引用格式: 杨卫星,程禹铭. 带有一种新佣金率的拍卖模型[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2020,47(1):118-123.
YANG WeiXing, CHENG YuMing. Auctions with a new commission rate[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2020,47(1):118-123.

带有一种新佣金率的拍卖模型

杨卫星 程禹铭
(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘 要: 提出了一种带有保留价及新的反比佣金率 $c=(1/k)\sqrt{b}$(k 为佣金率系数,b 为成交价)的拍卖模型,这种反比佣金率更加符合实际。首先计算出第一价格拍卖和第二价格拍卖中投标者的均衡投标策略,然后计算出两种拍卖模式中拍卖参与各方的预期收益。结果表明,一级价格密闭式拍卖中投标者的均衡报价关于保留价及佣金率系数均递增,而二级价格密闭式拍卖中投标者的均衡报价关于佣金率系数递增、关于保留价递减。

关键词: 反比佣金率; 保留价; 预期收益
中图分类号: F724.59 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2020.01.019

引 言

经典的拍卖理论研究中,保留价受到了足够的重视[1-3]。代表性的结论如下:Samuelson 等[1]给出了一级价格密封拍卖中卖者的最优保留价满足的必要条件;McAfee 等[2]用更简便的方法得到了与 Samuelson 等[1]相同的结论,而且给出了最优保留价应该满足的充分条件。

相比保留价,拍卖佣金的研究成果并不多。王彦等[4]将佣金率引入传统的一级和二级密封式拍卖中,分析了佣金率对拍卖结果的影响。本课题组[5]进一步将佣金率内生化,研究了一类同时带有保留价和佣金率的密封式拍卖模型,首次在考虑拍卖行的最优佣金率问题基础上,给出了最优佣金率满足的必要条件和充分条件。

冉茂盛等[6]建立了带有佣金率以及保留价的一口价拍卖模型,研究了卖者的最优一口价和最优保留价,并且讨论了拍卖行的最优佣金率问题。本文作者[7]在前期研究中建立了一个带有反比佣金率$c=(1/k)b$ 和保留价的拍卖模型,并求出了投标策略和拍卖参与各方的预期收益;但文献[7]的反比佣金设置过于简单,导致无论是第一价格拍卖还是第二价格拍卖,拍卖行的收入都是常数 $1/k$。

为了克服文献[7]中的不足,本文假设反比佣金率 $c=(1/k)\sqrt{b}$,提出了一种新的反比佣金模型,改善了模型的合理性。同时得出了采用新佣金率时一级价格密闭式拍卖与二级价格密闭式拍卖中投标者的均衡投标策略,并计算出拍卖参与各方的预期收益。

1 模型与分析

假设拍卖行按照佣金率 $c=(1/k)\sqrt{b}$向中标者收取佣金(k 为佣金率系数,b 为成交价);投标者 i 对卖品的估价为 v_i,v_i 独立同分布,分布函数为 $F(v)$,$v\in[0,1]$,并且 $F(0)=0$,$F(1)=1$。

卖方设定保留价 r,保留价的设定使得拍品的成交价不低于 r。可以得到投标策略满足的初始条件为

$$\sqrt{b(v^*)}=\sqrt{v^*+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}$$

$$b(v^*)=\left(\sqrt{v^*+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}\right)^2=v^*-\frac{1}{k}\sqrt{v^*+\frac{1}{4k^2}}+\frac{1}{2k^2} \tag{1}$$

$$v^*=r+\frac{1}{k}\sqrt{r} \tag{2}$$

在一级价格密闭式拍卖中,投标者向拍卖行支付佣金为 cb,净收益为 $v-b(1+c)=v-b-\sqrt{b}/k$,投标者选择报价 b 来最大化其预期收益,公式为

收稿日期: 2019-08-29
第一作者: 女,1978 年生,讲师
E-mail: yangwx@mail.buct.edu.cn

$$\max_b P_r(win|b)[v-b-\sqrt{b}/k] \tag{3}$$

式中 $P_r(win|b)$ 表示报价为 b 的投标者的获胜概率。

在二级价格密闭式拍卖中，投标者向拍卖行支付的佣金为 $cb(Y_1)$，其中 $Y_1=\max\{v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n\}$，净收益为 $v_i-(1+c)b(Y_1)=v_i-b(Y_1)-\sqrt{b(Y_1)}/k$。投标者选择报价 $b(v_i)$ 来最大化其预期收益，公式为

$$\max_b P_r(win|b(v_i))E[v_i-b(Y_1)-\sqrt{b(Y_1)}/k|b(v^*)\leqslant b(Y_1)\leqslant b(v_i)] \tag{4}$$

