引用格式:王暐翼, 童天娇, 陈亚洲. 一维 Navier-Stokes-Cahn-Hilliard 方程组解的适定性分析[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2019,46(6):101-107.
WANG WeiYi, TONG TianJiao, CHEN YaZhou. Well-posedness of solutions for Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system in one dimension[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019,46(6):101-107.

# 一维 Navier-Stokes-Cahn-Hilliard 方程组解的适定性分析

王暐翼　童天娇　陈亚洲*
(北京化工大学 数理学院, 北京　100029)

**摘　要:** 讨论和描述了具有扩散界面的互不相溶气液两相流动的可压缩 Navier-Stokes-Cahn-Hilliard(NSCH)方程组的周期边值问题,NSCH 方程组中采用了 van der Waals 状态方程,该状态方程是关于密度非凸的刻画气液相变的经典模型。通过对压力的单调分解并结合能量估计的方法,克服了状态方程非凸性带来的困难,得到了流体密度的上下界估计;对任意初始值(密度不含真空),证明了该问题的一维流动强解是全局存在且唯一的。结果表明,该气液相变问题不会出现激波和真空现象。

**关键词:** Navier-Stokes-Cahn-Hilliard(NSCH)方程组; van der Waals 状态方程; 气液两相流

**中图分类号:** O29　　**DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2019.06.015

## 引　言

气液两相流广泛存在于化工、海洋、航空、生物等领域的生产过程中,对其进行研究具有重要的理论和应用价值。对于两相流接触界面的刻画可分为两种类型:一类是将接触面当作光滑界面,另一类是将互不相溶的两相流界面看成是有厚度的扩散界面层。本文研究第二种类型。Cahn 等[1] 首先引入界面自由能,提出了著名的 Cahn-Hilliard(CH)方程来描述两种互不相溶流体的界面运动情况;Lowengrub 等[2] 进一步将刻画单一流体流动的 Navier-Stoke(NS)方程与 CH 方程相结合,得到了 Navier-Stokes-Cahn-Hilliard(NSCH)方程组;Abels 等[3] 证明了三维可压缩 NSCH 方程组全局弱解的存在性,但是弱解的唯一性还没有得到解决。此后 Matthias 等[4] 得到了三维 NSCH 方程组的局部强解的存在唯一性;Ding 等[5] 给出了一维情形下可压缩 NSCH 方程组全局强解的存在性;Chen 等[6] 证明了一维带有非光滑自由能密度的可压缩 NSCH 方程组周期边值问题强解的适定性。

然而以上文献在研究 NSCH 方程解的适定性问题时所考虑的压力项 $p$ 采用了理想正压气体模型,即 $p=a\rho^r$($\rho$ 为密度,常数项 $a>0,r>1$)。本文在前人的研究工作的基础上,讨论带有 van der Waals 状态方程的一维黏性可压缩 NSCH 方程组,利用能量积分和压力 $p$ 的特殊结构,克服压力的非凸性及密度上下界估计的困难,来证明对于初始密度不含真空的任意初值的 NSCH 方程组,其强解具有全局存在唯一性。

## 1　模型构造及主要定理

可压缩气液混合两相流流动过程通常由如下的 NSCH 非线性偏微分方程组来描述

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=0\\ \partial_t(\rho\boldsymbol{u})+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})=\mathrm{div}\boldsymbol{T}\\ \partial_t(\rho\chi)+\mathrm{div}(\rho\chi\boldsymbol{u})=\Delta\mu\\ \rho\mu=\dfrac{1}{\varepsilon}\rho\dfrac{\partial f}{\partial\chi}-\varepsilon\Delta\chi\end{cases}\tag{1}$$

式中,$\rho=\rho_1+\rho_2$ 为混合流体的总密度;$\boldsymbol{u}$ 为流体速

收稿日期: 2019-05-19
第一作者: 男,1995 年生,硕士生
* 通信联系人
E-mail: chenyz@mail.buct.edu.cn

度,且有 $\rho\boldsymbol{u}=\rho_1\boldsymbol{u}_1+\rho_2\boldsymbol{u}_2$,$\boldsymbol{u}_i(i=1,2)$ 为第 $i$ 种组分速度;$\chi=\chi_1-\chi_2$ 为两种组分质量浓度差,其中 $\chi_i=M_i/M(i=1,2)$,$M_i$ 为第 $i$ 种组分的质量;$\mu$ 为混合流体的化学势能;常数 $\varepsilon>0$ 为混合流体的界面厚度;$\boldsymbol{T}$ 为应力张量,且满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}-\varepsilon\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\dfrac{|\nabla\chi|^2}{2}\boldsymbol{I}\right)-p\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{S}=\upsilon\left((\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})-\dfrac{2}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}\right)+\eta\mathrm{div}\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}\end{cases}\tag{2}$$

