引用格式:默秋叶,王利. 基于 Haar 小波的非线性随机 Ito－Volterra 积分方程的数值解[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2020,47(1):113－117.
MO QiuYe, WANG Li. Haar wavelets for the numerical solution of nonlinear stochastic Ito－Volterra integral equations[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2020,47(1):113－117.

基于 Haar 小波的非线性随机 Ito－Volterra 积分方程的数值解

默秋叶　王　利*
(北京化工大学 数理学院, 北京　100029)

摘　要: 提出一种非线性随机 Ito－Volterra 积分方程的数值解方法。首先了解 Haar 小波的构造,然后利用 Haar 小波的随机积分算子矩阵将目标方程转化为非线性代数方程,从而得到方程的数值解,最后讨论了目标方法的误差分析。

关键词: 非线性随机 Ito－Volterra 积分方程; Haar 小波; 随机积分算子矩阵
中图分类号: O211.63　　**DOI**: 10.13543/j.bhxbzr.2020.01.018

引　言

随机函数方程在物理、金融、生物等领域的应用逐渐增多,因此对于随机方程的研究非常有必要。由于这类方程的精确解在许多情况下是无法得到的,因此通过一些数值方法来求取近似解是常用且有效的方法。许多学者求解这类方程用不同的函数或多项式,如 block－pulse 函数[1]、泰勒级数[2]、欧拉多项式[3]、伯努利多项式[4]和切比雪夫小波[5-6]等。Fakhrodin[7]研究了利用 Haar 小波求解线性随机 Ito－Volterra 积分方程,但并未给出非线性情况下的数值解。本文在文献[7]基础上,考虑用 Haar 小波来解非线性随机 Ito－Volterra 积分方程,并分析了基于 Haar 小波的数值解和精确解的误差。

1　Haar 小波

1.1　Haar 小波结构

定义 1[7-8]　在支撑域为 $t\in[0,1)$ 的范围内,Haar 函数的定义为

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2}\\[2mm] -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t<1\end{cases}$$

在多分辨率为 2^j 的系统中,Haar 小波构成一组支撑为 $\left[\dfrac{k}{2^j},\dfrac{k+1}{2^j}\right)$的正交小波族

$$h_n(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k),h_0(t)=1$$

式中,$j\geqslant0,0\leqslant k<2^j,n=2^j+k,n,j,k\in\mathbf{Z}$,且有 $\int_0^1 h_i(t)h_j(t)\mathrm{d}t=\delta_{ij}$,其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$为克罗内克函数。

在区间[0,1)上定义的平方可积函数 $f(t)$ 可被 Haar 小波展开为

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f_ih_i(t) \tag{1}$$

式中,$i=2^j+k,j\geqslant0,0\leqslant k<2^j,j,k\in\mathbf{N}$,且有 $f_i=\int_0^1 f(t)h_i(t)\mathrm{d}t$,其中 $i=0,2^j+k,j\geqslant0,0\leqslant k<2^j,j,k\in\mathbf{N}$。

式(1)中的无限序列可被截断为 $m=2^J$(J 为给定的小波分辨率水平),即

$$f(t)\simeq\sum_{i=0}^{m-1}f_ih_i(t) \tag{2}$$

式中,$i=0,2^j+k,0\leqslant j\leqslant J-1,0\leqslant k<2^j$。

收稿日期: 2019-06-27
第一作者: 女,1994 年生,硕士生
*通信联系人
E-mail: 2013016184@mail.buct.edu.cn

式(2)用向量形式可表示为

$$f(t) \simeq \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}(t)$ 分别为 Haar 系数和 Haar 小波向量,且有

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=[f_0(t),f_1(t),\cdots,f_{m-1}(t)]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{H}(t)=[h_0(t),h_1(t),\cdots,h_{m-1}(t)]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{3}$$

令 $k(s,t)\in L^2([0,1)\times[0,1))$,类似地 $k(s,t)$ 可用 Haar 小波展开为

$$k(s,t)\simeq \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{K}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s)$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 是 $m\times m$ 的 Haar 小波系数矩阵,其 i 行 l 列元素为 $k_{il}=\int_0^1\int_0^1 k(s,t)\boldsymbol{H}_i(t)\boldsymbol{H}_l(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$, $i,l=1,2,\cdots,m$。