式中 $P_r(win|b(v_i))$ 表示报价为 $b(v_i)$ 的投标者的获胜概率。

2　均衡投标策略

2.1　一级价格密闭式拍卖

定理 1　考虑带有反比佣金率 $c=(1/k)\sqrt{b}$ 和保留价 r 的一级价格密闭式拍卖模型，则对称的贝叶斯–纳什均衡投标策略为

$$b(v)=\left(\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}\right)^2=v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x-\frac{1}{k}\times\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}+\frac{1}{2k^2},v\geqslant v^* \tag{5}$$

式中 $v^*=r+\sqrt{r}/k$。

证明：首先证明必要性。

若某个投标者的私人估价为 v，报价为 $b(x)$，则其期望收益为

$$\pi(v,b(x))=\left[v-b(x)-\frac{1}{k}\sqrt{b(x)}\right]F^{n-1}(x) \tag{6}$$

式中，由于 $b(\cdot)$ 是单调递增的，所以式(6)在 $x=v$ 时获得极大值，因此当 $x=v$ 时，$\partial\pi/\partial x=0$，即

$$\left.\frac{\partial\pi}{\partial x}\right|_{x=v}=\left[v-b(v)-\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}\right]'F^{n-1}(v)+\left[v-b(v)-\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}\right](F^{n-1}(v))'=0 \tag{7}$$

由式(7)、初始条件 $\sqrt{b(v^*)}=\sqrt{v^*+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}$ 及 $\pi(v^*,b(v^*))=0$ 可得出

$$\sqrt{b(v)}=\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k} \tag{8}$$

从而可得出

$$b(v)=\left(\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}\right)^2=v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x-\frac{1}{k}\times\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}+\frac{1}{2k^2},v\geqslant v^*$$

其次证明充分性。

由式(5)、(7)、(8)可得

$$\pi(v,b(v))=\left[v-b(v)-\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}\right]F^{n-1}(v)=\left[v-\left(\sqrt{b(v)}+\frac{1}{2k}\right)^2+\frac{1}{4k^2}\right]F^{n-1}(v)=\int_{v^*}^{v}F^{n-1}(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\pi(v,b(t))=\left[v-b(t)-\frac{1}{k}\sqrt{b(t)}\right]F^{n-1}(t)=\left[v-\left(\sqrt{b(t)}+\frac{1}{2k}\right)^2+\frac{1}{4k^2}\right]F^{n-1}(t)=(v-t)F^{n-1}(t)+\int_{v^*}^{t}F^{n-1}(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

两式相减得

$$\pi(v,b(v))-\pi(v,b(t))=(t-v)F^{n-1}(t)+\int_t^v F^{n-1}(x)\mathrm{d}x=\int_t^v[F^{n-1}(x)-F^{n-1}(t)]\mathrm{d}x \tag{11}$$

式(11)中，当 $t\neq v$ 时恒大于 0，证明 $b(v)$ 确实是投标者的最佳选择。定理 1 得证。

定理 2　考虑带有反比佣金率 $c=(1/k)\sqrt{b}$ 和保留价 r 的一级价格密闭式拍卖模型，则均衡投标策略关于保留价 r 及佣金率系数 k 均递增。

证明：由式(5)可得

$$\frac{\partial b(v)}{\partial r}=\frac{\partial b}{\partial v^*}\frac{\partial v^*}{\partial r}=\left(1+\frac{1}{2k\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}}\right)\left(1+\frac{1}{2k\sqrt{r}}\right)^2\times\frac{F^{n-1}(v^*)}{F^{n-1}(v)}>0$$

$$\frac{\partial b(v)}{\partial k}=2\left(\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}\right)\times\left[\frac{\frac{F^{n-1}(v^*)}{F^{n-1}(v)}\left(-\frac{1}{k^2}\sqrt{r}\right)-\frac{1}{2k^3}}{2\sqrt{v-\int_{v^*}^{v}\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}}+\frac{1}{2k^2}\right] \tag{12}$$

