引用格式:张志鹏, 涂建华. k-路形式的 König-Egerváry 图[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2019,46(6):108-111.
ZHANG ZhiPeng, TU JianHua. König-Egerváry graphs for k-paths[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019,46(6):108-111.

k-路形式的 König-Egerváry 图

张志鹏 涂建华*
(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘 要:推广了 König-Egerváry 图的概念,提出了 k-路形式的 König-Egerváry 图,证明树是 k-路形式的 König-Egerváry 图;同时研究了单圈图的 k-路形式的 König-Egerváry 性质。

关键词:König-Egerváry 图; k 路形式的 König-Egerváry 图; 树; 单圈图
中图分类号:O157.5 **DOI**:10.13543/j.bhxbzr.2019.06.016

引 言

本文只考虑简单无向图。给定图 $G=(V,E)$ 和子集 $X\subseteq V(G)$,$G[X]$ 表示由 X 所导出的子图。将导出子图 $G[V(G)-X]$ 简记为 $G-X$,对于 $W\subseteq E(G)$,用 $G-W$ 来表示删除 W 中的边后得到的生成子图。C_k 和 P_k 分别表示 k 个顶点的圈和路,并分别称为 k-圈和 k-路。对于一个顶点子集 S,如果 $G[S]$ 不含 k-路,则称 S 为图 G 的一个 k-独立集。图的 k-独立数 $\alpha_k(G)$ 定义为图中最大 k-独立集的阶数,特别地,$\alpha_2(G)$ 正是被广泛研究的独立数,因此 k-独立数是独立数的一个自然推广,3-独立数在文献中往往被称为分离数。图 G 的 k-路匹配是指一个 k-路集合,其中任意两个 k-路之间是点不交的,2-路匹配即为经典的匹配。称 k-路匹配 M_k 的阶数为集合 M_k 中元素的数目,即 M_k 中 k-路的数目,定义图 G 的 k-路匹配数 $\mu_k(G)$ 为最大 k-路匹配的阶数。

给定图 $G=(V,E)$ 和正整数 $k\geqslant 2$,最小顶点覆盖 k-路问题(MVCP_k)是在图 G 中找一个最小顶点子集 F,使得图 G 中的任何一条 k-路都至少有一个顶点在 F 中。如果一个顶点子集 F 是 MVCP_k 的一个可行解,则称 F 为一个顶点覆盖 k-路集合(VCP_k 集),图 G 的顶点覆盖 k-路数 $\tau_k(G)$ 被定义为图中最小 VCP_k 集的阶数。顶点覆盖 k-路问题的提出源于多个实际应用问题,如无线传感器网络加密以及交通摄像头安装问题[1]等,当 k 为 2 时,MVCP_k 正是著名的顶点覆盖问题,因此它是顶点覆盖问题的一个自然的推广。

由 $\alpha_k(G)$ 和 $\mu_k(G)$ 的定义易知,对于一般图 G 和正整数 $k\geqslant 2$,有 $\alpha_k(G)+\mu_k(G)\leqslant |V(G)|$。但根据 König-Egerváry 定理,对于任意的二部图 G,有 $\alpha_2(G)+\mu_2(G)=|V(G)|$。因为二部图的匹配数可以在多项式时间内求出,因此根据 König-Egerváry 定理,二部图的独立数也可以在多项式时间内求出。又因为对任意图都有 $\alpha_k(G)+\tau_k(G)=|V(G)|$,因此对于二部图,顶点覆盖数也能在多项式时间内求出。但 $\alpha_2(G)+\mu_2(G)=|V(G)|$ 并不只在二部图上成立,由此,研究者给出了 König-Egerváry 图的定义[2-3]:一个图 G 如果满足 $\alpha_2(G)+\mu_2(G)=|V(G)|$,则称图 G 为一个 König-Egerváry 图。近几十年来,学者们从禁用子图、算法设计、谱等方面对 König-Egerváry 图作了深入研究[4-7],因此将 König-Egerváry 图的概念进行推广,并对 k-路形式的 König-Egerváry 图进行研究是十分必要的。

本文首先考虑了树,证明树都是 k-路形式的 König-Egerváry 图;其次考虑了单圈图,研究发现并非所有的单圈图都是 k-路形式的 König-Egerváry 图,但这些单圈图都具有一些特定性质。

1 树

本文推广了 König-Egerváry 图的概念,给出了

收稿日期:2019-06-26
第一作者:男,1995 年生,硕士生
*通信联系人
E-mail:tujh81@163.com

如下定义。

定义 1　对于正整数 $k\geqslant 2$，一个图 G 如果满足 $\alpha_k(G)+\mu_k(G)=|V(G)|$，则认为图 G 满足 k-路形式的 König－Egerváry 性质，称它为一个 k-路形式的 König－Egerváry 图。

