引用格式: 王静,侯东杰,陈亚洲. 三维可压缩 Navier-Stokes-Allen-Cahn 方程组 Cauchy 问题的适定性[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2022,49(4):117-123.

WANG Jing, HOU DongJie, CHEN YaZhou. Well-posedness of the Cauchy problem for compressible Navier-Stokes-Allen-Cahn equations in 3D[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2022,49(4):117-123.

三维可压缩 Navier-Stokes-Allen-Cahn 方程组 Cauchy 问题的适定性

王 静 侯东杰 陈亚洲*

(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘 要: 研究了一类刻画具有扩散界面的非混相两相流模型,即可压缩 Navier-Stokes-Allen-Cahn 方程组的 Cauchy 问题。在初始小扰动的条件下,通过能量估计的方法证明了三维 Navier-Stokes-Allen-Cahn 方程组全局强解的存在唯一性。

关键词: Navier-Stokes-Allen-Cahn(NSAC)方程组; 存在唯一性; 非混相两相流

中图分类号: O29 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2022.04.014

引 言

具有扩散界面的非混相两相流模型描述了两种不同流体的流动及流体间扩散界面的运动,其相关研究成果广泛应用于航空航天、水利工程、化学工程等领域。因此,针对两相流的扩散界面模型进行研究具有重要的理论意义和应用价值。

关于描述单一流体运动的 Navier-Stokes 方程的研究已有不少。相比于单相流,两相流之间存在相互作用和扩散界面,其模型的建立与分析更为复杂。Van der Waals[1]最先将互不相溶的两相流之间的界面视为一个有厚度的界面层。之后,Blesgen[2]将描述单一流体流动的 Navier-Stokes 方程和描述两种流体在其分界面相互作用的 Allen-Cahn 方程耦合在一起,提出了 Navier-Stokes-Allen-Cahn (NSAC)方程组。关于一维 NSAC 模型的数学研究结果已有很多,Chen 等[3]证明了初始真空状态下强解和经典解的存在唯一性;Ding 等[4]考虑了 NSAC 方程组的自由边界问题,证明了强解的存在唯一性;孙颖等[5]证明了 NSAC 方程组周期边值问题整体解的存在性;Chen 等[6]证明了非等熵 NSAC 方程组初边值问题存在唯一的全局强解;Feireisl 等[7]、Chen 等[8]证明了三维可压缩 NSAC 模型弱解的存在性。

本文研究三维可压缩 Navier-Stokes-Allen-Cahn 方程组的 Cauchy 问题。与前人考虑的初始条件不同,我们假设相场(即组分浓度差 ϕ)在无穷远处趋于 1 或 -1 两种状态。因此,除了克服 NSAC 方程组的强非线性和耦合性,还需要估计 ϕ^2-1 所带来的困难项。针对此类 Cauchy 问题,本文在初始小扰动的假设条件下通过能量方法证明了全局强解的存在唯一性。

1 问题的提出及主要定理

可压缩非混相两相流的流动通常由以下的 NSAC 非线性偏微分方程组描述

$$\begin{cases} \rho_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0 \\ (\rho\boldsymbol{u})_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})=\operatorname{div}\boldsymbol{T} \\ (\rho\phi)_t+\operatorname{div}(\rho\phi\boldsymbol{u})=-\mu \\ \rho\mu=\rho\dfrac{\partial f}{\partial\phi}-\operatorname{div}\left(\rho\dfrac{\partial f}{\partial\nabla\phi}\right) \end{cases} \tag{1}$$

式中,$\rho=\rho_1+\rho_2$ 表示混合流体的总密度;$\boldsymbol{u}$ 表示流速,且 $\rho\boldsymbol{u}=\rho_1\boldsymbol{u}_1+\rho_2\boldsymbol{u}_2$,$\rho_i$、$\boldsymbol{u}_i$($i=1,2$)分别为第 i 种

收稿日期: 2021-07-22
基金项目: 国家自然科学基金(11671027/11901025)
第一作者: 女,1996 年生,硕士生
*通信联系人
E-mail: chenyz@mail.buct.edu.cn

组分的密度和流速;$\phi=\phi_1-\phi_2$ 表示组分间的浓度差,其中 $\phi_i=\rho_i/\rho$;μ 表示化学势;f 表示界面自由能密度。Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{T}$ 表示为

$$\boldsymbol{T}=2\nu D(\boldsymbol{u})+\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}-P\boldsymbol{I}-\rho\nabla\phi\otimes\frac{\partial f}{\partial\nabla\phi} \tag{2}$$

式中,$\nu>0$,$\lambda>0$ 为黏性系数且满足 $\lambda+\frac{2}{N}\nu\geqslant0$;$D(\boldsymbol{u})=(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})/2$ 为应变张量;$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵;$P=p(\rho)-\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2$ 为总压力,其中压力 p 是关于密度 ρ 的光滑函数,且满足 $p'(\rho)>0$,ε 为扩散界面厚度;f 有以下形式

$$f=\frac{1}{4\varepsilon}(1-\phi^2)^2+\frac{\varepsilon}{2\rho}|\nabla\phi|^2 \tag{3}$$