因为 $\sqrt{b(v)} = \sqrt{v - \int_{v^*}^{v} \frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x + \frac{1}{4k^2}} - \frac{1}{2k} > 0$,只需要研究式(12)中最后一项的正负即可。计算可得

$$\frac{\frac{F^{n-1}(v^*)}{F^{n-1}(v)}\left(-\frac{1}{k^2}\sqrt{r}\right) - \frac{1}{2k^3}}{2\sqrt{v - \int_{v^*}^{v} \frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x + \frac{1}{4k^2}}} + \frac{1}{2k^2} =$$

$$\frac{1}{2k^2} \times \left[1 - \frac{\frac{1}{2k} + \frac{F^{n-1}(v^*)}{F^{n-1}(v)}\sqrt{r}}{\sqrt{v - \int_{v^*}^{v} \frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x + \frac{1}{4k^2}}}\right] = \frac{1}{2k^2} \times$$

$$\frac{\sqrt{b(v)} - \frac{F^{n-1}(v^*)}{F^{n-1}(v)}\sqrt{r}}{\sqrt{v - \int_{v^*}^{v} \frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x + \frac{1}{4k^2}}}$$

又因为 $\sqrt{b(v^*)} = \sqrt{r}$,$b(\cdot)$ 和 $F^{n-1}(\cdot)$ 均为递增函数,所以 $\sqrt{b(v)} > \sqrt{b(v^*)}$ 且 $\frac{F^{n-1}(v^*)}{F^{n-1}(v)} < 1$,所以式(12)大于 0,进而有 $\frac{\partial b(v)}{\partial k} > 0$。

证毕。

定理 2 与实际情况是相符合的,即当保留价 r 增大时,由于均衡报价必须大于保留价,所以均衡报价也增加;当 k 变大时,佣金率 c 变小,因此投标人需要支付的佣金变少,投标人报价会更加积极。

2.2　二级价格密闭式拍卖

定理 3　考虑带有反比佣金率 $c = (1/k)\sqrt{b}$ 和保留价 r 的二级价格密闭式拍卖模型,则对称的贝叶斯–纳什均衡投标策略为

$$b(v) = \left(\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} - \frac{1}{2k}\right)^2 = v - \frac{1}{k}\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} + \frac{1}{2k^2}, v \geqslant v^* \tag{13}$$

式中 $v^* = r + \sqrt{r}/k$。

证明:若某个投标者的私人估价为 v,而报价为 $b(x)$,成交价为 $b(Y_1)$,则其期望收益为

$$\pi(v, b(x)) = E\left[v_i - b(Y_1) - \frac{\sqrt{b(Y_1)}}{k} \mid b(v^*) \leqslant b(Y_1) \leqslant b(v_i)\right] F^{n-1}(x) = \int_{v^*}^{x}\left[v - b(y) - \frac{1}{k} \times \sqrt{b(y)}\right] \mathrm{d}F^{n-1}(y) \tag{14}$$

式中 $b(\cdot)$ 是单调递增的,所以式(14)在 $x = v$ 时获得极大值,且 $\partial\pi/\partial x = 0$,即

$$\left.\frac{\partial \pi}{\partial x}\right|_{x=v} = \left[v - b(v) - \frac{1}{k}\sqrt{b(v)}\right](F(v))' = 0 \tag{15}$$

由式(15)可得出

$$\sqrt{b(v)} = \sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} - \frac{1}{2k} \tag{16}$$

因此均衡投标策略为

$$b(v) = \left(\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} - \frac{1}{2k}\right)^2 = v - \frac{1}{k}\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} + \frac{1}{2k^2}, v \geqslant v^*$$

式(13)即为投标者选择 $b(v)$ 的必要条件。

其次证明充分性。由式(13)~(16)可得

$$\pi(v, b(v)) = \int_{v^*}^{v}\left[v - b(y) - \frac{1}{k}\sqrt{b(y)}\right] \times \mathrm{d}F^{n-1}(y) = \int_{v^*}^{v}(v - y)\mathrm{d}F^{n-1}(y)$$

$$\pi(v, b(t)) = \int_{v^*}^{t}\left[v - b(y) - \frac{1}{k}\sqrt{b(y)}\right] \times \mathrm{d}F^{n-1}(y) = \int_{v^*}^{t}(v - y)\mathrm{d}F^{n-1}(y)$$

$$\pi(v,b(v)) - \pi(v,b(t)) = \int_{v^*}^{v}[v - y]\mathrm{d}F^{n-1}(y) - \int_{v^*}^{t}[v - y]\mathrm{d}F^{n-1}(y) = \int_{t}^{v}[v - y]\mathrm{d}F^{n-1}(y) \tag{17}$$