1.2 block-pulse 函数

定义 2[1,9] 定义 m 个区间的 block-pulse 函数为

$$\begin{cases}\phi_i(t)=\begin{cases}1, & (i-1)h\leqslant t<ih\\ 0, & 其他\end{cases}\\ \phi_j(t)=\begin{cases}1, & (j-1)h\leqslant t<jh\\ 0, & 其他\end{cases}\end{cases} \tag{4}$$

式中,$t\in[0,T)$,$i,j=1,2,\cdots,m$,$h=\dfrac{T}{m}$,并且 $\phi_i(t)$ 和 $\phi_j(t)$ 是不相交的,即

$$\phi_i(t)\phi_j(t)=\delta_{ij}\phi_i(t),i,j=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

式(5)中,$\phi_i(t)$ 和 $\phi_j(t)$ 是正交的,即

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t=h\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,m$$

定义 2 中,若 $m\to\infty$,则 block-pulse 函数集 $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 是完备的,所以任意的 $f\in L^2([0,T))$ 可被 block-pulse 函数序列展开为

$$f(t)\simeq \sum_{i=1}^{m} f_i\phi_i(t)=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}$$

式中

$$\begin{cases}f_i=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^T\phi_i(t)f(t)\mathrm{d}t,\ i=1,2,\cdots,m\\ \boldsymbol{\Phi}(t)=[\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_m(t)]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{F}=[f_1,f_2,\cdots,f_m]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{6}$$

对任意的 m 维列向量 $\boldsymbol{F}$,很容易得到

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}=\widetilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{7}$$

式中,$\widetilde{\boldsymbol{F}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{F})$ 是 $m\times m$ 矩阵。对任意的 $m\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{8}$$

式中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A})$ 为 m 维列向量。

1.3 Haar 小波和 block-pulse 函数关系

令 block-pulse 函数中的 $T=1$,则会得到 Haar 小波和 block-pulse 函数关系。

定义 3[7] 因 $\boldsymbol{H}(t)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 分别为 m 维 Haar 小波向量和 block-pulse 函数向量,相应地,向量 $\boldsymbol{H}(t)$ 可用向量 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示为

$$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Phi}(t),m=2^J$$

式中,$\boldsymbol{Q}$ 为 $m\times m$ 矩阵,其 i 行 l 列元素为

$$Q_{il}=2^{\frac{l}{2}}h_{i-1}\left(\frac{2l-1}{2m}\right)$$

式中 $i,l=1,2,\cdots,m$,$i-1=2^j+k$,$0\leqslant k<2^j$。

由式(7)、(8)和定义 3 很容易得到引理 1。

引理 1[10] 对任意的 m 维列向量 $\boldsymbol{F}$,有

$$\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}=\widetilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{H}(t) \tag{9}$$

式中 $\widetilde{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{Q}\overline{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{Q}^{-1}$ 是 $m\times m$ 矩阵,$\overline{\boldsymbol{F}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})$。对任意的 $m\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}(t)=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t) \tag{10}$$

式中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}$, $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})$。

2 随机积分算子矩阵

与式(6)中 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 有关的积分可表示为[1]

$$\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(s)\mathrm{d}s\simeq \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是 $m\times m$ 维 block-pulse 函数的积分算子矩阵,并且有

$$\boldsymbol{P}=\frac{h}{2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{m\times m}$$

与 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 有关的 Ito 积分可表示为[1]

$$\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(s)\mathrm{d}B(s)\simeq \boldsymbol{P}_s\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{12}$$

式中 $B(s)$ 是布朗运动,$\boldsymbol{P}_s$ 是 block-pulse 函数的随机积分算子矩阵,且有

$$\boldsymbol{P}_s=\begin{bmatrix} B\left(\frac{h}{2}\right) & B(h) & B(h) & \cdots & B(h) \\ 0 & B\left(\frac{3h}{2}\right)-B(h) & B(2h)-B(h) & \cdots & B(2h)-B(h) \\ 0 & 0 & B\left(\frac{5h}{2}\right)-B(2h) & \cdots & B(3h)-B(2h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B\left(\frac{(2m-1)h}{2}\right)-B((m-1)h) \end{bmatrix}_{m\times m}$$