式(2)中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,$\boldsymbol{S}$ 为 Newtonian 黏性张力,$p$ 为压力,常数 $\upsilon>0$、$\eta\geqslant0$ 为黏性系数。

自由能密度函数 $f=f(\rho,\chi)$ 定义如下[7-9]

$$f(\rho,\chi)=-3\rho+\frac{8\Theta}{3}\ln\frac{\rho}{3-\rho}+\frac{1}{4}(\chi^2-1)^2\tag{3}$$

式中 $\Theta$ 为温度。本文考虑式(1)中的一维情形

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0\\ \rho u_t+\rho uu_x+p_x=\upsilon u_{xx}-\dfrac{\varepsilon}{2}(\chi_x^2)_x\\ \rho\chi_t+\rho u\chi_x=\mu_{xx}\\ \mu=\dfrac{1}{\varepsilon}(\chi^3-\chi)-\dfrac{\varepsilon}{\rho}\chi_{xx}\end{cases}\tag{4}$$

式(4)中,$(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$,$u$ 为混合流体在一维情形下的速度。压力 $p$ 满足 van der Waals 状态方程

$$p(\rho)=\begin{cases}\rho^2\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=-3\rho^2+\dfrac{8\Theta\rho}{3-\rho}, & 0\leqslant\rho<3\\ +\infty, & \rho\geqslant3\end{cases}\tag{5}$$

同时有

$$\begin{cases}p'=p/p_{\mathrm{c}}\\ \rho'=\rho/\rho_{\mathrm{c}}\\ \Theta'=\Theta/\Theta_{\mathrm{c}}\end{cases}$$

式中,$p_{\mathrm{c}}$,$\rho_{\mathrm{c}}$,$\Theta_{\mathrm{c}}$ 分别表示临界点处的压力、密度及温度[9]。在不引起混淆的情况下,$p'$,$\rho'$,$\Theta'$ 仍记作 $p$,$\rho$,$\Theta$。

由式(5)知,压力 $p$ 关于参变量 $\rho$ 有以下单调性质:

①当 $\Theta>1$ 时,$p$ 为单调增函数;

②当 $0<\Theta<1$ 时,存在两点 $\alpha,\beta\in(0,3)$,使得 $\rho\in(0,\alpha)\cup(\beta,3)$ 时,$p$ 为单调增函数,$\rho\in(\alpha,\beta)$ 时,$p$ 为单调减函数。

方程组(4)的初值及周期边值条件如式(6)

$$\begin{cases}(\rho,u,\chi)(x,t)=(\rho,u,\chi)(x+L,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\ (\rho,u,\chi)|_{t=0}=(\rho_0,u_0,\chi_0), & x\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{6}$$

定义 $L^2(\mathbb{R})$ 的周期函数空间,有

$L^2_{\mathrm{per}}=\{g|g(x)=g(x+L),x\in\mathbb{R},g(x)\in L^2(0,L)\}$

其范数可表示为

$$\|g\|=\left(\int_0^L|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$H^l_{\mathrm{per}}(l\geqslant0)$ 可定义为

$H^l_{\mathrm{per}}=\{g\in\mathbb{R}|g(x)\in L^2_{\mathrm{per}},\partial^j_x g\in L^2_{\mathrm{per}},j=1,2,\cdots,l\}$

其范数可表示为

$$\|g\|_l=\left(\sum_{j=0}^{l}\|\partial^j_x g\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

假设式(4)的初值满足以下条件

$$\begin{cases}(\rho_0,u_0)\in H^2_{\mathrm{per}},\chi_0\in H^4_{\mathrm{per}},\rho_0\in(0,3)\\ \rho_t(x,0)=-\rho_{0x}u_0-\rho_0u_{0x}\\ u_t(x,0)=\dfrac{\upsilon}{\rho_0}u_{0xx}-u_0u_{0x}-\dfrac{p'_\rho(\rho_0)}{\rho_0}\rho_{0x}-\\ \qquad\dfrac{\varepsilon}{\rho_{0x}}\chi_{0x}\chi_{0xx}\\ \chi_t(x,0)=-u_0\chi_{0x}-\dfrac{\varepsilon\chi_{0xxxx}}{\rho_0^2}+\dfrac{2\varepsilon\rho_{0x}}{\rho_0^3}\chi_{xxx}+\\ \qquad\varepsilon\left(\dfrac{\rho_{0xx}}{\rho_0^3}-\dfrac{2\rho_{0x}^2}{\rho_0^4}\right)\chi_{0xx}+\\ \qquad\dfrac{(3\chi_0^2-1)\chi_{0xx}}{\varepsilon\rho_0}+\dfrac{6\chi_0\chi_{0x}^2}{\varepsilon\rho_0}\end{cases}\tag{7}$$