本文研究的问题的初始条件为

$$\begin{cases}(\rho,\boldsymbol{u},\phi)(x,0)=(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\phi_0)(x)\\(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,|\phi_0|)\xrightarrow{x\to\pm\infty}(\bar{\rho},0,1)\end{cases} \tag{4}$$

式中,$\bar{\rho}$ 为给定的正实数,$|\phi_0|\xrightarrow{x\to\pm\infty}1$ 表示两相流初始浓度差 ϕ_0 在无穷远处为 1 或 -1。

本文的主要结论如下。

定理 1 假设初始值$(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\phi_0)$满足条件

$$(\rho_0-\bar{\rho},\boldsymbol{u}_0)\in H^3(\boldsymbol{R}^3),\ \inf_{x\in\boldsymbol{R}^3}\rho_0(x)>0,$$
$$\nabla\phi_0\in H^2(\boldsymbol{R}^3),\phi_0^2-1\in L^2(\boldsymbol{R}^3) \tag{5}$$

存在 $\delta>0$,使得如果

$$\|(\rho_0-\bar{\rho},\boldsymbol{u}_0)\|_{H^3}+\|\nabla\phi_0\|_{H^2}+\|\phi_0^2-1\|\leqslant\delta \tag{6}$$

则方程(1)~(4)存在唯一的全局解$(\rho,\boldsymbol{u},\phi)$满足

$$(\rho-\bar{\rho},\boldsymbol{u})\in C([0,\infty];H^3(\boldsymbol{R}^3)),\phi^2-1\in C([0,\infty];L^2(\boldsymbol{R}^3)),\ \nabla\phi\in C([0,\infty];H^2(\boldsymbol{R}^3)),\ \nabla\phi\in L^2([0,\infty];H^2(\boldsymbol{R}^3)),\ \nabla\rho\in L^2([0,\infty];H^2(\boldsymbol{R}^3)),\nabla\boldsymbol{u}\in L^2([0,\infty];H^3(\boldsymbol{R}^3)) \tag{7}$$

且

$$\|(\rho-\bar{\rho},\boldsymbol{u})\|_{H^3}^2+\|\nabla\phi\|_{H^2}^2+\|\phi^2-1\|^2+\int_0^t(\|\nabla\rho\|_{H^2}^2+\|(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\phi)\|_{H^3}^2)\mathrm{d}\tau\leqslant C(\|(\rho_0-\bar{\rho},\boldsymbol{u}_0)\|_{H^3}^2+\|\nabla\phi_0\|_{H^2}^2+\|\phi_0^2-1\|^2) \tag{8}$$

有以下两点需要注意:①式(6)结合 Sobolev 嵌入定理,δ 足够小时,有 $\inf_{x\in\boldsymbol{R}^3}\phi_0^2>\frac{1}{3}$,其物理意义为在初始时刻,两相流出现分层且分层区域$\left(即\ \phi_0^2<\frac{1}{3}\right)$的测度为零;②记 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2}$。

2 主要定理的证明

定理 1 中证明全局解的存在性的方法:首先证明局部解的存在性,再利用能量估计的方法得到解的一致估计,最后延拓到全局解的存在性。在证明过程中,不仅要估计 $\|(\rho-\bar{\rho},\boldsymbol{u})\|_{H^3}+\|\nabla\phi\|_{H^2}$,还要估计 $\|\phi^2-1\|$。为克服这些难点,在先验估计中需要假设 $\|(\rho_0-\bar{\rho},\boldsymbol{u}_0)\|_{H^3}+\|\nabla\phi_0\|_{H^2}$ 和 $\|\phi_0^2-1\|$ 均具有小性。

2.1 局部解的存在性

首先,证明局部解的存在性。

令 $\sigma=\rho-\bar{\rho}$,定义解空间,对 $\forall\, m>0,M>0$,有

$$X_{m,M}([0,T])=\{(\sigma,\boldsymbol{u},\phi)\,|\,(\sigma,\boldsymbol{u})\in C([0,T];H^3(\boldsymbol{R}^3)),\phi^2-1\in C([0,T];L^2(\boldsymbol{R}^3)),\nabla\phi\in C([0,T];H^3(\boldsymbol{R}^3)),\nabla\sigma\in L^2([0,T];H^2(\boldsymbol{R}^3)),\nabla\boldsymbol{u}\in L^2([0,T];H^3(\boldsymbol{R}^3)),\nabla\phi\in L^2([0,T];H^3(\boldsymbol{R}^3)),\sup_{t\in[0,T]}(\|(\sigma,\boldsymbol{u})(t)\|_{H^3}+\|\nabla\phi\|_{H^2}+\|\phi^2-1\|)\leqslant M,\inf_{\substack{x\in\boldsymbol{R}^3\\t\in[0,T]}}\phi^2(x,t)-\frac{1}{3}>m;\inf_{\substack{x\in\boldsymbol{R}^3\\t\in[0,T]}}\rho(x,t)\geqslant m\} \tag{9}$$

