

引用格式:陈晓楠,常玉,陈娇,等.一类离散神经系统中的混沌存在性[J].北京化工大学学报(自然科学版),2023,50(2):119-125.

CHEN XiaoNan, CHANG Yu, CHEN Jiao, et al. Chaos in a discrete FitzHugh-Nagumo model[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2023, 50(2):119-125.

一类离散神经系统中的混沌存在性

陈晓楠 常玉* 陈娇 杨睿丰

(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘要:研究了离散 FitzHugh-Nagumo 神经系统的混沌现象。从理论上严格证明了在一定参数条件下系统存在 Marotto 意义下的混沌,并通过数值计算模拟出该混沌吸引子,以及周期 14 轨、周期 16 轨等其他复杂动态。此外,通过 Lyapunov 指数的计算对 Marotto 混沌吸引子的存在性加以验证。

关键词:离散 FitzHugh-Nagumo 系统; Marotto 混沌; Lyapunov 指数

中图分类号: O193 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2023.02.015

引言

神经系统主导着生物体生理活动的调节,其功能主要通过神经元产生、处理和传递电信号来实现^[1-2]。1952年,基于乌贼巨型轴突上电位变化的实验数据, Hodgkin 等^[3]建立了一个四维非线性连续数学模型—Hodgkin-Huxley 模型(HH 模型),开启了对神经元电活动的数学研究。随后, FitzHugh^[4]在保留系统主要动态的基础上,将 HH 模型简化为二维系统;之后 Nagumo 等^[5]通过电路实验成功实现了该模型的动态,因此该模型也被称为 FitzHugh-Nagumo 模型(FHN 模型)。由于系统的复杂性,针对 FHN 模型的动态研究一直备受关注。Hayashi^[6]给出了 FHN 模型非平凡闭轨唯一性的充分条件。Rocşoreanu 等^[7]证明了 FHN 模型中 saddle-node 分支、Hopf 分支以及 Bogdanov-Takens 分支的存在性。Jing 等^[8]对 FHN 模型应用 Euler 方法得到离散 FHN 系统,证明了该系统存在周期 10 轨、倍周期级联以及混沌等复杂动态。之后, Zhan 等^[9]推广了一类离散 FHN 模型,通过数值模拟分析了系统产生混沌的内外机制,以及延滞反馈项、高斯

白色噪声项和磁场对激发神经元放电模式的影响。随着对该模型研究的深入,大量结果表明模型的动态对揭示现实中神经元放电活动的机制具有重要的参考价值。

本文以文献[9]中的离散 FHN 模型为研究对象,从理论上分析了系统中 Marotto 混沌的存在性,得到了这类混沌存在的参数充分条件,并通过数值模拟展示了混沌吸引子、高周期解等复杂的非线性动态,这些结果丰富了对该模型的研究。

1 离散 FHN 模型

1.1 模型描述

考虑如下离散 FHN 模型^[9]

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \delta \left(x - \frac{x^3}{3} - y + I \right) \\ y + \frac{\delta}{\tau} (ax + b - y) \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中, x 表示神经元膜电位; y 表示与膜电位恢复到静息电位过程有关的恢复变量; 参数 $I (\in \mathbb{R})$ 表示神经元接受的外界刺激强度或输入电流, 其他系统参数 $a (> 0)$ 、 $b (\in \mathbb{R})$ 、 $\tau (> 0)$ 、 $\delta (0 < \delta < 1)$ 的说明参见文献[9]。

1.2 Marotto 意义下混沌的存在性

在高维离散系统中存在的最典型的混沌吸引子是 Marotto 混沌, 这类混沌系统的动态十分复杂, 如: 该系统存在任意正整数周期的周期轨; 同时拥有“scrambled”集, 这是一个不包括周期点、不可数的、

收稿日期: 2022-01-05

基金项目: 国家自然科学基金(11771033)

第一作者: 女, 1996年生, 硕士生

*通信联系人

E-mail: changyu@mail.buct.edu.cn

具有初值敏感性、没有渐近周期点的不变集。此类混沌的存在性完全由系统是否拥有某类特殊不动点即 snap-back repeller 所决定^[10-11]。本文将从理论上研究 Marotto 意义下的混沌在系统(1)中的参数存在条件。