由式(5)及压力 $p$ 关于参变量 $\rho$ 的单调性质可得:当 $0<\Theta<1$ 时,有 $\exists\zeta\in(0,\alpha)$,使得 $p(\zeta)=p(\beta)$。

设密度常数参数 $\tilde{\rho}$ 满足 $0<\tilde{\rho}<\zeta<3$,定义

$$\Phi(\rho)=\rho\int_{\tilde{\rho}}^{\rho}\frac{p(s)-p(\tilde{\rho})}{s^2}\mathrm{d}s$$

则由式(4)的第一方程可以得到

$$\Phi(\rho)_t+(\Phi(\rho)u)_x+(p(\rho)-p(\tilde{\rho}))u_x=0\tag{8}$$

对于周期边值问题,可将整个空间 $\mathbb{R}$ 看作是 $[0,L]$ 以 $L$ 为周期的扩展,因此只需在 $[0,L]$ 上讨论解的存在性。

**定理 1** 假设 $(\rho_0,u_0,\chi_0)$ 满足条件式(7),则方程组(4)~(6)存在唯一的全局强解 $(\rho,u,\chi)$,使得对任意的 $T>0$,存在常数 $0<\gamma<3$,且满足

$$\begin{cases}\rho\in L^{\infty}(0,T,H^2_{\text{per}})\\ \rho_t\in L^{\infty}(0,T;L^2_{\text{per}})\\ u\in L^{\infty}(0,T;H^2_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^3_{\text{per}})\\ u_t\in L^{\infty}(0,T;L^2_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^1_{\text{per}})\\ \chi\in L^{\infty}(0,T;H^4_{\text{per}})\\ \chi_t\in L^{\infty}(0,T;L^2_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^2_{\text{per}})\\ \mu\in L^{\infty}(0,T;H^2_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^4_{\text{per}})\\ \mu_t\in L^2(0,T;L^2_{\text{per}})\\ 0<\rho\leqslant\gamma<3,\ \text{for all}\ (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]\end{cases}\tag{9}$$

且有

$$\sup_{t\in[0,T]}\{\|(\rho,u)(t)\|_2^2+\|\chi(t)\|_4^2+\|\mu(t)\|_2^2\}+\int_0^T(\|\rho\|_2^2+\|u\|_3^2+\|(\chi,\mu)(t)\|_4^2)\mathrm{d}t\leqslant C\tag{10}$$

式中，$C$ 为只依赖于初值及 $T$ 的正常数。

## 2 主要定理的证明

定理 1 的证明分为两个部分：先证明局部解的存在性，再通过能量方法得到解的一致估计，结合延拓方法得到全局强解的存在性。

证明过程中存在两个难点：一是密度 $\rho$ 的上下界确定，二是压力 $p$ 的非凸性。对于第一个难点，可以利用所得基本能量不等式、压力 $p$ 结构的特殊性以及测度相关知识，通过反证法得到；对于第二个难点，可以根据 $p'_\rho$、$p''_{\rho\rho}$ 具体表达式及 $\rho\leqslant\gamma<3$，求出高阶能量估计。

### 2.1　局部解的存在性

先定义周期解空间，即对 $\forall m>0,M>0,T>0$，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_{\text{per},m,M}([0,T])=\{(\rho,u,\chi)\mid\rho\in C^0([0,T];H^2_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^2_{\text{per}})\\&u\in C^0([0,T];H^2_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^3_{\text{per}})\\&\chi\in C^0([0,T];H^4_{\text{per}})\cap L^2(0,T;H^5_{\text{per}})\\&\inf_{x\in\mathbb{R},t\in[0,T]}\rho(x,t)\geqslant m,\ \sup_{t\in[0,T]}\{\|(\rho,u)\|_2^2,\|\chi\|_4^2\}\leqslant M\}\end{aligned}\tag{11}$$

**命题 1**　对 $\forall m>0,M>0$，若初值满足条件 $\inf_{x\in\mathbb{R}}\rho_0(x,t)\geqslant m$，$\|(\rho_0,u_0)\|_2^2\leqslant M$，$\|\chi_0\|_4^2\leqslant M$，则存在一个小时间 $T^*=T^*(\rho_0,u_0,\chi_0)>0$，使得周期边值问题式(4)～(6)存在唯一解 $(\rho,u,\chi)$，且满足

$$(\rho,u,\chi)\in\boldsymbol{X}_{\text{per},\frac{m}{2},2M}([0,T^*])$$

**证明**：令 $0<T<+\infty$，对任意的 $m>0,M>0$，构造一个可迭代的序列 $(\rho^{(n)},u^{(n)},\chi^{(n)})$，$n=1,2,\cdots$，且满足初始条件 $(\rho^{(0)},u^{(0)},\chi^{(0)})=(\rho_0,u_0,\chi_0)$，利用此可迭代序列构造以下迭代格式

