mixed-integer non-linear programming; discrete decision variable; segment length

(上接第 328 页)

Reducibility of centered hyperplane arrangement

XU JianMin NIU XingWen

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Sevaral operation characters in the lattice L of a product arrangement have been educed. It is proven that a product arrangement $(\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_k, V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)$ is a supersolvable arrangement if, and only if, each arrangement $(\mathbf{A}_i, V_i)$, $1 \leq i \leq k$ is also a supersolvable arrangement. It is also proven that if each arrangement $(\mathbf{A}_i, V_i)$, $1 \leq i \leq k$ is a nice patition, then the product arrangement $(\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_k, V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)$ is also a nice patition.

Key words: product arrangement; supersolvable arrangement; modular; nice partition