式(17)中,当 $t \neq v$ 时 $\pi(v, b(v)) - \pi(v, b(t))$ 恒大于 0,证明 $b(v)$ 确实是投标者的最佳选择。

比较定理 1 和定理 3 的结果可以发现,二级价格密闭式拍卖模型中的均衡投标策略大于一级价格密闭式拍卖模型中的均衡投标策略,这意味着投标者在二级价格拍卖中的报价更加积极。

定理 4　考虑带有反比佣金率 $c = \frac{1}{k}\sqrt{b}$ 和保留价 r 的二级价格密闭式拍卖模型,则均衡投标策略关于佣金率系数 k 递增,关于保留价 r 递减。

证明:由式(13)可得

$$\frac{\partial b(v)}{\partial k} = 2\left(\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} - \frac{1}{2k}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}}} \times \left(-\frac{1}{2k^3}\right) + \frac{1}{2k^2}\right] = \frac{1}{k^2}\left(\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}} - \frac{1}{2k}\right) \times \left[1 - \frac{1}{2k\sqrt{v + \frac{1}{4k^2}}}\right]$$

因为 $\sqrt{b(v)}=\sqrt{v+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}>0$，所以 $2k\times\sqrt{v+\frac{1}{4k^2}}>1$，则 $1-\frac{1}{2k\sqrt{v+\frac{1}{4k^2}}}>0$，进而有 $\frac{\partial b(v)}{\partial k}>0$。

假设 $r_1<r_2$，$b(v,r_1,k)$ 与 $b(v,r_2,k)$ 分别为 r_1 与 r_2 对应的均衡投标策略，同时记 $v_1^*=r_1+\frac{1}{k}\sqrt{r_1}$，$v_2^*=r_2+\frac{1}{k}\sqrt{r_2}$。当 $v<v_1^*$ 时，$b(v,r_1,k)=b(v,r_2,k)=0$；当 $v_1^*\leqslant v<v_2^*$ 时，$b(v,r_1,k)=v-\frac{1}{k}\sqrt{v+\frac{1}{4k^2}}+\frac{1}{2k^2}>b(v,r_2,k)=0$；当 $v\geqslant v_2^*$ 时，$b(v,r_1,k)=b(v,r_2,k)=v-\frac{1}{k}\sqrt{v+\frac{1}{4k^2}}+\frac{1}{2k^2}$，所以均衡投标策略关于保留价 r 递减。定理 4 得证。

定理 4 进一步说明，当 k 变小时佣金率 c 变大，当佣金率提高时，为了获取非负收益，投标者必须考虑谨慎报价并降低均衡报价。

3　预期收益

3.1　一级价格密闭式拍卖

从式(6)可知，竞标者的期望支付为 $m(v)=[b(v)+\sqrt{b(v)}/k]F^{n-1}(v)$，其中卖者获得 $b(v)\times F^{n-1}(v)$，拍卖行获得$(\sqrt{b(v)}/k)F^{n-1}(v)$。当拍卖成交时卖方的预期收益为

$$ER_1^{\mathrm{S}}=n\int_{v^*}^1 b(v)F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v=n\int_{v^*}^1\left[v-\int_{v^*}^v\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x-\frac{1}{k}\sqrt{v-\int_{v^*}^v\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x+\frac{1}{4k^2}}+\frac{1}{2k^2}\right]F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v=n\int_{v^*}^1\left[v-\int_{v^*}^v\frac{F^{n-1}(x)}{F^{n-1}(v)}\mathrm{d}x\right]\times F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v-n\int_{v^*}^1\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v=nv^*F^{n-1}(v^*)(1-F(v^*))+n(n-1)\int_{v^*}^1 xF^{n-2}(x)\times(1-F(x))f(x)\mathrm{d}x-n\int_{v^*}^1\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v$$