应用离散动力系统的定性理论可得,当 $b = 1, 0 < a < 1$ 时,系统(1)存在一个不动点 $Z_0(x_0, y_0) = (\sqrt{3(1-a)}, a\sqrt{3(1-a)} + b)$ 。此不动点 Z_0 是 snap-back repeller 需要满足以下条件:

①存在 Z_0 的一个邻域 U_{Z_0} ,在此邻域中 Z_0 是 expanding 不动点,即 $\forall Z(x, y) \in U_{Z_0}, Z$ 所有特征值的模长均大于 1;

② U_{Z_0} 中存在一点 $Z^*(x^*, y^*) \neq Z_0$, 满足 $f^M(Z^*) = Z_0, |Df^M(Z^*)| \neq 0, M \in N^+$ 。

下面讨论 $Z_0(x_0, y_0)$ 是 snap-back repeller,即满足条件①、②的参数充分条件。

引理 1 若

$$\frac{2}{3} < a < 1 \tag{2}$$

$$\frac{2a-1}{3a-2} < \tau < \frac{1}{2-a-2\sqrt{2a(1-a)}} \tag{3}$$

$$\frac{\tau(2-3a)+1}{2(1-a)} < \delta < 1 \tag{4}$$

则

(i) 存在点集 $U = \{(x, y) \mid x \in$

$(\sqrt{1+\frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}}, \sqrt{1+\frac{1-\delta a}{\delta-\tau}}), y \in \mathbb{R}\}$, 该集中任意点的特征值都是一对共轭复数,且模长大于 1;

(ii) 存在不动点 $Z_0(x_0, y_0) = (\sqrt{3(1-a)},$

$a\sqrt{3(1-a)} + b)$ 的邻域 $U_{Z_0} = \{(x, y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{r_{x_0}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r_{y_0}^2} \leq 1, r_{x_0}, r_{y_0} \in \mathbb{R}^+\}$, 满足 $U_{Z_0} \subset U$ 。

证明: (i) 首先证明 $\frac{2a-1}{3a-2} <$

$$\frac{1}{2-a-2\sqrt{2a(1-a)}}。$$

因为 $\frac{2}{3} < a < 1$, 所以 $\frac{2a-1}{3a-2} = \frac{3a-2+1-a}{3a-2} = 1 +$

$\frac{1-a}{3a-2} > 1$ 。由 $(a(1-a) - (2a-1)\sqrt{2a(1-a)}) \cdot$

$(a(1-a) + (2a-1)\sqrt{2a(1-a)}) = (a(1-a))^2 -$

$((2a-1)\sqrt{2a(1-a)})^2 = -9a(1-a)(a-\frac{2}{3})(a-\frac{1}{3}) < 0$, 可得 $a(1-a) - (2a-1)\sqrt{2a(1-a)} < 0$ 。

又因为 $(2-a-2\sqrt{2a(1-a)})(2-a+2\sqrt{2a(1-a)}) = (2-a)^2 - (2\sqrt{2a(1-a)})^2 = 9(a-\frac{2}{3})^2 > 0$, 故 $2-a-2\sqrt{2a(1-a)} > 0$, 从而

$$\text{有 } \frac{2a-1}{3a-2} - \frac{1}{2-a-2\sqrt{2a(1-a)}} = \frac{2(a(1-a) - (2a-1)\sqrt{2a(1-a)})}{(3a-2)(2-a-2\sqrt{2a(1-a)})} < 0。$$

其次证明 $1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau} > 1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau} > 0$ 。

显然 $\tau+1 > 2\sqrt{\tau} > 2\sqrt{a\tau}$, 故 $1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau} > 0$ 。

由式(2)以及 $\tau > \frac{2a-1}{3a-2}$, 可得 $\frac{\tau-1}{1-a} > \frac{2a-1-1}{1-a} =$

$\frac{1}{3a-2} > 1$ 。又由 $\frac{2a-1}{3a-2} > 1 > \delta$, 可知 $\frac{\tau-1}{1-a} > \delta, \tau > \delta$, 从而有

$$1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau} = \frac{\delta(1-a)+1-\tau}{\delta-\tau} =$$

$$\frac{(1-a)(\frac{\tau-1}{1-a}-\delta)}{\tau-\delta} > 0。$$

因为 $\frac{2a-1}{3a-2} - \frac{1}{a} = \frac{2(a-1)^2}{a(3a-2)} > 0$, 所以 $\frac{2a-1}{3a-2} >$