在 block－pulse 函数的积分算子矩阵基础上，利用定义 3 可求得 Haar 小波的算子矩阵。

式(3)中 Haar 小波向量 $\boldsymbol{H}(t)$ 的积分可表示为

$$\int_0^t \boldsymbol{H}(s)\,\mathrm{d}s \simeq \int_0^t \boldsymbol{Q\Phi}(s)\,\mathrm{d}s=\boldsymbol{Q}\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(s)\,\mathrm{d}s \simeq \boldsymbol{QP\Phi}(t)=\boldsymbol{QPQ}^{-1}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{\Lambda H}(t) \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{QPQ}^{-1}$ 为 Haar 小波的积分算子矩阵。

同理，$\boldsymbol{H}(t)$ 的 Ito 积分可以表示为

$$\int_0^t \boldsymbol{H}(s)\,\mathrm{d}B(s)\simeq \boldsymbol{QP}_s\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{\Lambda}_s\boldsymbol{H}(t) \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}_s=\boldsymbol{QP}_s\boldsymbol{Q}^{-1}$ 为 Haar 小波的随机积分算子矩阵。

3　方程的转化和求解

$$X(t)=f(t)+\int_0^t k_1(s,t)N_1(s,X(s))\,\mathrm{d}s+\int_0^t k_2(s,t)\,N_2(s,X(s))\,\mathrm{d}B(s),t\in[0,1] \tag{15}$$

式(15)为非线性随机 Ito－Volterra 积分方程。式中，$X(t)$、$f(t)$、$k_1(s,t)$、$k_2(s,t)$、$N_1(s,X(s))$ 和 $N_2(s,X(s))$ 是定义在概率空间($\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{F},\boldsymbol{P}$)上的随机过程，且 $X(t)$ 未知。

利用 Haar 小波随机积分算子矩阵求解式(15)。首先令

$$\begin{cases} u_1(t)=N_1(t,X(t)) \\ u_2(t)=N_2(t,X(t)) \end{cases} \tag{16}$$

由式(15)和式(16)，可得

$$\begin{cases} u_1(t)=N_1\left(t,f(t)+\int_0^t k_1(s,t)u_1(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t k_2(s,t)u_2(s)\,\mathrm{d}B(s)\right) \\ u_2(t)=N_2\left(t,f(t)+\int_0^t k_1(s,t)u_1(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t k_2(s,t)u_2(s)\,\mathrm{d}B(s)\right) \end{cases} \tag{17}$$

然后将 $X(t)$、$f(t)$、$k_1(s,t)$、$k_2(s,t)$、$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 近似用 Haar 小波向量表示为

$$\begin{cases} X(t)\simeq \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X} \\ f(t)\simeq \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F} \\ k_1(s,t)\simeq \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s) \\ k_2(s,t)\simeq \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s) \\ u_1(t)\simeq \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_1 \\ u_2(t)\simeq \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_2 \end{cases} \tag{18}$$

将式(18)的近似趋近代入式(17)可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_1=N_1\left(t,\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}+\int_0^t \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{U}_1\,\mathrm{d}s+\int_0^t \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{U}_2\,\mathrm{d}B(s)\right) \\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_2=N_2\left(t,\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}+\int_0^t \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{U}_1\,\mathrm{d}s+\int_0^t \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{U}_2\,\mathrm{d}B(s)\right) \end{cases} \tag{19}$$

通过式(8)、(9)、(13)和(14)，式(19)可化为

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_1=N_1(t,\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}+\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)+\widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)) \\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}_2=N_2(t,\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}+\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)+\widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)) \end{cases}$$

式中

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{U}}_1\boldsymbol{\Lambda Q})$$

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{D}_2=\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{U}}_2\boldsymbol{\Lambda}_s\boldsymbol{Q})$$