因为对任意图 G，都有 $\alpha_k(G)+\tau_k(G)=|V(G)|$，所以不难得出，一个图 G 是 k-路形式的 König－Egerváry图当且仅当 $\mu_k(G)=\tau_k(G)$。此处考虑树的情况，证明树都是 k-路形式的 König－Egerváry 图。

定理 1　对于任意的树，T 是 k-路形式的König－Egerváry 图。

证明：对树的顶点数 $|V(T)|$ 进行归纳。

当 $|V(T)|\leqslant k-1$ 时，显然有 $\mu_k(T)=\tau_k(T)=0$，即 T 是 k-路形式的 König－Egerváry 图。

假设 $|V(T)|\leqslant n$ 时 T 是 k-路形式的 König－Egerváry 图，现考虑 $|V(T)|=n+1$ 时的树 T。任选 T 中的一个顶点 r，将 T 变成以 r 为根的根树，对于 T 上每个顶点 v，其层数 $l(v)$ 为 T 中从顶点 r 到顶点 v 的通路长度。

用 T_u 表示以 u 为根的子树，找到包含 k-路且根 u 的层数最大的子树 T_u，这种子树显然存在。易知 $\mu_k(T_u)=1$，且 T_u 上的任意一条 k-路必通过顶点 u，否则与 u 的层数最大相矛盾。

令 $T'=T\backslash T_u$，假设 F 为 T 的一个最小 k-路顶点覆盖集，则 $F\cap V(T_u)\neq\varnothing$，且 $F'=(F\backslash V(T_u))\cup\{u\}$ 也为 T 的最小 k-路顶点覆盖集，$F'\backslash\{u\}$ 为 T' 的一个 k-路顶点覆盖集，因此有 $\tau_k(T')\leqslant\tau_k(T)-1$；另一方面，若 F'' 为 T' 的一个最小 k-路顶点覆盖集，则 $F''\cup\{u\}$ 为 T 的一个最小 k-路顶点覆盖集，因此有 $\tau_k(T)\leqslant\tau_k(T')+1$。综上，有 $\tau_k(T)=\tau_k(T')+1$。

令 M 为 T 的一个 k-路匹配，设 Q 为 T_u 中的一条 k-路，则可通过替换得到一个 k-路匹配 M'，并使得 M' 中含有 Q，此时 $M'\backslash\{Q\}$ 为 T' 的一个 k-路匹配，故有 $\mu_k(T')\geqslant\mu_k(T)-1$；另一方面，如果 M'' 为 T' 的一个 k-路匹配，则 $M''\cup\{Q\}$ 为 T 的一个 k-路匹配，故有 $\mu_k(T)\geqslant\mu_k(T')+1$。由此有 $\mu_k(T)=\mu_k(T')+1$。

由归纳假设可知 T' 是 k-路形式的 König－Egerváry 图，即 $\mu_k(T')=\tau_k(T')$，所以有 $\tau_k(T)=\mu_k(T)$，由此证明任何一个树都是 k-路形式的 König－Egerváry 图。定理 1 得证。

显然，可以很容易地由定理 1 得到推论 1。

推论 1　森林是 k-路形式的 König－Egerváry 图。

2　单圈图

若一个简单连通图 $G=(V,E)$ 满足 $|V(G)|=|E(G)|$，则称图 G 是一个单圈图。对简单图 G，用 $\Omega_k(G)$ 表示集族 $\{S:S$ 是 G 的最大 k-路独立集$\}$，用 $\mathrm{core}_k(G)$ 表示 G 的最大 k-独立集的核，即 G 的所有最大 k-独立集的交集所构成的集合，则有 $\mathrm{core}_k(G)=\cap\{S:S\in\Omega_k(G)\}$。

如果 $\alpha_k(G-e)>\alpha_k(G)$，则称边 e 是 α_k-临界边；如果 $\mu_k(G-e)<\mu_k(G)$，则称 e 是 μ_k-临界边。

下面给出一些关于临界边的结构定理。

引理 1　令 G 是一个图，e 是 G 的一条边，如果 e 是 G 的一条 α_k-临界边，则 $\alpha_k(G-e)=\alpha_k(G)+1$；如果 e 是 G 的一条 μ_k-临界边，则 $\mu_k(G-e)=\mu_k(G)-1$。