$\frac{1}{a}$ 。由 $\tau > \frac{2a-1}{3a-2} > \frac{1}{a}$, 可得 $a\tau > 1$, 从而 $\frac{2\tau}{1-\sqrt{a\tau}} < 0$ 。

注意到 $(1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}) - (1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}) =$

$$\frac{(1-\sqrt{a\tau})^2(\delta - \frac{2\tau}{1-\sqrt{a\tau}})}{\tau(\delta-\tau)} < 0$$
, 故 $1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau} < 1 +$

$$\frac{1-\delta a}{\delta-\tau}。$$

又因为 $\frac{1-\delta a}{\delta-\tau} < 0 < \frac{1+2\sqrt{a\tau}}{\tau}$, 所以 $1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau} <$

$$1 + \frac{1+2\sqrt{a\tau}}{\tau}。$$

综上所述, 点集 $U = \{(x, y) \mid x \in$

$\left(\sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}}, \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}}\right), y \in R\}$ 是存在的。

任取 $Z(x, y) \in U$, 下面证明 $Z(x, y)$ 具有一对共轭复特征值, 且模长大于 1。

易知系统(1)在点 $Z(x, y)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 1 + \delta(1 - x^2) & -\delta \\ \frac{\delta a}{\tau} & 1 - \frac{\delta}{\tau} \end{pmatrix}$$

其特征方程为 $\lambda^2 + p(x)\lambda + q(x) = 0$, 其中

$$p(x) = -2 + \frac{\delta}{\tau} - \delta(1 - x^2), q(x) = 1 - \frac{\delta}{\tau} + \delta(1 - x^2) - \frac{\delta^2}{\tau}(1 - x^2) + \frac{\delta^2 a}{\tau}, \text{特征值为 } \lambda_{1,2} = \frac{-p(x) \pm \sqrt{p^2(x) - 4q(x)}}{2}.$$

因为 $x \in \left(\sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}}, \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}}\right), 0 < \delta < \tau$, 所以 $p^2(x) - 4q(x) = \delta^2 \left(x^2 - \left(1 + \frac{1-\sqrt{a\tau}}{\tau}\right)\right) \left(x^2 - \left(1 + \frac{1+2\sqrt{a\tau}}{\tau}\right)\right) < 0, q(x) - 1 = \frac{\delta(\delta-\tau)}{\tau} \left(x^2 - \left(1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}\right)\right) > 0$, 从而有点 $Z(x, y)$ 的特征值为一对共轭复数 $\lambda_{1,2} = \frac{-p(x)}{2} \pm i \frac{\sqrt{4q(x) - p^2(x)}}{2}$, 且 $\|\lambda_{1,2}\| = \sqrt{q(x)} > 1$ 。

(ii) 为选取适当的 r_{x_0} 和 r_{y_0} , 先证明

$$\sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}} < \sqrt{3(1-a)} < \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}}.$$

因为 $a < 1, \frac{\tau(2-3a)+1}{2(1-a)} < \delta$, 所以 $\tau(2-3a)+1 < 2\delta(1-a)$, 从而 $\delta-\tau+1-\delta a < 3(1-a)(\delta-\tau)$ 。又 $\delta < \tau$, 故

$$3(1-a) < 1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau} \tag{5}$$

由 $a > \frac{2}{3}, 0 < \tau < \frac{1}{2-a-2\sqrt{2a(1-a)}}$, 可得

$$(3a-2)\tau - 2\sqrt{a\tau} + 1 < \frac{3a-2}{2-a-2\sqrt{2a(1-a)}} - 2\sqrt{a\tau} + 1 < \frac{3a-2}{2-a-2\sqrt{\frac{4}{3} \times \frac{1}{3}}} - 2\sqrt{a\tau} + 1 = -2 - 2\sqrt{a\tau} < 0, \text{从而有 } 1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau} - 3(1-a) =$$

$$\frac{(3a-2)\tau - 2\sqrt{a\tau} + 1}{\tau} < 0, \text{即}$$

$$1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau} < 3(1-a) \tag{6}$$

由式(5)、(6)可知

$$\sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}} < \sqrt{3(1-a)} < \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}}$$

$$\text{取 } 0 < r_{x_0} < \min \left\{ \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}} - \sqrt{3(1-a)}, \right.$$

$$\left. \sqrt{3(1-a)} - \sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}} \right\}, r_{y_0} \in R^+, \text{考虑不动点 } Z_0(x_0, y_0) = (\sqrt{3(1-a)}, a\sqrt{3(1-a)} + b)$$