由经典的 Schauder 不动点方法得到如下命题。

命题 1 对 $\forall\, M>0,m>0$,若初值$(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\phi_0)$满足条件 $\|(\rho_0-\bar{\rho},\boldsymbol{u}_0)\|_{H^3}^2+\|\nabla\phi_0\|_{H^2}^2+\|\phi_0^2-1\|^2\leqslant M$,$\inf_{x\in\boldsymbol{R}^3}\phi_0^2-\frac{1}{3}>m>0$ 和 $\inf_{x\in\boldsymbol{R}^3}\rho_0(x)>m$,则存在 $T^*>0$,使得方程(1)~(4)存在唯一局部解$(\rho,\boldsymbol{u},\phi)\in X_{\frac{m}{2},2M}([0,T^*])$。

2.2 全局解的存在性

接着,将方程组(1)写成如下的线性化形式。

$$\begin{cases}\sigma_t+\bar{\rho}\mathrm{div}\boldsymbol{u}=g_1\\ u_t-\frac{\nu}{\bar{\rho}}\Delta\boldsymbol{u}-\frac{(\nu+\lambda)}{\bar{\rho}}\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}+\frac{p'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\nabla\sigma+\frac{\varepsilon}{\bar{\rho}}\nabla\phi\Delta\phi=g_2\\ \rho\phi_t+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi=-\mu\\ \rho\mu=\frac{\rho}{\varepsilon}(\phi^3-\phi)-\varepsilon\Delta\phi\end{cases} \tag{10}$$

其中,非齐次项 g_1 和 g_2 的定义为

$$\begin{cases}g_1=-\mathrm{div}(\sigma\boldsymbol{u})\\ g_2=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+h_1(\sigma)\nabla\sigma-h_2(\sigma)(\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\nu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u}-\varepsilon\nabla\phi\Delta\phi)\end{cases}$$

这里 $h_1(\sigma)=\frac{p'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}-\frac{p'(\rho)}{\rho}$,$h_2(\sigma)=\frac{1}{\bar{\rho}}-\frac{1}{\rho}$。

式(10)中第二个式子推导过程中用到

$$\operatorname{div}(\nabla\phi\otimes\nabla\phi)=\nabla\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2}\right)+\nabla\phi\Delta\phi$$

由定义的解空间(9),结合 Sobolev 嵌入定理可知,存在 $M_0>0$,使得 $\forall 0<M<M_0$,有

$$\frac{\bar\rho}{2}\leqslant\rho(x,t)\leqslant 2\bar\rho,\ 3\phi^2-1>m_0=\inf_{x\in\boldsymbol{R}^3}(3\phi_0^2-1)\tag{11}$$

命题 2　假设$(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\phi_0)$满足$(\sigma_0,\boldsymbol{u}_0)\in H^3(\boldsymbol{R}^3)$,$\phi_0^2-1\in L^2(\boldsymbol{R}^3)$,对$\forall T>0$,设$(\sigma,\boldsymbol{u},\phi)\in X_{m,M}([0,T])$为方程组(10)的局部解,则存在一个只依赖于初值和 T 的常数 C,使得

$$\|(\sigma,\boldsymbol{u})\|_{H^3}^2+\|\nabla\phi\|_{H^2}^2+\|\phi^2-1\|^2+\int_0^t(\|\nabla\sigma\|_{H^2}^2+\|(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\phi)\|_{H^3}^2)\mathrm{d}\tau\leqslant C(\|(\sigma_0,\boldsymbol{u}_0)\|_{H^3}^2+\|\nabla\phi_0\|_{H^2}^2+\|\phi_0^2-1\|^2)\tag{12}$$

命题 2 可由以下 4 个引理得到。

引理 1　设$(\sigma,\boldsymbol{u},\phi)\in X_{m,M}([0,T])$为方程组(10)的局部解,有

$$\|(\sigma,\boldsymbol{u},\phi^2-1,\nabla\phi)\|^2+\int_0^t\|(\mu,\nabla\boldsymbol{u},\Delta\phi,\nabla\phi)\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant C\|(\sigma_0,\boldsymbol{u}_0,\phi_0^2-1,\nabla\phi_0)\|^2\tag{13}$$

和

$$\|\phi\|_{L^\infty}\leqslant 1\tag{14}$$

证明:

定义

$$G(\rho)=\rho\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{p(\xi)-p(\bar\rho)}{\xi^2}\mathrm{d}\xi,\rho>0\tag{15}$$

由式(15)和质量守恒方程得到

$\rho G'(\rho)=G(\rho)+(p(\rho)-p(\bar\rho))$,$\rho G''(\rho)=p'(\rho)$,$[G(\rho)]_t+\operatorname{div}(G(\rho)\boldsymbol{u})+(p(\rho)-p(\bar\rho))\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$

用式(1)中第二个式子乘以 $\boldsymbol{u}$,关于空间变量 x 积分,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}^2+G(\rho)\right)\mathrm{d}x+\nu\int|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x+(\nu+\lambda)\int|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x-\varepsilon\int\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi\Delta\phi\mathrm{d}x=0\tag{16}$$