证明：(1) 设 e 是 G 的一条 α_k-临界边，F 为 $G-e$ 的一个最大 k-独立集，e 的两个端点为 v 和 w。假设 $v\notin F$ 或 $u\notin F$，易知 F 也是 G 的一个 k-独立集，故有 $\alpha_k(G-e)\leqslant\alpha_k(G)$，这与 e 是 G 的一条 α_k-临界边相矛盾，因此 $v\in F$ 且 $u\in F$；另一方面，因 $F-u$ 是 G 的一个 k-独立集，因此 $\alpha_k(G-e)\leqslant\alpha_k(G)+1$。综上有 $\alpha_k(G-e)=\alpha_k(G)+1$。

(2) 类似地，设 e 是 G 的一条 μ_k-临界边，因为删掉一条边 e 后 $\mu_k(G-e)\geqslant\mu_k(G)-1$；又因为 e 是 μ_k-临界边，由 μ_k-临界边的定义可知，$\mu_k(G-e)\leqslant\mu_k(G)+1$。因此有 $\mu_k(G-e)=\mu_k(G)-1$。引理 1 得证。

引理 2　对任意图 G，$\mathrm{core}_k(G)$ 中没有 α_k-临界边的端点。

证明：令 uv 为 G 的一条 α_k-临界边，F 是 $G-uv$ 的最大 k-独立集。由引理 1 知 $u\in F$ 且 $v\in F$，易知 $F-u$ 和 $F-v$ 都是 G 的最大 k-独立集，因此有 $\mathrm{core}_k(G)\subseteq F\backslash\{u,v\}$，即 $\mathrm{core}_k(G)$ 中没有 α_k-临界边的端点。引理 2 得证。

进一步考虑 n 阶单圈图。

引理 3　若 G 是一个 n 阶单圈图，那么有 $n-1\leqslant\alpha_k(G)+\mu_k(G)\leqslant n$。

证明：记图中的圈为 C，找到一条边 $e=xy\in E(C)$，使得 $G-e$ 是树。由定理 1 知，所有的树都是 k-路形式的 König－Egerváry 图，因此有 $\alpha_k(G-e)+\mu_k(G-e)=n$；又因为 $\alpha_k(G-e)\leqslant\alpha_k(G)+1$ 且

$\mu_k(G-e)\leqslant\mu_k(G)$,所以有 $\alpha_k(G-e)+\mu_k(G-e)\leqslant\alpha_k(G)+\mu_k(G)+1$,即 $n-1\leqslant\alpha_k(G)+\mu_k(G)\leqslant n$。引理 3 得证。

定理 2 若图 G 是 n 阶单圈图,则 $\alpha_3(G)+\mu_3(G)=n-1$ 当且仅当唯一的圈 C 上每条边都是 α_3-临界的。

证明:首先证明必要性。对于任意的 $e\in E(C)$,若 $G-e$ 是树,则有 $\alpha_3(G-e)+\mu_3(G-e)=n$;又因为 $\alpha_3(G)+\mu_3(G)=n-1$ 且 $\mu_3(G-e)\leqslant\mu_3(G)$,所以有 $\alpha_3(G-e)\geqslant\alpha_3(G)+1$。故 e 是 α_3-临界的,从而圈上每条边都是 α_3-临界的。

然后证明充分性。假设圈 C 上每条边都是 α_3-临界的,因为所有 μ_3-临界边都被每个最大 3-路匹配所包含,所以不可能存在一条 4 路,其路上的所有边全是 μ_3-临界的;同理,一个三角形的 3 条边不可能都是 μ_3-临界的。因此存在 $e\in E(C)$,使得

$$\mu_3(G-e)=\mu_3(G) \tag{1}$$

由 $G-e$ 是树,有

$$\alpha_3(G-e)+\mu_3(G-e)=n \tag{2}$$

因为 C 上每条边都是 α_3-临界的,故有

$$\alpha_3(G)+1=\alpha_3(G-e) \tag{3}$$

综合式(1)~(3)可得 $\alpha_3(G)+\mu_3(G)=n-1$。定理 2 得证。

图 G 顶点 $v\in V(G)$ 的邻域是集合 $N(v)=\{w: w\in V(G)\text{且}vw\in E(G)\}$,因此对顶点集 A,其邻域为 $N(A)=\cup\{N(v): v\in A\}$。设 y 为圈 C 的一个顶点,xy 为图的一条不在圈上的边,令 T_x 是 $G-xy$ 中包含顶点 x 的树。