的邻域 $U_{Z_0} = \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{r_{x_0}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r_{y_0}^2} \leq 1 \right\}$, 任取点 $Z(x, y) \in U_{Z_0}$, 则其横坐标 $x \in [x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}]$,

显然 $[x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}] \subset \left(\sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}}, \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}}\right)$, 故 $U_{Z_0} \subset U$ 。命题得证。

引理 2 考虑不动点 $Z_0(x_0, y_0) = (\sqrt{3(1-a)}, a\sqrt{3(1-a)} + b)$, 及其邻域 $U_{Z_0} = \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{r_{x_0}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r_{y_0}^2} \leq 1, r_{x_0} = 0.1, r_{y_0} \in R^+ \right\}$, 若式(2)~(4), 以及

$$\delta \neq \frac{\tau}{1 + \sqrt{a\tau}} \tag{7}$$

$$30 \left| x_0 + \frac{100}{\delta} \left(2x_0 - \sqrt{3 \left(3a + 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right)} \right) \cdot \left(\frac{\delta^2 a \tau}{(\tau - \delta)^2} - 1 \right) \right| + 1 < 300 \left(3a - 2 + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta a}{\tau - \delta} \right) \tag{8}$$

成立, 则在邻域 U_{Z_0} 中存在一点 $Z^*(x^*, y^*)$, 满足 $Z^* \neq Z_0, f^2(Z^*) = Z_0$, 且 $|Df^2(Z^*)| \neq 0$ 。

证明: 设有点 $Z^*(x^*, y^*)$, 令 $Z_1(x_1, y_1) = f(Z^*), f^2(Z^*) = f(Z_1) = Z_0$, 即

$$\begin{cases} x_1 = x^* + \delta \left(x^* - \frac{(x^*)^3}{3} - y^* + I \right) \\ y_1 = y^* + \frac{\delta}{\tau} (ax^* - y^* + b) \end{cases} \tag{9}$$

且

$$\begin{cases} x_1 + \delta \left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + I \right) = x_0 \\ y_1 + \frac{\delta}{\tau} (ax_1 - y_1 + b) = y_0 \end{cases} \quad (10)$$

易知方程组(10)的一组解为

$$\begin{cases} x_{1+} = \frac{-x_0 + \sqrt{3 \left(3a + 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right)}}{2} \\ y_{1+} = y_0 - \frac{\delta a(x_{1+} - x_0)}{\tau - \delta} \end{cases} \quad (11)$$

先证 $(x_{1+}, y_{1+}) \neq (x_0, y_0)$ 。由 $a > \frac{2}{3}, \tau > \delta$ 可

得 $\left(2x_0 - \sqrt{3 \left(3a + 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right)} \right) \left(-2x_0 - \sqrt{3 \left(3a + 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right)} \right) = 3 \left(7a - 3 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right) > 3 \left(7 \times \frac{2}{3} - 3 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right) = 5 + 12 \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta a}{\tau - \delta} \right) > 0$, 从而

$$x_0 - x_{1+} = 2x_0 - \sqrt{3 \left(3a + 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right)} \neq 0 \quad (12)$$

将式(11)代入到方程组(10)可得

$$(x^*)^3 - \frac{3}{\delta} \left(1 + \delta + \frac{\delta^2 a}{\tau - \delta} \right) x^* + \frac{3}{\delta} \left(1 - \frac{\delta^2 a \tau}{(\tau - \delta)^2} \right) x_{1+} + \frac{3a\tau^2}{(\tau - \delta)^2} x_0 = 0 \quad (13)$$

$$y^* = \frac{\tau(\tau - \delta)y_0 - \delta a \tau(x_{1+} - x_0) - \delta(ax^* + b)(\tau - \delta)}{(\tau - \delta)^2} \quad (14)$$