如果所有投标者的估价均低于 v^*，则流拍；卖方自己保留拍品，其价值为 v_0；发生流拍的概率为 $F^n(v^*)$，流拍时卖者期望收益为 $ER_2^{\mathrm{S}}=v_0F^n(v^*)$。因此，卖方总的预期收益为

$$ER^{\mathrm{S}}=ER_1^{\mathrm{S}}+ER_2^{\mathrm{S}}=v_0F^n(v^*)+nv^*F^{n-1}(v^*)\times(1-F(v^*))+n(n-1)\int_{v^*}^1 xF^{n-2}(x)(1-F(x))\times f(x)\mathrm{d}x-n\int_{v^*}^1\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v\tag{18}$$

同时可以得出拍卖行的预期收益为

$$ER^{\mathrm{H}}=n\int_{v^*}^1\frac{1}{k}\sqrt{b(v)}F^{n-1}(v)f(v)\mathrm{d}v\tag{19}$$

买方的预期收益为

$$\pi(v,b(v))=\int_{v^*}^v F^{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

将式(18)、(19)相加可以得到卖方与拍卖行组成的“卖者共同体”的预期收益为

$$ER^{\mathrm{S}}+ER^{\mathrm{H}}=v_0F^n(v^*)+nv^*F^{n-1}(v^*)(1-F(v^*))+n(n-1)\int_{v^*}^1 xF^{n-2}(x)(1-F(x))f(x)\mathrm{d}x$$

3.2　二级价格密闭式拍卖

从式(14)可知，竞标者的期望支付为$m(v)=\int_{v^*}^v[b(y)+\sqrt{b(y)}/k]\mathrm{d}F^{n-1}(y)$，其中卖方获得 $\int_{v^*}^v b(y)\mathrm{d}F^{n-1}(y)$，拍卖行获得 $\int_{v^*}^v\sqrt{b(y)}/k\mathrm{d}F^{n-1}(y)$。

拍卖成交时，如果只有一个人估价高于 v^*，其他人估价均低于 v^*，则预期收益为

$$ER_0^{\mathrm{S}}=nv^*F^{n-1}(v^*)(1-F(v^*))$$

当至少两个人的估价高于 v^* 时，预期收益为

$$ER_1^{\mathrm{S}}=n\int_{v^*}^1\left[\int_{v^*}^v b(y)\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v=n\int_{v^*}^1\left[\int_{v^*}^v\left(y-\frac{1}{k}\sqrt{b(y)}\right)\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v=n\int_{v^*}^1\left[\int_{v^*}^v y\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v-n\int_{v^*}^1\left[\int_{v^*}^v\frac{1}{k}\times\sqrt{b(y)}\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v=n(n-1)\int_{v^*}^1 yF^{n-2}(y)\times(1-F(y))f(y)\mathrm{d}y-n\int_{v^*}^1\left[\int_{v^*}^v\frac{1}{k}\sqrt{b(y)}\times\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v$$

流拍时卖者期望收益为 $ER_2^{\mathrm{S}}=v_0F^n(v^*)$。

因此卖方总预期收益为

$$ER^{\mathrm{S}}=ER_0^{\mathrm{S}}+ER_1^{\mathrm{S}}+ER_2^{\mathrm{S}}=v_0F^n(v^*)+nv^*\times F^{n-1}(v^*)(1-F(v^*))+n(n-1)\int_{v^*}^1 xF^{n-2}(x)\times$$

$$(1-F(x))f(x)\mathrm{d}x-n\int_{v^*}^{1}\left[\int_{v^*}^{v}\frac{1}{k}\sqrt{b(y)}\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v \tag{20}$$

同时可以求出拍卖行的预期收益为

$$ER^{\mathrm{H}}=n\int_{v^*}^{1}\left[\int_{v^*}^{v}\frac{1}{k}\sqrt{b(y)}\mathrm{d}F^{n-1}(y)\right]f(v)\mathrm{d}v \tag{21}$$

买方的预期收益为

$$\pi(v,b(v))=\int_{v^*}^{v}(v-y)\mathrm{d}F^{n-1}(y)=(v^*-v)\times F^{n-1}(v^*)+\int_{v^*}^{v}F^{n-1}(y)\mathrm{d}y$$

将式(20)与(21)相加可以得到卖方与拍卖行组成的“卖者共同体”的预期收益为

$$ER^{\mathrm{S}}+ER^{\mathrm{H}}=v_0F^n(v^*)+nv^*F^{n-1}(v^*)(1-F(v^*))+n(n-1)\int_{v^*}^{1}xF^{n-2}(x)(1-F(x))f(x)\mathrm{d}x$$