$$\begin{cases}\rho_t^{(n)}+(\rho^{(n)}u^{(n-1)})_x=0\\ \rho^{(n)}u_t^{(n)}+\rho^{(n)}u^{(n-1)}u_x^{(n)}+(p(\rho^{(n)}))_x=\\ \qquad\upsilon u_{xx}^{(n)}-\dfrac{\varepsilon}{2}((\chi^{(n)})_x^2)_x\\ \rho^{(n)}\chi_t^{(n)}+\rho^{(n)}u^{(n-1)}\chi_x^{(n)}=\mu_{xx}^{(n)}\\ \mu^{(n)}=\dfrac{1}{\varepsilon}((\chi^{(n-1)})^3-\chi^{(n-1)})-\dfrac{\varepsilon}{\rho^{(n)}}\chi_{xx}^{(n)}\\ (\rho^{(n)},u^{(n)},\chi^{(n)})(x,t)=(\rho^{(n)},\\ \qquad u^{(n)},\chi^{(n)})(x+L,t)\\ (\rho^{(n)},u^{(n)},\chi^{(n)})(x,0)=(\rho_0,u_0,\chi_0)(x)\end{cases}\tag{12}$$

利用类似文献[6]的迭代方法，可以证明周期边值问题式(4)～(6)解的局部存在性。

### 2.2　全局解的存在性

**命题 2**　假设 $(\rho_0,u_0,\chi_0)$ 满足条件式(7)，对于任意的 $T>0$，设 $(\rho,u,\chi)\in\boldsymbol{X}_{\text{per},m,M}([0,T])$ 为方程组式(4)～(6)的局部解，则存在一个只依赖于初值及 $T$ 的常数 $C$，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\{\|(\rho,u)(t)\|_2^2+\|\chi(t)\|_4^2+\|\mu(t)\|_2^2\}+\int_0^{\mathrm{T}}(\|\rho\|_2^2+\|u\|_3^2+\|(\chi,\mu)(t)\|_4^2)\mathrm{d}t\leqslant C\tag{13}$$

命题 2 的证明可由以下引理 1～4 得到。

**引理 1**　在命题 2 的假设下，对于任意的 $T>0$，都有

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\varepsilon\chi_x^2}{2}+\frac{\rho(\chi^2-1)^2}{4\varepsilon}+\Phi(\rho)\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L(\upsilon u_x^2+\mu_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\tag{14}$$

**证明**：将式(4)第二个方程乘以 $u$，式(4)的第三个方程乘以 $\mu$，相加后关于 $x$ 在 $[0,L]$ 上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\varepsilon\chi_x^2}{2}+\frac{\rho(\chi^2-1)^2}{4\varepsilon}\right)\mathrm{d}x+\int_0^L(\mu_x^2+\upsilon u_x^2+up_x)\mathrm{d}x=0\tag{15}$$

对式(8)在 $[0,L]$ 上积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L\Phi(\rho)\mathrm{d}x=\int_0^L up_x(\rho)\mathrm{d}x\tag{16}$$

将式(16)代入式(15)，再关于 $t$ 在 $[0,T]$ 上积分，得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\varepsilon\chi_x^2}{2}+\frac{\rho(\chi^2-1)^2}{4\varepsilon}+\Phi(\rho)\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L(\upsilon u_x^2+\mu_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant E_0$$

式中

$$E_0=\int_0^L\left(\frac{\rho_0u_0^2}{2}+\frac{\varepsilon\chi_{0x}^2}{2}+\frac{\rho_0(\chi_0^2-1)^2}{4\varepsilon}+\Phi(\rho_0)\right)\mathrm{d}x$$

引理 1 得证。

**引理 2** 在命题 2 的假设下,对任意的 $T>0$,都有

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\chi(x,t)\|_{L^\infty_{\text{per}}}\leqslant C,\ \sup_{t\in[0,T]}\|\rho(x,t)\|_{L^\infty_{\text{per}}}<3 \tag{17}$$

以及

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L\rho\chi^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L\frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^L\chi^2\chi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{18}$$

**证明**:对式(4)第一个方程在$[0,L]\times[0,t]$上积分,得

$$\int_0^L\rho(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^L\rho_0(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

由式(19)及式(14)可得,$\int_0^L\rho\chi^4\mathrm{d}x\leqslant C$,$\int_0^L\rho\chi\mathrm{d}x\leqslant C$,并且有

$$|\chi(x,t)|=\frac{1}{\int_0^L\rho_0\mathrm{d}x}\left|\chi(x,t)\int_0^L\rho(y,t)\mathrm{d}y\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{\int_0^L\rho_0\mathrm{d}x}\left(\left|\int_0^L\rho(y,t)\left(\int_y^x\chi_s(s,t)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_0^L\chi(y,t)\rho(y,t)\mathrm{d}y\right|\right)\leqslant C\int_0^L\chi_x^2\mathrm{d}x+C$$