为求方程(13)在 $[x_0 - 0.1, x_0 + 0.1]$ 内的解 x^* , 令 $x^* = s + x_0$, 代入方程(13)可得

$$g(s) \equiv s^3 + 3s^2 x_0 + 3s \left(x_0^2 - 1 - \frac{1}{\delta} - \frac{\delta a}{\tau - \delta} \right) + \frac{3}{\delta} \times \left(\frac{\delta^2 a \tau}{(\tau - \delta)^2} - 1 \right) (x_0 - x_{1+}) = 0 \quad (15)$$

下面证明方程(15)在 $[-0.1, 0.1]$ 内有非零解, 即 $g(s)$ 有非零的零点。

令 $g'(s) = 3 \left(s^2 + 2x_0 s + x_0^2 - 1 - \frac{1}{\delta} - \frac{\delta a}{\tau - \delta} \right) = 0$, 可得 $g(s)$ 的两个驻点 $s_{1,2} = -x_0 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta a}{\tau - \delta}}$, 其中 $s_1 < s_2$, 显然当 $s \in (s_1, s_2)$ 时, $g'(s) < 0$ 。因为 $\tau > \delta > 0$, 所以 $1 + \frac{1 - \delta a}{\delta - \tau} = 1 + \frac{\delta a}{\tau - \delta} -$

$\frac{1}{\tau - \delta} < 1 + \frac{\delta a}{\tau - \delta} + \frac{1}{\delta}$, 从而有 $s_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta a}{\tau - \delta}} - \sqrt{3(1 - a)} > \sqrt{1 + \frac{1 - \delta a}{\delta - \tau}} - \sqrt{3(1 - a)} > 0.1$, 且 $s_1 = -s_2 - 2\sqrt{3(1 - a)} < -0.1$, 故 $[-0.1, 0.1] \subset (s_1, s_2)$ 。因此当 $s \in [-0.1, 0.1]$ 时, $g'(s) < 0$, 即 $g(s)$ 在区间 $[-0.1, 0.1]$ 是单调递减函数。

由式(7)及 $a\tau > 1$, 有

$$\delta^2 a \tau - (\tau - \delta)^2 = (\delta(1 + \sqrt{a\tau}) - \tau) (\delta(\sqrt{a\tau} - 1) + \tau) \neq 0 \quad (16)$$

由式(12)、(16)及 $\tau > \delta > 0$ 可得

$$g(0) = \frac{3(x_0 - x_{1+})(\delta^2 a \tau - (\tau - \delta)^2)}{\delta(\tau - \delta)^2} \neq 0。$$

且由式(8)、(12)可知, $g(-0.1)g(0.1) = \left(\frac{30}{1000} \left(x_0 + \frac{100(x_0 - x_{1+})}{\delta} \left(\frac{\delta^2 a \tau}{(\tau - \delta)^2} - 1 \right) \right) \right)^2 - \left(\frac{1}{1000} \left(300 \left(3a - 2 + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta a}{\tau - \delta} \right) - 1 \right) \right)^2 < 0$, 根据零点定理得, $\exists s^* \in (-0.1, 0.1), g(s^*) = 0$, 又因 $g(0) \neq 0$, 故 $s^* \neq 0$ 。综上所述方程(13)有实根 $x^* = x_0 + s^* \in (x_0 - 0.1, x_0 + 0.1)$, 且 $x^* \neq x_0$ 。取 $r_{j_0} > |y^* - y_0|$, 从而 $Z^*(x^*, y^*) \in U_{z_0}, Z^* \neq Z_0, f^2(Z^*) = Z_0$ 。下证 $|Df^2(Z^*)| \neq 0$ 。

$$|Df(Z^*)| > 0$$

$$|Df(Z_1)| = \frac{\delta^2 a}{\tau} + \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) (1 + \delta(1 - x_{1+}^2)) = - \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) \left(\frac{3\delta \sqrt{(1 - a) \left(3a + 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau - \delta} \right)}}{4} + \frac{3\delta a}{2} + 2 + \delta \right) - \frac{2\delta^2 a}{\tau} < 0$$

故 $|Df^2(Z^*)| = |Df(Z_1)| \|Df(Z^*)| \neq 0$ 。命题得证。

说明:引理2中的 r_{x_0} 取值为0.1,事实上只要 r_{x_0} 取充分小的正数,补充形如式(8)的条件,即可得相同的结论。

综上所述,可得如下定理。

定理 若系统参数 a, τ, δ 满足引理1与引理2中的条件,则系统(1)的不动点 $Z_0(x_0, y_0) = (\sqrt{3(1 - a)}, a\sqrt{3(1 - a)} + b)$ 是 snap-back repeller, 此时系统(1)是 Marotto 混沌的, 即存在:

1) 一个正整数 N , 使得对于任一整数 $p \geq N, f$ 有

周期 p 点。

2) 一个“scrambled set”，即一个不含周期点的不可数集 S 满足

(a) $f[S] \subset S$;

(b) 对于 S 中任意不相同的两点 X 和 Y , 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(X) - f^k(Y)\| > 0;$$

(c) 对于 S 中任意点 X , 以及 f 的任意周期点 Y , 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|f^k(X) - f^k(Y)\| > 0.$$

3) S 有一个不可数子集 S_0 , 对于 S_0 中任意点 X 和 Y , 有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f^k(X) - f^k(Y)\| = 0.$$

2 数值模拟

本节取两组参数, 通过数值计算, 对 Marotto 混沌吸引子及周期轨等复杂动态进行模拟。

1) 参数组 1: $b = I = 1, a = 0.9, \tau = 2.47, \delta = 0.992$ 。

系统(1)存在一个不动点。

$$Z_0(x_0, y_0) = (0.547\ 722\ 557\ 505\ 17,$$

1.492\ 950\ 301\ 754\ 653), 其特征值为 $\lambda_{1,2} = 1.146\ 39 \pm 0.241\ 35i, \|\lambda_{1,2}\| > 1$ 。此时参数满足引理 1 与引理 2 的条件:

$$a = 0.9 > \frac{2}{3}$$

$$\frac{\tau(2-3a)+1}{2(1-a)} = -3.645 < \delta < 1$$

$$1.143 = \frac{2a-1}{3a-2} < \tau < \frac{1}{2-a-2\sqrt{2a(1-a)}} = 3.977$$

$$\delta \neq \frac{\tau}{1+\sqrt{a\tau}} = 0.991\ 58$$

$$30 \left| x_0 + \frac{100}{\delta} \left(2x_0 - \sqrt{3 \left(3a+1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4\delta a}{\tau-\delta} \right)} \right) \times \left(\frac{\delta^2 a \tau}{(\tau-\delta)^2} - 1 \right) \right| + 1 = 3.488 < 300 \left(3a-2 + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta a}{\tau-\delta} \right) = 693.637$$

引理 1 中的点集 U 与 Z_0 的邻域 U_{Z_0} 分别为

$$U = \left\{ (x, y) \mid x \in \left(\sqrt{1 + \frac{1-2\sqrt{a\tau}}{\tau}}, \sqrt{1 + \frac{1-\delta a}{\delta-\tau}} \right) = (0.444\ 5, 0.963\ 1), y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_{Z_0} = \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{0.01} + \frac{(y-y_0)^2}{4} \leq 1 \right\}$$

显然 $U_{Z_0} \subset U$ 。 $\forall Z(x, y) \in U_{Z_0}, Z(x, y)$ 的特征方程为 $\lambda^2 + p(x)\lambda + q(x) = 0$, 特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p(x) \pm \sqrt{p^2(x) - 4q(x)}}{2}, \|\lambda_{1,2}\| = \sqrt{q(x)}$$

其中 $p^2(x) - 4q(x) < p^2(x_0 - 0.1) - 4q(x_0 - 0.1) = -0.006\ 79 < 0, q(x) - 1 > q(x_0 + 0.1) - 1 = 0.446\ 06 > 0$, 即 Z 的特征值为一对模长大于 1 的共轭复数。 U_{Z_0} 中存在一点 $Z^*(x^*, y^*) = (0.546\ 528\ 029\ 406\ 18, -0.462\ 001\ 800\ 839\ 748)$, $Z_1(x_1, y_1) = f(Z^*) = (2.485\ 010\ 260\ 145\ 796, 0.322\ 713\ 183\ 407\ 19), f^2(Z^*) = Z_0$, 且 $|Df^2(Z^*)| = -2.904\ 5$ 。由定理可得 Z_0 是一个 snap-back repeller, 即系统(1)存在 Marotto 混沌吸引子。