对于不满足 3-路形式 König – Egerváry 性质的单圈图,下文研究它们分离集的核的结构。

推论 2 若 G 是不满足 3-路形式 König – Egerváry 性质的单圈图,那么圈上的点都不在 $\mathrm{core}_3(G)$ 中。

证明:由引理 2 和定理 2 即可得到推论 1。通过推论 1 可知,不满足 3-路形式 König – Egerváry 性质的单圈图,其圈上的顶点不在分离集的核中,因此只需考虑圈以外的顶点。

定理 3 若 G 是不满足 3-路形式 König – Egerváry 性质的单圈图,其中唯一的圈为 $C=(V(C),E(C))$,那么 $\mathrm{core}_3(G)=\cup\{\mathrm{core}_3(T_x): x\in N(V(C))\setminus V(C)\}$。

证明:设 y 为圈 C 的一个顶点,xy 为图的一条不在圈上的边,则 $x\in N(V(C))\setminus V(C)$。设 z 是 y 在圈中的一个邻点,由定理 2 知 yz 是 α_3 临界的,因此存在一个图的最大分离集 $S_y\in\Omega_3(G)$ 使得 $y\in S_y$;同理,存在 $S_{yz}\in\Omega_3(G-yz)$ 使得 $\{y,z\}\subset S_{yz}$。

先给出两个断言,然后通过这两个断言来证明定理 3。

断言 1:每个 T_x 的最大分离集可以扩展到一个 G 的最大分离集。

证明:设 $A\in\Omega_3(T_x)$ 是 T_x 的一个最大分离集,分 $x\notin A$ 和 $x\in A$ 两种情况来讨论。

(1) $x\notin A$

若 $x\notin S_y$,由 $S_y\setminus V(T_x)$ 是 $G-T_x$ 的分离集有 $|S_y\setminus V(T_x)|\leqslant\alpha_3(G-T_x)$。首先证明 $|S_y\setminus V(T_x)|=\alpha_3(G-T_x)$。若 $|S_y\setminus V(T_x)|<\alpha_3(G-T_x)$,设 S_0 为 $G-T_x$ 的一个最大分离集,则 $S_1=S_0\cup(S_y\cap V(T_x))$ 是 G 的分离集,且 $|S_1|>\alpha_3(G)$,这与 S_1 是 G 的分离集相矛盾,因此有 $|S_y\setminus V(T_x)|=\alpha_3(G-T_x)$。其次证明 $W=A\cup(S_y\setminus V(T_x))\in\Omega_3(G)$。因为 $x\notin A$ 且 $x\notin S_y$,因此 W 是 G 的分离集,又因为 $\alpha_3(G)\leqslant\alpha_3(G-T_x)+\alpha_3(T_x)=|S_y\setminus V(T_x)|+|A|$,所以有 $W=A\cup(S_y\setminus V(T_x))\in\Omega_3(G)$。$x\notin A$ 且 $x\notin S_y$ 的情况得证。

若 $x\in S_y$,由 $S_y\cap V(T_x)$ 是 T_x 的分离集,有 $|A|\geqslant|S_y\cap V(T_x)|$;由 $x\notin A$,有 $W=(S_y\setminus(S_y\cap V(T_x)))\cup A$ 是 G 的分离集;又因为 $|W|\geqslant\alpha_3(G)$,所以 W 为 G 的最大分离集,因此有 $A\subseteq W\in\Omega_3(G)$。$x\notin A$ 且 $x\in S_y$ 的情况得证。

情况(1)得证。

(2) $x\in A$

因为 $S_{yz}\cap V(T_x)$ 是 T_x 的分离集,所以有 $|A|\geqslant|S_{yz}\cap V(T_x)|$,由 yz 是 α_3 临界边可得 $\alpha_3(G)=|S_{yz}\setminus\{y\}|$。又因为 $W=(S_{yz}\setminus\{y\}\setminus(S_{yz}\cap V(T_x)))\cup A$ 是一个 G 的分离集,且 $\alpha_3(G)=|S_{yz}\setminus\{y\}|\leqslant|W|$,因此 W 为 G 最大分离集,进而有 $A\subseteq W\in\Omega_3(G)$。

综合情况(1)、(2)可得,每个 T_x 的最大分离集都可以扩展到一个 G 的最大分离集。断言 1 得证。

断言 2:对任意的 $S\in\Omega_3(G)$ 和 $x\in N(V(C))\setminus V(C)$,都有 $S\cap V(T_x)\in\Omega_3(T_x)$。