此时“卖者共同体”的预期收益与一级价格密闭式拍卖中相同,即收益等价定理仍然成立。

对本文定理 1 ~4 的正确性作如下实例验证。假设只有两个投标者($n=2$),私人估价 v 服从区间[0,1]上的同一均匀分布,分布函数和密度函数分别为 $F(v)=v$,$f(v)=1$,$v\in[0,1]$。计算结果如表 1 所示。

表 1 实例计算结果

Table 1 Calculating results for examples

指标	一级价格拍卖	二级价格拍卖
投标策略	$\left(\sqrt{\frac{v^2+v^{*2}}{2v}+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}\right)^2$	$\left(\sqrt{v+\frac{1}{4k^2}}-\frac{1}{2k}\right)^2$
卖者共同体收益	$\frac{1}{3}+v^{*2}+v_0v^*-\frac{4}{3}v^{*3}$	$\frac{1}{3}+v^{*2}+v_0v^*-\frac{4}{3}v^{*3}$
投标者收益	$\frac{1}{2}(v^2-v^{*2})$	$\frac{1}{2}(v^2+v^{*2})-v^*v$

表 1 计算结果表明,本文定理 1 ~4 均正确。

4 结论

(1)本文考虑了带有保留价 r 与反比佣金率 $c=(1/k)\sqrt{b}$ 的拍卖模型,弥补了文献[7]中模型的不足,使得带有反比佣金的模型更加符合实际。

(2)一级价格密闭式拍卖中,投标者的均衡报价关于保留价 r 及佣金率系数 k 均递增,而二级价格密闭式拍卖中,投标者的均衡报价关于佣金率系数 k 递增、关于保留价 r 递减。

(3)如果考虑“卖者共同体”的预期收益,其在一级价格密闭式拍卖与二级价格密闭式拍卖中相同,因此,收益等价定理依旧成立。

参考文献:

[1] RILEY J G, SAMUELSON W F. Optimal auctions[J]. American Economic Review, 1981, 71(3): 381-392.

[2] MCAFEE R P, MCMILLAN J. Auctions and bidding[J]. Journal of Economic Literature, 1987, 25(2): 699-738.

[3] MCAFEE R P, MCMILLAN J. Bidding rings[J]. American Economic Review, 1992, 82(3): 579-599.

[4] 王彦, 毕志伟, 李楚霖. 佣金收取对拍卖结果的影响[J]. 管理科学学报, 2004, 7(4): 44-48.
WANG Y, BI Z W, LI C L. Impact on the outcome of the auction commission charged [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(4): 44-48. (in Chinese)

[5] 刘树林, 杨卫星. 第一价格密封拍卖中的最优保留价和最优佣金率研究[J]. 经济研究, 2011, 46(11): 145-156.
LIU S L, YANG W X. Study on optimal reserve price and optimal commission rate of a first-price sealed-bid auction model[J]. Economic Research, 2011,46(11): 145-156. (in Chinese)

[6] 冉茂盛, 黄俊, 李文洲. 考虑佣金率的一口价拍卖模型[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(9): 2276-2283.
RAN M S, HUANG J, LI W Z. Auctions with commission rate and buyout price[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2016, 36(9): 2276-2283. (in Chinese)

[7] 杨卫星. 带有反比佣金率和保留价的拍卖模型研究[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2017, 44(6): 106-110.
YANG W X. Study of an auction model with both a reserve price and an inverse commission rate [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2017, 44(6): 106-110. (in Chinese)

Auctions with a new commission rate

YANG WeiXing　CHENG YuMing

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In real auctions, apart from the seller and buyer, there is always another player—auction house, which earns commissions. This paper reports a sealed-bid auction model with a reserve price r and a new inverse commission rate $c=(1/k)\sqrt{b}$ which can better reflect the actual auction situation. First, we find the equilibrium bidding strategy for both first-price and second-price sealed-bid auctions, and then obtain the expected revenue of the bidder, seller and the auction house. The results indicate that the equilibrium bidding strategy has a positive correlation with both r and k in a first-price sealed-bid auction, whereas it has a positive correlation with k but a negative correlation with r in a second-price sealed-bid auction.

Key words: inverse commission rate; reserve price; expected revenue

(责任编辑:汪　琴)