选取不动点 $Z_0(x_0, y_0) = (0.547\ 722\ 557\ 505\ 17, 1.492\ 950\ 301\ 754\ 653)$ 的邻域 U_{Z_0} 中的点 $(0.547\ 7, 1.493)$ 为初始点, 其相图见图 1, 这条轨道的 Lyapunov 指数为 $\{-0.241\ 97, 0.078\ 66\}$, 即为 Marotto 混沌吸引子。

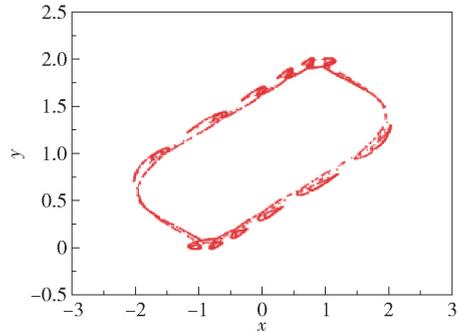


图 1 Marotto 混沌吸引子 ($\delta = 0.992$)

Fig. 1 A Marotto chaotic attractor ($\delta = 0.992$)

不同于前一组 Z_0 的邻域 U_{Z_0} 中 $r_{x_0} (= 0.1)$ 的取值, 将 r_{x_0} 设置为 0.08, 仍能证明在一定参数条件下系统是 Marotto 意义下混沌的。

2) 参数组 2: $b = I = 1, a = 0.91, \tau = 2.4, \delta = 0.99$ 。

系统(1)存在不动点。

$$Z_0(x_0, y_0) = (0.519\ 615\ 242\ 270\ 663,$$

1.472\ 849\ 870\ 466\ 304), 其特征值为 $\lambda_{1,2} = 1.155\ 1 \pm 0.233\ 4i, \|\lambda_{1,2}\| > 1$ 。存在 Z_0 的邻域

$$U_{Z_0} = \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{r_{x_0}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r_{y_0}^2} \leq 1, r_{x_0} = 0.08, r_{y_0} = 2.2 \right\}$$

任取 $Z(x, y) \in U_{Z_0}$, 因为 $p^2(x) - 4q(x) < p^2(x_0 -$

$0.08) - 4q(x_0 - 0.08) = -0.01955 < 0, q(x) - 1 >$
 $q(x_0 + 0.08) = 0.33163 > 0$, 所以 $Z(x, y)$ 有一对模
 长大于 1 的共轭复特征值
 $\frac{-p(x) \pm i\sqrt{4q(x) - p^2(x)}}{2}$, 且其模长 $\sqrt{q(x)} > 1$ 。

U_{Z_0} 中存在点 $Z^*(x^*, y^*) = (0.45525855258397,$
 $0.664929193926399)$, $Z_1(x_1, y_1) = f(Z^*) =$
 $(2.523106596180992, 0.19274677774448)$,
 $f^2(Z^*) = Z_0, |Df^2(Z^*)| = -3.0704 \neq 0$, 由条件
 ①、②得, $Z_0(x_0, y_0)$ 是 snap-back repeller, 系统(1)
 存在 Marotto 混沌吸引子, 这条轨道的 Lyapunov 指
 数为 $\{-0.18254, 0.0651\}$ 。

针对第一组参数值, 在 $\delta = 0.992$ 时系统(1)出
 现了 Marotto 混沌吸引子。本文计算了参数 $\delta \in$
 $(0.9, 1)$ 时, 以不动点 Z_0 邻域中的点 $(0.5477,$
 $1.493)$ 为初始点的轨道的最大 Lyapunov 指数, 如图
 2 所示。很明显, 系统在 δ 参数区间 $(0.988, 1)$ 内始
 终保持混沌状态。