证明:分 $y\notin S$ 以及 $y\in S$ 两种情况进行讨论。

(1) $y\notin S$

令 $B=S\cap V(T_x)$,用反证法证明 $B\in\Omega_3(T_x)$。假设 $B=S\cap V(T_x)\notin\Omega_3(T_x)$,则存在 $A\in\Omega_3(T_x)$ 使得 $H=(S\setminus B)\cup A$ 为 G 分离集;又因为 $|H|>\alpha_3(G)$,与 $H=(S\setminus B)\cup A$ 为 G 分离集相矛盾,因此

有 $B \in \Omega_3(T_x)$。

(2) $y \in S$

令 $B = S \cap V(T_x)$，易知 $G - T_x$ 为不满足 3-路形式 König – Egerváry 性质的单圈图；又由 $e = yz$ 是 α_3 临界边，有 $\alpha_3(G - T_x - e) = \alpha_3(G - T_x) + 1$，由引理 1 知存在 $G - T_x - e$ 的最大分离集 S'_{yz}，使得 $\{y, z\} \subset S'_{yz}$，易知 $S'_{yz} \backslash \{y\}$ 为 $G - T_x$ 的最大分离集。将 $S \cap V(G - T_x)$ 替换为 $S'_{yz} \backslash \{y\}$，则 $(S'_{yz} \backslash \{y\}) \cup B$ 仍为 G 上分离集；又因为 $|S'_{yz} \backslash \{y\}| \geqslant |S \cap V(G - T_x)|$，所以 $(S'_{yz} \backslash \{y\}) \cup B$ 为 G 最大分离集。

用反证法证明 $B \in \Omega_3(T_x)$。假设 $B \notin \Omega_3(T_x)$，则存在 $A \in \Omega_3(T_x)$ 使得 $(S'_{yz} \backslash \{y\}) \cup A$ 为 G 分离集，因为 $(S'_{yz} \backslash \{y\}) \cup A$ 的阶数大于 $\alpha_3(G)$，这与 $(S'_{yz} \backslash \{y\}) \cup A$ 是 G 的分离集相矛盾，因此 $B \in \Omega_3(T_x)$。

由情况(1)、(2)可知，对任意的 $S \in \Omega_3(G)$ 和 $x \in N(V(C)) \backslash V(C)$，都有 $S \cap V(T_x) \in \Omega_3(T_x)$。断言 2 得证。

由断言 1 和断言 2 有

$\mathrm{core}_3(T_x) = \cap\{A : A \in \Omega_3(T_x)\} = \cap\{S \cap V(T_x) : S \in \Omega_3(G)\} = (\cap\{S : S \in \Omega_3(G)\}) \cap V(T_x) = \mathrm{core}_3(G) \cap V(T_x)$

故有 $\mathrm{core}_3(G) = \cup\{\mathrm{core}_3(T_x) : x \in N(V(C)) \backslash V(C)\}$。

定理 3 得证。

3　结束语

本文提出了 k-路形式的 König – Egerváry 图，并证明了树是 k-路形式的 König – Egerváry 图。进一步考虑了单圈图，并给出了不满足 3-路形式的 König – Egerváry 性质的单圈图的等价条件，以及这些图分离集核的结构。

参考文献：

[1] TU J H, ZHOU W L. A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem[J]. Theoretical Computer Science, 2011, 412(50):7044-7048.

[2] ROBERT W D. Independence numbers of graphs—an extension of the König – Egerváry theorem[J]. Discrete Mathematics, 1979, 27:23-33.

[3] STERBOUL F. A characterization of the graphs in which the transversal number equals the matching number[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1979, 27: 228-229.

[4] BONOMO F, DOURADO M C, DURAN G, et al. Forbidden subgraphs and the König – Egerváry property[J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161:2380-2388.

[5] LARASON C E. The critical independence number and an independence decomposition[J]. European Journal of Combinatorics, 2011, 32: 294-300.

[6] MOSCA R, NOBILI P. Polynomial time recognition of essential graphs having stability number equal to matching number[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31: 1649-1658.

[7] BOURJOLLY J M, PULLEYBLANK W R. König – Egerváry graphs, 2-bicritical graphs and fractional matchings[J]. Discrete Applied Mathematics, 1989, 24:63-82.

König – Egerváry graphs for *k*-paths

ZHANG ZhiPeng　TU JianHua*

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this paper, we introduce a generalization of the König – Egerváry graphs, namely the class of k-König – Egerváry graphs. We proved that any tree is a k-König – Egerváry graph, and studied the k-König – Egerváry property of the unicyclic graphs.

Key words: König – Egerváry graph; k-König – Egervary graph; tree; unicyclic graph

(责任编辑：汪　琴)