另外,若$\rho\geqslant3$,则由式(5)可得$p(\rho)=+\infty$,易得$\Phi(\rho)=+\infty$,这与式(14)中$\sup_{t\in[0,L]}\int_0^L\Phi(\rho)\mathrm{d}x\leqslant E_0<+\infty$相矛盾,所以有$\rho<3$,式(17)得证。

将式(4)第三个方程乘以$\chi$,并在$[0,L]\times[0,T]$上积分,得

$$\frac{1}{2}\int_0^L\rho\chi^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_0^L3\chi^2\chi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\varepsilon\int_0^T\int_0^L\frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^L\int_0^L\chi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^L\rho_0\chi_0^2\mathrm{d}x\leqslant C$$

式(18)得证。

**引理 3** 在命题 2 的假设下,对于任意的 $T>0$,都有

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\dfrac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty_{\text{per}}}\leqslant C\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\displaystyle\int_0^L\rho_x^2\mathrm{d}x\leqslant C\\ \rho\leqslant\gamma<3\end{cases} \tag{20}$$

**证明**:对式(4)第一个方程关于 $x$ 求导,再代入式(4)第二个方程,得

$$(\rho u)_t+(\rho u^2)_x+p'(\rho)\rho_x=\upsilon\left[\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)_x+\rho u\left(\frac{1}{\rho}\right)_{xx}\right]-\frac{\varepsilon}{2}(\chi_x^2)_x \tag{21}$$

将式(21)乘以$\frac{\upsilon}{2}\left(\frac{1}{\rho}\right)_x$,并在$[0,L]$上积分,结合式(18)及式(14),并利用文献[7]中$p'(\rho)$正负性处理含$p'(\rho)$项的方法,使用 Gronwall's 不等式可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L\left(\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2+\rho\chi^2+\rho u^2+\chi_x^2+\Phi(\rho)+\rho(\chi^2-1)^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L(u_x+\mu_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{22}$$

由式(22)及积分中值定理可知,$\exists a(t)\in[0,T]$满足$\rho(a(t),t)=\frac{1}{L}\int_0^L\rho_0\mathrm{d}x$,所以有

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\frac{1}{\rho(x,t)}-\frac{1}{\rho(a(t),t)}+\frac{1}{\rho(a(t),t)}\leqslant C\int_0^L\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+C\leqslant C$$

再结合式(22)可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty_{\text{per}}}\leqslant C \tag{23}$$

由式(22)、式(17)及$\Phi(\rho)$的定义,并令$v=\frac{1}{\rho}$,$\tau=\frac{1}{s}$,则有

$$C\geqslant\int_0^L\Phi(\rho)\mathrm{d}x=\int_0^L-\rho\int_{\tilde\rho}^{\rho}(p(s)-p(\tilde\rho))\mathrm{d}\left(\frac{1}{s}\right)\mathrm{d}x=\int_0^L-\frac{1}{v}\int_{\tilde v}^{v}\left(p\left(\frac{1}{\tau}\right)-p\left(\frac{1}{\tilde v}\right)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^L\frac{1}{v}\left(\frac{8\Theta}{3\tilde v-1}-\frac{3}{\tilde v^2}\right)(v-\tilde v)\mathrm{d}x-\int_0^L\frac{1}{v}\int_{\tilde v}^{v}\left(\frac{8\Theta}{3\tau-1}-\frac{3}{\tau^2}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x \tag{24}$$

式(24)中$\tilde v=\frac{1}{\tilde\rho}$为常数,则$\frac{8\Theta}{3\tilde v-1}-\frac{3}{\tilde v^2}$也为常数,则

$$\int_0^L\frac{1}{v}\left(\frac{8\Theta}{3\tilde v-1}-\frac{3}{\tilde v^2}\right)(v-\tilde v)\mathrm{d}x=C-C\int_0^L\frac{1}{v}\mathrm{d}x=C-C\int_0^L\rho\mathrm{d}x=C-C\int_0^L\rho_0\mathrm{d}x=C \tag{25}$$