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_i=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{U}_i)\boldsymbol{Q}^{-1},i=1,2$$

给出 m 个牛顿 cotes 节点 $t_i=\dfrac{2i+1}{2m},i=0,1,\cdots,m-1$，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{U}_1=N_1(t_i,\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{F}+\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t_i)+\\ \qquad \widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t_i))\\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{U}_2=N_2(t_i,\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{F}+\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t_i)+\\ \qquad \widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t_i))\end{cases} \tag{20}$$

式(20)给出了一个有 $2m$ 个代数方程的非线性系统,每个代数方程都有同样数量的未知系数,这样就可以通过牛顿迭代方法得到 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 的分量,进而可得到式(15)的近似解为

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)\simeq\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)+\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)+\widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)$$

即

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\simeq\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\widetilde{\boldsymbol{V}}_1^{\mathrm{T}}+\widetilde{\boldsymbol{V}}_2^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

4　误差分析

对第 3 节得到的目标方程的求解方法进行误差分析。将 $X_m(t)$ 记为由式(21)得到的 $X(t)$ 的近似解,由于函数的精确解未知,所以利用误差估计 $e_m(t)=X(t)-X_m(t)$ 来衡量近似解的优劣,并定义 $\|X(t)\|=\sup|X(t)|$。

定理 1[7]　假设 $f(t)$ 和 $k(s,t)$ 是足够光滑的函数,$\hat{f}(t)$ 和 $\hat{k}(s,t)$ 分别是 $f(t)$ 和 $k(s,t)$ 由 Haar 小波函数得到的近似估计,则 $f(t)$ 与 $\hat{f}(t)$、$k(s,t)$ 与 $\hat{k}(s,t)$ 的误差边界为

$$\begin{cases}\|f(t)-\hat{f}(t)\|=O(m^{-1}), & t\in[0,1]\\ \|k(s,t)-\hat{k}(s,t)\|=O(m^{-1}), & (s,t)\in[0,1]\times[0,1]\end{cases} \tag{22}$$

定理 2　假设 $X(t)$ 和 $X_m(t)$ 分别为式(15)的精确解和由 Haar 小波得出的近似解,给出以下条件:

①$\|X(t)\|\leqslant r, t\in[0,1]$;

②$\|k_i(s,t)\|\leqslant M_i,(s,t)\in[0,1]\times[0,1]$,$i=1,2$;

③Lipschitz 条件

$\|N_i(t,X(t))-N_i(t,X_m(t))\|\leqslant L_i\|X(t)-X_m(t)\|, i=1,2$;

④线性增长条件

$\|N_i(t,X(t))\|\leqslant\widetilde{L}_i(1+\|X(t)\|), i=1,2$;

⑤$L_1(M_1+\lambda_1(m))+\|B(t)\|L_2(M_2+\lambda_2(m))<1$。

从而可以得到

$$\|e_m(t)\|=\|X(t)-X_m(t)\|=O(m^{-1}) \tag{23}$$

式中 $\lambda_i(m)=\widetilde{C}_i\dfrac{1}{m}, i=1,2$,$\widetilde{C}_i$ 为常数。

证明:假设 $u_i(s)$ 和 $\hat{u}_i(s)$ 分别是方程(17)的精确值和近似值,则有

$$\begin{cases}\hat{u}_i(s)=\hat{N}_i(s,X_m(s)), & i=1,2\\ u_i^m(s)=N_i(s,X_m(s)), & i=1,2\end{cases} \tag{24}$$

由条件③和定理 1 可得

$$\|u_i(s)-\hat{u}_i(s)\|\leqslant\|u_i(s)-u_i^m(s)\|+\|u_i^m(s)-\hat{u}_i(s)\|\leqslant L_i\|e_m(s)\|+\beta_i(m)$$