式(10)中第三个式子乘以 μ,结合式(10)中第四个式子,关于 x 积分,利用分部积分得到

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho(\phi^2-1)^2\mathrm{d}x+\int\mu^2\mathrm{d}x=-\varepsilon\int\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi\Delta\phi\mathrm{d}x\tag{17}$$

将式(16)和式(17)相加,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}^2+G(\rho)+\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2+\frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot(\phi^2-1)^2\right)\mathrm{d}x+\nu\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\|\mu\|^2\leqslant 0\tag{18}$$

由式(9)、式(11)、式(15)得到

$$c_{\bar\rho}(\rho-\bar\rho)^2\leqslant G(\rho)\leqslant C_{\bar\rho}(\rho-\bar\rho)^2\tag{19}$$

将式(18)在$[0,T]$上积分,结合式(19)可得

$$\|(\sigma,\boldsymbol{u},\phi^2-1,\nabla\phi)\|^2+\int_0^t\|(\mu,\nabla\boldsymbol{u})\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant CE_0\tag{20}$$

其中,$E_0=\|(\sigma_0,\boldsymbol{u}_0,\phi_0^2-1,\nabla\phi_0)\|^2$。

设 $\Omega_n=[n,n+1)^3$,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,由式(20)可得

$$\int_{\Omega_n}\phi^4\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{\Omega_n}\phi^2\mathrm{d}x+E_0\leqslant\frac{1}{2}\int_{\Omega_n}\phi^4\mathrm{d}x+(2+E_0)$$

于是有

$$\int_{\Omega_n}\phi^4\mathrm{d}x\leqslant 2(2+E_0)$$

因此可得到

$$\int_{\Omega_n}\phi(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\Omega_n}\phi^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant(4+2E_0)^{\frac{1}{4}}\tag{21}$$

利用式(21)得到

$$|\phi(x,t)|\leqslant\left|\int_{\Omega_n}(\phi(x,t)-\phi(y,t))\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{\Omega_n}\phi(y,t)\mathrm{d}y\right|\leqslant C\left(\int_{\Omega_n}|\nabla\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}+(4+2E_0)^{\frac{1}{4}}\tag{22}$$

由式(22)和式(20),得到式(14)。

接着,用式(10)中第四个式子乘以 $-\Delta\phi$,再关于 x 积分,有

$$\varepsilon\|\Delta\phi\|^2+\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int\rho(3\phi^2-1)|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x}_{I_1}=-\int\rho\mu\Delta\phi\mathrm{d}x-\frac{1}{\varepsilon}\int(\phi^2-1)\phi\nabla\phi\cdot\nabla\sigma\mathrm{d}x=:I_2+I_3\tag{23}$$

利用式(9)、式(11)和 Hölder 不等式得

$$I_1\geqslant\frac{\bar\rho m_0}{2\varepsilon}\|\nabla\phi\|^2,I_2\leqslant 2\bar\rho\|\mu\|\|\Delta\phi\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\cdot\|\Delta\phi\|^2+\frac{4\bar\rho^2}{\varepsilon}\|\mu\|^2,I_3\leqslant\|(\phi^2-1)\|_{L^6}\|\phi\nabla\phi\|\|\nabla\sigma\|_{L^3}\leqslant M\|\nabla\phi\|^2$$

将 $I_i(i=1,2,3)$代入式(23),当 M 适当小时,有

$$\varepsilon^2\|\Delta\phi\|^2+\|\nabla\phi\|^2\leqslant\|\mu\|^2 \tag{24}$$

联合式(24)与式(20)得到式(13)，引理 1 得证。

引理 2 设$(\sigma,\boldsymbol{u},\phi)\in X_{m,M}([0,T])$为方程组(10)的局部解，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^2),k=1,2 \tag{25}$$

证明：结合式(10)中第三式和第四式，可以得到

$$\phi_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi-\frac{\varepsilon}{\rho^2}\Delta\phi+\frac{\phi^2-1}{\varepsilon\rho}\phi=0 \tag{26}$$

对式(26)求∇^k，关于空间变量x积分有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\int\frac{\varepsilon}{\rho}|\nabla^k\Delta\phi|^2\mathrm{d}x=\int\nabla^k(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi)\Delta\nabla^k\phi\,\mathrm{d}x-\varepsilon\int\nabla^k\left(\frac{1}{\rho^2}\Delta\phi\right)\Delta\nabla^k\phi\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\varepsilon}\int\nabla^k\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\phi\right)\Delta\nabla^k\phi\mathrm{d}x=:I_4+I_5+I_6 \tag{27}$$

利用莱布尼茨公式、Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，可估计I_4为

$$I_4=\sum_{0\leqslant l\leqslant k}C_k^l\int\nabla^l\boldsymbol{u}\cdot\nabla^{k-l+1}\phi\Delta\nabla^k\phi\mathrm{d}x\leqslant\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\|\nabla^l\boldsymbol{u}\cdot\nabla^{k-l+1}\phi\|\|\nabla^{k+2}\phi\|$$