又$\sup_{t\in[0,L]}\left\|\frac{1}{v}\right\|_{L^\infty_{\text{per}}}<3$,$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L\frac{1}{v^2}\mathrm{d}x<C$,结合式(23)可得$v=\frac{1}{\rho}\in(\frac{1}{3},M]$,并可得到

$$-\int_0^L \frac{1}{v}\int_v^v \left(\frac{8\Theta}{3\tau-1}-\frac{3}{\tau^2}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x = -\frac{8\Theta}{3}\int_0^L \frac{\ln(3v-1)}{v}\mathrm{d}x-\int_0^L \frac{3}{v^2}\mathrm{d}x+C \geqslant C-\frac{8\Theta}{3}\int_0^L \frac{\ln(3v-1)}{v}\mathrm{d}x = C-\frac{8\Theta}{3}\int_{v\in(\frac{1}{3},M]} \frac{\ln(3v-1)}{v}\mathrm{d}x \tag{26}$$

若 $\exists \boldsymbol{m}_0, |\boldsymbol{m}_0|>0$ 使得 $v\to\frac{1}{3}$ 在 $[0,L]\backslash \boldsymbol{m}_0$ 上，则有

$$-\frac{8\Theta}{3}\int_{v\in(\frac{1}{3},M]} \frac{\ln(3v-1)}{v}\mathrm{d}x = -\frac{8\Theta}{3}\int_{[0,L]\backslash m_0} \frac{\ln(3v-1)}{v}\mathrm{d}x-\frac{8\Theta}{3}\int_{m_0} \frac{\ln(3v-1)}{v}\mathrm{d}x = +\infty \tag{27}$$

由式(24)～(27)可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L \Phi(\rho)\mathrm{d}x = +\infty \tag{28}$$

式(28)与 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\int_0^L \Phi(\rho)\mathrm{d}x < +\infty$ 矛盾，即不存在这样的测度大于零的集合 $m_0$ 使得 $v\to\frac{1}{3}$，所以 $\frac{1}{3}<\frac{1}{\gamma}\leqslant v$，即 $\rho\leqslant\gamma<3$。由式(22)有

$$\int_0^L \rho_x^2\mathrm{d}x \leqslant \|\rho\|_{L^\infty_{\mathrm{per}}}^3\int_0^L \rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x \leqslant C$$

引理 3 得证。

**引理 4**　在命题 2 的假设下，对任意的 $T>0$ 都有

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|\chi\|^2_{H^4_{\mathrm{per}}}+\|\chi_t\|^2_{L^2_{\mathrm{per}}})+\int_0^T(\|\chi\|^2_{H^4_{\mathrm{per}}}+\|\chi_t\|^2_{H^2_{\mathrm{per}}})\mathrm{d}t \leqslant C\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}(\|u\|^2_{H^2_{\mathrm{per}}}+\|u_t\|^2_{L^2_{\mathrm{per}}})+\int_0^T(\|u\|^2_{H^3_{\mathrm{per}}}+\|u_t\|^2_{L^1_{\mathrm{per}}})\mathrm{d}t \leqslant C\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}(\|\rho\|^2_{H^2_{\mathrm{per}}}+\|\rho_t\|^2_{L^2_{\mathrm{per}}})+\int_0^T\|\rho\|^2_{H^2_{\mathrm{per}}}\mathrm{d}t \leqslant C\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\|\mu\|^2_{H^2_{\mathrm{per}}}+\int_0^T(\|\mu\|^2_{H^4_{\mathrm{per}}}+\|\mu_t\|^2_{L^2_{\mathrm{per}}})\mathrm{d}t \leqslant C\end{cases} \tag{29}$$

**证明**：由式(18)及式(20)可得

$$\int_0^T\int_0^L \chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \|\rho\|_{L^\infty}\int_0^T\int_0^L \frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \tag{30}$$

对式(4)第四个方程关于 $x$ 求导，再乘以 $\chi_{xxx}$，然后在 $[0,L]\times[0,T]$ 上积分，并由式(14)、(20)得

$$\int_0^T\int_0^L \chi_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\int_0^T\int_0^L \left(\frac{\rho}{\varepsilon}(3\chi^2-1)-\frac{\mu_x\rho}{\varepsilon}+\frac{\chi_{xx}\rho_x}{\rho}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C+C(\varepsilon)\int_0^T\int_0^L \chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\varepsilon\int_0^T\int_0^L \chi_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \tag{31}$$

将式(4)的第二个方程乘以 $u_t$，再在 $[0,L]$ 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^L \rho u_t^2\mathrm{d}x = -\int_0^L \rho u u_x u_t\mathrm{d}x-\int_0^L p'_\rho\rho_x u_t\mathrm{d}x-\varepsilon\int_0^L \chi_x\chi_{xx}u_t\mathrm{d}x \leqslant C\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^L \rho u_t^2\mathrm{d}x+C \tag{32}$$

式中，$p'_\rho = \dfrac{-6\rho^3+36\rho^2-54\rho+24\Theta}{(\rho-3)^2}$。再结合式(20)，$p'_\rho$ 的上下界可以确定。

由式(32)并结合 Gronwall's 不等式，可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L \rho u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \tag{33}$$