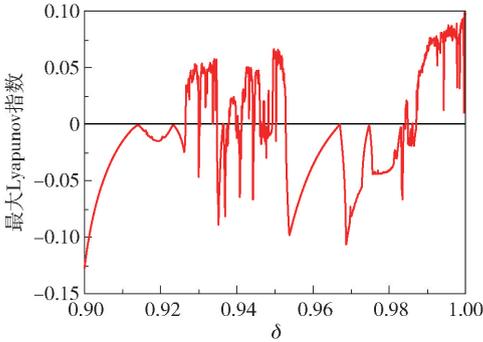


图2 最大 Lyapunov 指数图

Fig. 2 The maximum Lyapunov exponent diagram

通过数值模拟计算, 我们还发现系统存在高周
 期轨道, 如周期 16 轨、周期 14 轨, 如图 3、4 所示。

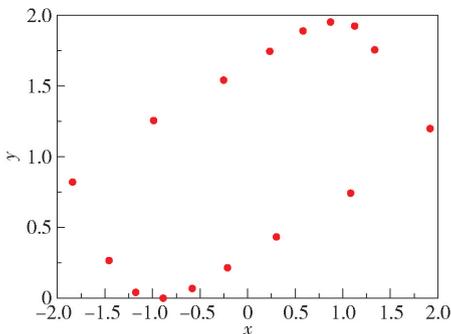


图3 周期 16 轨($\delta=0.9205$)

Fig. 3 Period-16 orbit($\delta=0.9205$)

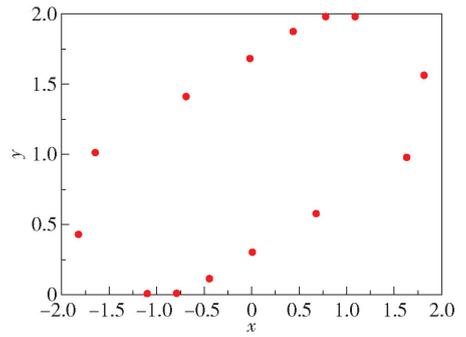


图4 周期 14 轨($\delta=0.962$)

Fig. 4 Period-14 orbit($\delta=0.962$)

3 结束语

本文研究了一类离散 FHN 神经系统的混沌现
 象, 主要从理论上严格证明了该系统 Marotto 意义下
 混沌的存在性。此外通过数值计算模拟出 Marotto
 混沌吸引子, 同时还发现系统中存在周期 14 轨和周
 期 16 轨, 这些复杂动态的发现丰富了对此系统的
 理解。

参考文献:

[1] 曲良辉, 都琳, 胡海威, 等. 电磁刺激对 FHN 神经元系统的调控作用[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(1): 40-48.
 QU L H, DU L, HU H W, et al. Regulation of electromagnetic stimulation on FHN neuronal system[J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(1): 40-48. (in Chinese)

[2] 武春艳. 神经元 FitzHugh-Nagumo 模型的动力学分析[D]. 太原: 太原理工大学, 2015.
 WU C Y. Dynamical analysis of the neuronal FitzHugh-Nagumo model [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2015. (in Chinese)

[3] HODGKIN A L, HUXLEY A F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve[J]. Journal of Physiology, 1952, 117(4): 500-544.

[4] FITZHUGH R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane[J]. Biophysical Journal, 1961, 1(6): 445-466.

[5] NAGUMO J, ARIMOTO S, YOSHIZAWA S. An active pulse transmission line simulating nerve axon[J]. Proceedings of the IRE, 1962, 50(10): 2061-2070.

[6] HAYASHI M. A note on the uniqueness of the closed orbit of the FitzHugh - Nagumo system[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 2000, 58(1): 171-176.

- [7] ROCȘOREANU C, GIURGIȚEANU N, GEORGESCU A. Connections between saddles for the FitzHugh–Nagumo system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(2): 533–540.
- [8] JING Z J, JIA Z Y, CHANG Y. Chaos behavior in the discrete FitzHugh nerve system [J]. *Science in China (Series A)*, 2001, 44(12): 1571–1578.
- [9] ZHAN F B, LIU S Q. A Hénon-like map inspired by the generalized discrete-time FitzHugh–Nagumo model [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(10): 2675–2691.
- [10] MAROTTO F R. Snap-back repellers imply chaos in \mathbb{R}^n [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978, 63(1): 199–223.
- [11] MAROTTO F R. On redefining a snap-back repeller [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 25(1): 25–28.

Chaos in a discrete FitzHugh–Nagumo model

CHEN XiaoNan CHANG Yu* CHEN Jiao YANG RuiFeng

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Chaos phenomena in a discrete FitzHugh–Nagumo nervous model have been investigated. The existence of chaos in the sense of Marotto is analyzed theoretically. Numerical calculation studies for Lyapunov exponent demonstrate various complex dynamics, such as chaotic attractors, and period-14, and period-16 orbits.

Key words: discrete FitzHugh–Nagumo model; chaos in the sense of Marotto; Lyapunov exponent

(责任编辑:吴万玲)