当$l\leqslant\left[\frac{k+1}{2}\right]$时，有

$$\|\nabla^l\boldsymbol{u}\cdot\nabla^{k-l+1}\phi\|\leqslant\|\nabla^l\boldsymbol{u}\|_{L^3}\|\nabla^{k-l+1}\phi\|_{L^6}\leqslant\|\nabla^\alpha\boldsymbol{u}\|^{1-\frac{l}{k+1}}\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^{\frac{l}{k+1}}\|\nabla\phi\|^{\frac{l}{k+1}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l}{k+1}}\leqslant M\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^{\frac{l}{k+1}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l}{k+1}}\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|+\|\nabla^{k+2}\phi\|)$$

由$\frac{l-1}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l}{k+1}\right)+\left(\frac{k+2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{k+1}$，可确定$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{l}{2(k+1-l)}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$。

当$\left[\frac{k+1}{2}\right]+1\leqslant l\leqslant k$时，有

$$\|\nabla^l\boldsymbol{u}\cdot\nabla^{k-l+1}\phi\|\leqslant\|\nabla^l\boldsymbol{u}\|_{L^6}\|\nabla^{k-l+1}\phi\|_{L^3}\leqslant\|\boldsymbol{u}\|^{1-\frac{l+1}{k+2}}\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^{\frac{l+1}{k+2}}\|\nabla^\alpha\phi\|^{\frac{l+1}{k+2}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l+1}{k+2}}\leqslant M\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^{\frac{l+1}{k+2}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l+1}{k+2}}\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|+\|\nabla^{k+2}\phi\|)$$

由$\frac{k-l}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l+1}{k+2}+\left(\frac{k+2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l+1}{k+2}\right)$，可确定$\alpha=\frac{k+2}{2(l+1)}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。

因此，可得到

$$|I_4|\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2) \tag{28}$$

接下来，对I_5进行估计。

$$I_5=\sum_{1\leqslant l\leqslant k}C_k^l\int\nabla^l\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\nabla^{k-l}\Delta\phi\Delta\nabla^k\phi\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant k}C_k^l\left\|\int\nabla^l\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\nabla^{k-l}\Delta\phi\right\|\|\nabla^{k+2}\phi\|$$

当$1\leqslant l\leqslant\left[\frac{k+1}{2}\right]$时，有

$$\left\|\int\nabla^l\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\nabla^{k-l}\Delta\phi\right\|\leqslant\|\nabla^l\sigma\|_{L^6}\cdot\|\nabla^{k-l+2}\phi\|_{L^3}\leqslant\|\nabla^\alpha\sigma\|^{1-\frac{l-1}{k+1}}\|\nabla^{k+1}\sigma\|^{\frac{l-1}{k+1}}\cdot\|\nabla\phi\|^{\frac{l-1}{k+1}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l-1}{k+1}}\leqslant M\|\nabla^{k+1}\sigma\|^{\frac{l-1}{k+1}}\cdot\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l-1}{k+1}}\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|+\|\nabla^{k+2}\phi\|)$$

由$\frac{l-1}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l-1}{k+1}\right)+\left(\frac{k+1}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l-1}{k+1}$，可确定$\alpha=\frac{3}{2}+\frac{3(l-1)}{2(k+2-l)}\in\left[\frac{3}{2},3\right)$。

当$1+\left[\frac{k+1}{2}\right]\leqslant l\leqslant k$时，有

$$\left\|\int\nabla^l\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\nabla^{k-l}\Delta\phi\right\|\leqslant\|\nabla^l\sigma\|_{L^3}\cdot\|\nabla^{k-l+2}\phi\|_{L^3}\leqslant\|\sigma\|^{1-\frac{l+1}{k+1}}\|\nabla^{k+1}\sigma\|^{\frac{l+1}{k+1}}\|\nabla^\alpha\phi\|^{\frac{l+1}{k+1}}\cdot\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l+1}{k+1}}\leqslant M\|\nabla^{k+1}\sigma\|^{\frac{l+1}{k+1}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l+1}{k+1}}\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|+\|\nabla^{k+2}\phi\|)$$

由$\frac{k-l+1}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l+1}{k+1}+\left(\frac{k+2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l+1}{k+1}\right)$，可确定$\alpha=1+\frac{3(k+1)}{2(l+1)}\in\left[\frac{5}{2},4\right)$。

于是得到

$$|I_5|\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2) \tag{29}$$

最后，估计I_6如下。

$$I_6=\int\frac{\phi^2-1}{\rho}\nabla^k\phi\Delta\nabla^k\phi\,\mathrm{d}x+\sum_{1\leqslant l\leqslant k}C_k^l\int\nabla^l\cdot\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\nabla^{k-1}\phi\Delta\nabla^k\phi\mathrm{d}x=-\int\frac{\phi^2-1}{\rho}|\nabla^{k+1}\phi|^2\mathrm{d}x-\int\nabla\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\nabla^k\phi\nabla^{k+1}\phi\mathrm{d}x+\sum_{1\leqslant l\leqslant k}C_k^l\int\nabla^l\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\cdot\nabla^{k-l}\phi\Delta\nabla^k\phi\mathrm{d}x=:I_6^1+I_6^2+I_6^3$$