将式(4)第三个方程对 $t$ 求导，再乘以 $\chi_t$ 后在 $[0,L]$ 上积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \rho\chi_t^2\mathrm{d}x+\int_0^L \frac{\chi_{xxt}^2}{\rho}\mathrm{d}x = -2\int_0^L \rho u\chi_t\chi_{xt}\mathrm{d}x+\int_0^L \rho_x u^2\chi_t\chi_x\mathrm{d}x+\int_0^L \rho u_x u\chi_x\chi_t\mathrm{d}x-\int_0^L \rho u_t\chi_x\chi_t\mathrm{d}x+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^L (3\chi^2-1)\chi_t\chi_{xxt}\mathrm{d}x-\int_0^L \frac{u_x}{\rho}\chi_{xx}\chi_{xxt}\mathrm{d}x-\int_0^L \frac{\rho_x}{\rho}u\chi_{xx}\chi_{xxt}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\chi_{xxt}^2}{\rho}\mathrm{d}x+C\left(1+\int_0^L (u_x^2+\chi_{xx}^2)\mathrm{d}x\right)\int_0^L \rho\chi_t^2\mathrm{d}x+C\int_0^L (\chi_{xx}^2+\chi_{xxx}^2+u_x^2)\mathrm{d}x\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L \rho u_t^2\mathrm{d}x \tag{34}$$

由式(20)～(22)及式(33)～(34)，利用 Gronwall's 不等式得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L \rho\chi_t^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L \frac{1}{\rho}\chi_{xxt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \tag{35}$$

由式(4)第二个及第三个方程可得

$$\int_0^L \frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x = \int_0^L (\chi^3-\chi)\chi_{xx}\mathrm{d}x-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^L \chi(\rho\chi_t+\rho u\chi_x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_0^L \frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x+C\int_0^L \rho\chi_t^2\mathrm{d}x+C \tag{36}$$

由(35)、(36)得

$$\int_0^L \chi_{xx}^2\mathrm{d}x = \|\rho\|_{L^\infty_{\mathrm{per}}}\int_0^L \frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x \leqslant C \tag{37}$$

将式(4)第三个方程关于 $x$ 求导后乘以 $\mu_{xxx}$ 得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L \chi_{xxx}^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L \mu_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \tag{38}$$

将式(4)第二个方程乘以 $-\frac{1}{\rho}u_{xx}$ 后在 $[0,L]$ 上

积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\upsilon\int_0^L\frac{u_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x=\int_0^L u_{xx}\left(\varepsilon\frac{1}{\rho}\chi_x\chi_{xx}+\frac{\rho_x}{\rho}p'_\rho+uu_x\right)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\upsilon}{4}\int_0^L\frac{u_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x+C\|\chi_x\|_{L^\infty}\int_0^L\frac{\chi_{xx}^2}{\rho}\mathrm{d}x+\int_0^L(p'_\rho)^2\frac{\rho_x^2}{\rho}\mathrm{d}x+\left(\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^L u_{xx}^2\mathrm{d}x\right)\int_0^L\rho u^2\mathrm{d}x \tag{39}$$

结合式(39)和 Gronwall's 不等式及$(p'_\rho)^2$在式(20)条件下的有界性,可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{40}$$

则由式(4)第一个方程可得

$$\int_0^L\rho_t^2\mathrm{d}x=\int_0^L(\rho_x u+\rho u_x)^2\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}\int_0^L\rho_x^2\mathrm{d}x+\|\rho\|_{L^\infty}^2\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x\leqslant C \tag{41}$$

将式(4)第二个方程关于 $t$ 求导,等式两边同乘 $u_t$ 后在$[0,L]$上积分,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L\rho u_t^2\mathrm{d}x+\upsilon\int_0^L u_{xt}^2\mathrm{d}x=\int_0^L p'_\rho\rho_t u_{xt}\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^L\chi_{xt}\chi_x u_{xt}\mathrm{d}x-\int_0^L\rho u_t^2u_x\mathrm{d}x-2\int_0^L\rho uu_{xt}u_t\mathrm{d}x-\int_0^L\rho_t uu_xu_t\mathrm{d}x\leqslant(C\|u_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2}+2)\int_0^L\rho u_t^2\mathrm{d}x+(C+2\|\rho\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\rho_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}+\varepsilon)\int_0^L u_{tx}^2\mathrm{d}x+\left(C+\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}\right)\int_0^L\rho_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon\|\chi_x\|_{L^2}\|\chi_{xx}\|_{L^2}\int_0^L\chi_{xt}^2\mathrm{d}x$$

由 Gronwall's 不等式及式(20)~(41)得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L u_t\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L u_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{42}$$