式中,$\beta_i(m)=C_i\dfrac{1}{m}, i=1,2$,$C_i$ 为常数。进而有

$$\begin{cases}X(t)=f(t)+\int_0^t k_1(s,t)u_1(s)\mathrm{d}s+\\ \qquad \int_0^t k_2(s,t)u_2(s)\mathrm{d}B(s)\\ X_m(t)=\hat{f}(t)+\int_0^t \hat{k}_1(s,t)\hat{u}_1(s)\mathrm{d}s+\\ \qquad \int_0^t \hat{k}_2(s,t)\hat{u}_2(s)\mathrm{d}B(s)\end{cases} \tag{25}$$

由式(25)可得

$$\|X(t)-X_m(t)\|\leqslant\|f(t)-\hat{f}(t)\|+\|k_1(s,t)u_1(s)-\hat{k}_1(s,t)\hat{u}_1(s)\|+\|B(t)\|\,\|k_2(s,t)u_2(s)-\hat{k}_2(s,t)\hat{u}_2(s)\| \tag{26}$$

进一步由定理 1 和条件①、②、④可得

$$\|k_i(s,t)u_i(s)-\hat{k}_i(s,t)\hat{u}_i(s)\|\leqslant\|k_i(s,t)\|\,\|u_i(s)-\hat{u}_i(s)\|+\|k_i(s,t)-\hat{k}_i(s,t)\|(\|u_i(s)-\hat{u}_i(s)\|+\|u_i(s)\|)\leqslant(M_i+\lambda_i(m))L_i\|e_m(s)\|+(M_i+\lambda_i(m))\beta_i(m)+\lambda_i(m)\widetilde{L}_i(1+r) \tag{27}$$

由式(26)、(27)和条件⑤可得

$$\|e_m(t)\|=\|X(t)-X_m(t)\|=O(m^{-1})$$

综上,定理 2 得证。

5　结束语

本文利用 Haar 小波的算子矩阵和随机算子矩阵求解非线性随机 Ito-Volterra 方程,得到了数值解方程,然后通过对目标方法的收敛分析和误差分析得出,基于 Haar 小波的非线性随机 Ito-Volterra 积分方程的数值解是非常方便和有效的。

参考文献:

[1]　MALEKNEJAD K, KHODABIN M, ROSTAMI M. Numerical solution of stochastic Volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions[J]. Mathematical & Computer Modelling, 2012, 55(3): 791-800.

[2]　MALEKNEJAD K, AGHAZADEH N. Numerical solution

of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method [J]. Applied Mathematics & Computation, 2005, 161 (3): 915–922.

[3] MIRZAEE F, SAMADYAR N, HOSEINI S F. Euler polynomial solutions of nonlinear stochastic Ito–Volterra integral equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 330: 574–585.

[4] BAZM S. Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 275: 44–60.

[5] BABOLIAN E, FATTAHZADEH F. Numerical computation method in solving integral equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration[J]. Applied Mathematics & Computation, 2007, 188(1): 1016–1022.

[6] BIAZAR J, EBRAHIMI H. Chebyshev wavelets approach for nonlinear systems of Volterra integral equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 63 (3): 608–616.

[7] FAKHRODIN M. Numerical solution of stochastic Ito–Volterra integral equations using Haar wavelets[J]. Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 2016, 9(3): 416–431.

[8] 刘明才. 小波分析及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.
LIU M C. Wavelet analysis and it's applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese)

[9] MOHAMMADI F. A wavelet-based computational method for solving stochastic Itô-Volterra integral equations [J]. Journal of Computational Physics, 2015, 298: 254–265.

[10] LEPIK U. Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations[J]. Applied Mathematics & Computation, 2006, 176(1): 324–333.

Haar wavelets for the numerical solution of nonlinear stochastic Ito–Volterra integral equations

MO QiuYe　WANG Li *

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: This paper introduces a calculation method for solving nonlinear stochastic Ito–Volterra integral equations. Haar wavelets are first introduced, and then the target equation is transformed into a nonlinear algebraic equation by using the Haar wavelets stochastic integration operational matrix, so that the numerical solution of the equation can be obtained. Finally, we provide an error analysis of the proposed method.

Key words: nonlinear stochastic Ito–Volterra integral equations; Haar wavelets; stochastic integration operational matrix

(责任编辑:汪　琴)