逐项估计可得

$$I_6^1\leqslant\|\phi^2-1\|_{L^3}\|\nabla^{k+1}\phi\|\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^6}\leqslant C\|\phi^2-1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\phi^2-1)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla^{k+1}\phi\|\|\nabla^{k+2}\phi\|\leqslant$$

$M(\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2)$

$I_6^2\leqslant\left\|\nabla\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\right\|\|\nabla^k\phi\|_{L^6}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^3}\leqslant C(\|\nabla\sigma\|+\|\nabla\phi\|)\|\nabla^{k+1}\phi\|^{\frac{3}{2}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{\frac{1}{2}}\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2)$

$I_6^3\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant k}C_k^l\left\|\nabla^l\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\nabla^{k-l}\phi\right\|\|\nabla^{k+2}\phi\|$

当 $1\leqslant l\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]$时，有

$\left\|\nabla^l\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\nabla^{k-l}\phi\right\|\leqslant(\|\nabla^l\sigma\|_{L^3}+\|\nabla^l\phi\|_{L^3})\|\nabla^{k-l}\phi\|_{L^6}\leqslant(\|\nabla^\alpha\sigma\|^{1-\frac{l}{k}}\|\nabla^{k+1}\sigma\|^{\frac{l}{k}}+\|\nabla^\alpha\phi\|^{1-\frac{l}{k}}\|\nabla^{k+1}\phi\|^{\frac{l}{k}})\|\nabla\phi\|^{\frac{l}{k}}\|\nabla^{k+1}\phi\|^{1-\frac{l}{k}}\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|+\|\nabla^{k+1}\phi\|)$

由$\frac{l-1}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l}{k}\right)+\left(\frac{k+1}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{k}$，可确定 $\alpha=1-\frac{k}{2(k-l)}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$。

当 $1+\left[\frac{k}{2}\right]\leqslant l\leqslant k$ 时，有

$\left\|\nabla^l\left(\frac{\phi^2-1}{\rho}\right)\nabla^{k-l}\phi\right\|\leqslant(\|\nabla^l\sigma\|_{L^6}+\|\nabla^l\phi\|_{L^6})\|\nabla^{k-l}\phi\|_{L^3}\leqslant(\|\sigma\|^{1-\frac{l+1}{k+1}}\|\nabla^{k+1}\sigma\|^{\frac{l+1}{k+1}}+\|\phi\|^{1-\frac{l+1}{k+1}}\|\nabla^{k+1}\phi\|^{\frac{l+1}{k+1}})\|\nabla^\alpha\phi\|^{\frac{l+1}{k+1}}\|\nabla^{k+1}\phi\|^{1-\frac{l+1}{k+1}}\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|+\|\nabla^{k+1}\phi\|)$

由$\frac{k-l-1}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l+1}{k+1}+\left(\frac{k+1}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l+1}{k+1}\right)$，可确定 $\alpha=\frac{k+1}{2(l+1)}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$。于是得到

$I_6^3\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2)$

由 $I_6^i(i=1,2,3)$的估计可得

$$|I_6|\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2)\tag{30}$$

将式(28)～(30)代入式(27)，得到式(25)，引理 2 得证。

引理 3　设$(\sigma,\boldsymbol{u},\phi)\in X_{m,M}([0,T])$为方程组(10)的局部解，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla^k\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla^k\sigma\|^2)+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2\leqslant M(\|\nabla^k\sigma\|^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|^2),\ k=0,1,2,3\tag{31}$$

证明：对式(10)中第一个式子和第二个式子求 ∇^k，再乘以 $\nabla^k\boldsymbol{u}$，两式相加后，关于空间变量 x 积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla^k\boldsymbol{u}\|^2+\frac{p'(\bar\rho)}{\bar\rho^2}\|\nabla^k\sigma\|^2\right)+\int\left(\frac{\nu}{\bar\rho}|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}|^2+\frac{(\nu+\lambda)}{\bar\rho}|\operatorname{div}\nabla^k\boldsymbol{u}|^2\right)\mathrm{d}x=I_7\tag{32}$$

其中，

$$I_7=\frac{p'(\bar\rho)}{\bar\rho^2}\int\nabla^k\sigma\nabla^k\operatorname{div}(\sigma\boldsymbol{u})\mathrm{d}x-\int\nabla^k[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-h_1(\sigma)\nabla\sigma]\cdot\nabla^k\boldsymbol{u}\mathrm{d}x-\int\nabla^k[h_2(\sigma)(\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\nu+\lambda)\cdot\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u})]\cdot\nabla^k\boldsymbol{u}\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{\bar\rho}\int\nabla^k(\nabla\phi\Delta\phi)\cdot\nabla^k\boldsymbol{u}\mathrm{d}x+\varepsilon\int\nabla^k\cdot(h_2(\sigma)\nabla\phi\Delta\phi)\cdot\nabla^k\boldsymbol{u}\mathrm{d}x=:I_7^1+I_7^2+I_7^3+I_7^4+I_7^5\tag{33}$$

根据文献[9]中的引理 2.1，可以估计 $I_7^i(i=1,2,3)$为

$I_7^i\leqslant M(\|\nabla^k\sigma\|^2+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2),\ i=1,2,3$

下面对 I_7^4 进行估计。

如果 $k=0$，有

$I_7^4\leqslant\|\nabla\phi\|\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{u}\|\leqslant M(\|\nabla\phi\|^2+\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2)$

如果 $k=1$，有

$I_7^4\leqslant\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla^2\phi\|\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|\leqslant M(\|\nabla^2\phi\|^2+\|\nabla^2\boldsymbol{u}\|^2)$

如果 $k\geqslant2$，利用莱布尼茨公式、Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，有

$I_7^4=-\int\nabla^{k-1}(\nabla\phi\Delta\phi)\cdot\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x=\sum_{0\leqslant l\leqslant k-1}C_{k-1}^l\cdot\int\nabla^l\nabla\phi\nabla^{k-l-1}\Delta\phi\cdot\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{0\leqslant l\leqslant k-1}C_{k-1}^l\|\nabla^{l+1}\cdot\phi\nabla^{k-l+1}\phi\|\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|$

当 $l\leqslant\left[\frac{k+1}{2}\right]$时，有

$\|\nabla^{l+1}\phi\nabla^{k-l+1}\phi\|\leqslant\|\nabla^{l+1}\phi\|_{L^3}\|\nabla^{k-l+1}\phi\|_{L^6}\leqslant\|\nabla^\alpha\phi\|^{1-\frac{l-1}{k-1}}\|\nabla^{k+1}\phi\|^{\frac{l-1}{k-1}}\|\nabla^2\phi\|^{\frac{l-1}{k-1}}\|\nabla^{k+1}\cdot\phi\|^{1-\frac{l-1}{k-1}}\leqslant M\|\nabla^{k+1}\phi\|$

由$\frac{l}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l-1}{k-1}\right)+\left(\frac{k+1}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l-1}{k-1}$，可确定 $\alpha=2+\frac{k-1}{2(k-l)}\in(2,3]$。

当 $\left[\frac{k+1}{2}\right]+1\leqslant l\leqslant k-1$ 时，有

$\|\nabla^{l+1}\phi\nabla^{k-l+1}\phi\|\leqslant\|\nabla^{l+1}\phi\|_{L^6}\|\nabla^{k-l+1}\phi\|_{L^3}\leqslant\|\nabla\phi\|^{1-\frac{l+1}{k}}$

$\|\nabla^{k+1}\phi\|^{\frac{l+1}{k}}\|\nabla^\alpha\phi\|^{\frac{l+1}{k}}\|\nabla^{k+1}\phi\|^{1-\frac{l+1}{k}}\leqslant M\|\nabla^{k+1}\phi\|$

由$\frac{k-l}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l+1}{k}+\left(\frac{k+1}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l+1}{k}\right)$,可确定 $\alpha=1+\frac{3k}{2(l+1)}\in[2,4]$。

因此,可得到

$I_7^4\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2)$

同样可以得到

$I_7^5\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2)$

将以上估计代入式(33)有

$$I_7\leqslant M(\|\nabla^k\sigma\|^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2) \tag{34}$$

将式(34)代入式(32),就可以得到式(31),引理 3 得证。

引理 4 设$(\sigma,\boldsymbol{u},\phi)\in X_{m,M}([0,T])$为方程组(10)的局部解,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\nabla^k\boldsymbol{u}\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x+\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla^{k+2}\phi\|^2)+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2,k=0,1,2 \tag{35}$$

证明:式(10)中第二个式子乘以$\nabla^{k+1}\sigma$,关于空间变量 x 积分有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\nabla^k\boldsymbol{u}\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x+\frac{p'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2-\bar{\rho}\int(\mathrm{div}\nabla^k\boldsymbol{u})^2\mathrm{d}x=I_8 \tag{36}$$

其中,

$$I_8=\int\nabla^k\mathrm{div}(\sigma\boldsymbol{u})\mathrm{div}\nabla^k\boldsymbol{u}\mathrm{d}x-\int\nabla^k[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-h_1(\sigma)\nabla\sigma]\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x-\int\nabla^k[h_2(\sigma)(\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\nu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{u})]\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{\bar{\rho}}\int\nabla^k(\nabla\phi\Delta\phi)\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x+\varepsilon\int\nabla^k(h_2(\sigma)\nabla\phi\Delta\phi)\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x=:I_8^1+I_8^2+I_8^3+I_8^4+I_8^5 \tag{37}$$

根据文献[9]中的引理 2.2,可以估计 $I_8^i(i=1,2,3)$为

$I_8^1\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2)$

$I_8^2+I_8^3\leqslant M(\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2+\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^2)$

关于 I_8^4 的估计如下。

如果 $k=0$,有

$I_8^4\leqslant\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla^2\phi\|\|\nabla\sigma\|\leqslant M(\|\nabla^2\phi\|^2+\|\nabla\sigma\|^2)$

如果 $k\geqslant1$,有

$I_8^4=\sum\limits_{0\leqslant l\leqslant k}C_k^l\int\nabla^l\nabla\phi\nabla^{k-l}\Delta\phi\cdot\nabla^{k+1}\sigma\mathrm{d}x\leqslant\sum\limits_{0\leqslant l\leqslant k}C_k^l\cdot\|\nabla^{l+1}\phi\nabla^{k-l+2}\phi\|\|\nabla^{k+1}\sigma\|$

当 $l\leqslant\left[\frac{k+1}{2}\right]$时,有

$\|\nabla^{l+1}\phi\nabla^{k-l+2}\phi\|\leqslant\|\nabla^{l+1}\phi\|_{L^3}\|\nabla^{k-l+2}\phi\|_{L^6}\leqslant\|\nabla^\alpha\phi\|^{1-\frac{l-1}{k-1}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{\frac{l-1}{k-1}}\|\nabla^3\phi\|^{\frac{l-1}{k-1}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l-1}{k-1}}\leqslant M\|\nabla^{k+2}\phi\|$

由$\frac{l}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l-1}{k-1}\right)+\left(\frac{k+2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l-1}{k-1}$,可确定 $\alpha=3-\frac{k-1}{2(k-l)}\in[2,3]$。

当$\left[\frac{k+1}{2}\right]+1\leqslant l\leqslant k$ 时,有

$\|\nabla^{l+1}\phi\nabla^{k-l+2}\phi\|\leqslant\|\nabla^{l+1}\phi\|_{L^6}\|\nabla^{k-l+2}\phi\|_{L^3}\leqslant\|\nabla^2\phi\|^{1-\frac{l}{k}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{\frac{l}{k}}\|\nabla^\alpha\phi\|^{\frac{l}{k}}\|\nabla^{k+2}\phi\|^{1-\frac{l}{k}}\leqslant M\|\nabla^{k+2}\phi\|$

由$\frac{k-l+1}{3}=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{k}+\left(\frac{k+2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{l}{k}\right)$,可确定 $\alpha=2+\frac{k}{2l}\in\left[\frac{5}{2},3\right)$。

因此,

$I_8^4\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2)$

同样可以得到

$I_8^5\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2)$

将以上估计代入式(37),有

$$I_8\leqslant M(\|\nabla^{k+2}\phi\|^2+\|\nabla^{k+1}\sigma\|^2+\|\nabla^{k+2}\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla^{k+1}\boldsymbol{u}\|^2) \tag{38}$$

将式(38)代入式(36),得到式(35),引理 4 得证。结合引理 1 ~ 4,命题 2 得证,进一步定理 1 得证。

3 结束语

本文研究了三维 Navier-Stokes-Allen-Cahn 方程组 Cauchy 问题的适定性。在初值小扰动的假设条件下,克服了由相场 ϕ 产生的强非线性项$\left(\mathrm{div}\left(\nabla\phi\otimes\nabla\phi-\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\boldsymbol{I}\right)\text{和}(1-\phi^2)\phi\right)$给能量估计带来的困难,证明了该方程组全局解的存在唯一性。所得结果可为非混相两相流的模拟计算和实验研究提供必要的理论支撑。

参考文献：

[1] VAN DER WAALS J D. Thermodynamische theorie der kapillarität unter voraussetzung stetiger dichteänderung [J]. Zeitschrift für Physikalische Chemie, 1894, 13(1): 657－725.

[2] BLESGEN T. A generalization of the Navier－Stokes equations to two-phase flows[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 1999, 32(10): 1119－1123.

[3] CHEN M T, GUO X W. Global large solutions for a coupled compressible Navier－Stokes/Allen－Cahn system with initial vacuum[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2017, 37: 350－373.

[4] DING S J, LI Y H, TANG Y. Strong solutions to 1D compressible Navier－Stokes/Allen－Cahn system with free boundary[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42: 4780－4794.

[5] 孙颖, 陈亚洲. 可压缩气液两相流的一维流动分析[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2019, 46(3): 117－122.
SUN Y, CHEN Y Z. The flow for 1D compressible two-phase fluids for an immiscible gas-liquid [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019, 46(3): 117－122. (in Chinese)

[6] CHEN Y Z, HE Q L, HUANG B, et al. Global strong solution to a thermodynamic compressible diffuse interface model with temperature-dependent heat conductivity in 1D [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44: 12945－12962.

[7] FEIREISL E, PETZELTOVÁ H, ROCCA E, et al. Analysis of a phase-field model for two-phase compressible fluids[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2010, 20(7): 1129－1160.

[8] CHEN S M, WEN H Y, ZHU C J. Global existence of weak solution to compressible Navier－Stokes/Allen－Cahn system in three dimensions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 477(2): 1265－1295.

[9] WANG Y J. Decay of the Navier－Stokes－Poisson equations [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 253(1): 273－297.

Well-posedness of the Cauchy problem for compressible Navier－Stokes－Allen－Cahn equations in 3D

WANG Jing　HOU DongJie　CHEN YaZhou*

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: We have studied the Cauchy problem of a compressible immiscible two-phase flow model with a diffuse interface in 3D. The model employed involves coupled Navier－Stokes and Allen－Cahn equations. Under the assumption of small initial perturbations, we prove by energy estimates that there is a global unique strong solution.

Key words: Navier－Stokes－Allen－Cahn (NSAC) equations; existence and uniqueness; immiscible two-phase flow

(责任编辑:吴万玲)