将式(4)第二个方程对 $x$ 求导,得

$$\rho_xu_t+\rho u_{xt}+\rho_xuu_x+\rho uu_x+\rho u_x^2+\rho uu_{xx}+p''_{\rho\rho}(\rho_x)^2+p'_\rho\rho_{xx}=\upsilon u_{xxx}-\varepsilon\chi_{xx}^2-\varepsilon\chi_x\chi_{xxx} \tag{43}$$

式(43)中,$p''_{\rho\rho}=\dfrac{-6\rho^3+54\rho^2-162\rho-48\Theta+162}{(\rho-3)^3}$。

将式(21)对 $x$ 求导,得

$$(\rho u)_{tx}+(\rho u^2)_{xx}+p''_{\rho\rho}(\rho_x)^2+p'_\rho\rho_{xx}=\upsilon\rho_x\left(\frac{1}{\rho}\right)_{xt}+\upsilon\rho\left(\frac{1}{\rho}\right)_{xxt}+\upsilon(\rho u)_x\left(\frac{1}{\rho}\right)_{xx}+\upsilon(\rho u)\left(\frac{1}{\rho}\right)_{xxx}-\frac{\varepsilon}{2}(\chi_x^2)_{xx} \tag{44}$$

将式(44)乘以$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)_{xx}$、式(43)乘以$-\frac{u_{xxx}}{\rho}$,再对两式关于 $x$ 在$[0,L]$上积分,可得

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in[0,T]}\int_0^L\rho_{xx}^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L\rho_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\int_0^L u_{xx}^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^L u_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\end{cases} \tag{45}$$

由式(20)可以得到 $p''_{\rho\rho}$ 的上下界,由式(4)第三个方程可得

$$\int_0^L\mu_{xx}^2\mathrm{d}x=\int_0^L(\rho\chi_t+\rho u\chi_x)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^L(\rho^2\chi_t^2+\rho^2u^2\chi_x^2)\mathrm{d}x\leqslant C \tag{46}$$

将式(4)第四个方程关于 $t$ 求导,利用式(31)、(34)及式(4)第一个方程可得

$$\int_0^T\int_0^L\mu_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^L\left(\frac{1}{\varepsilon}(\chi^3-\chi)_t-\frac{\varepsilon}{\rho}\chi_{txx}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{47}$$

将式(4)第四个方程关于 $x$ 求二次导,可得

$$\mu_{xx}=\frac{6}{\varepsilon}\chi\chi_x^2+\frac{3\chi^2-1}{\varepsilon}\chi_{xx}-\varepsilon\chi_{xxxx}\frac{1}{\rho}+2\varepsilon\chi_{xxx}\frac{\rho_x}{\rho^2}+\varepsilon\chi_{xx}\frac{\rho_{xx}}{\rho^2}-\frac{2\varepsilon\chi_{xx}\rho_x^2}{\rho^3} \tag{48}$$

将式(48)两边平方后关于 $x$ 在$[0,L]$上积分,得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^L\chi_{xxxx}^2\mathrm{d}x\leqslant C \tag{49}$$

将式(3)两边关于 $x$ 求二次导,两边平方后在$[0,L]\times[0,T]$上积分,可得

$$\int_0^T\int_0^L\mu_{xxxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{50}$$

由式(31)、(33)、(35)及式(37)~(50),可得式(29),引理 4 得证。结合引理 1~3,命题 2 得证,进一步定理 1 得证。

## 3 结论

本文研究一类非凸压力状态方程的气-液两相流,即带有 van der Waals 状态方程的 NSCH 方程组解的适定性。在初值密度不含真空时,利用测度论及能量方法得出,混合流体总密度有严格小于 3 的上界及大于 0 的下界,即不会出现真空,最终证明了该方程组全局强解的存在唯一性。通过嵌入定理可推出该问题的解是连续的,即密度和速度不会出现间断,因此不会出现激波现象。

## 参考文献：


[1] CAHN J W, HILLIARD J E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy[J]. J Chem Phys, 1958, 28: 258-267.

[2] LOWENGRUB J, TRUSKINOVSKY L. Quasi-incompressible Cahn-Hilliard fluids and topological transitions[J]. Proceeding of the Royal Society A: Math Phys Eng Sci, 1998,454: 2617-2654.

[3] ABELS H, FEIREISL H. On a diffuse interface model for a two-phase flow of compressible viscous fluids[J]. Indiana Univ Math J, 2008, 57: 659-698.

[4] MATTHIAS K, ZACHER R. Strong solutions in the dynamical theory of compressible fluid mixtures[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2015, 25(7): 1217-1256.

[5] DING S J, LI Y H. Well-posedness for 1D compressible Navier-Stokes/Cahn-Hilliard systems[J/OL]. [2019-04-28]. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download; jsessionid = 73887F56917DA408450F89A2D3202EAC? doi=10.1.1.723.5609&rep=rep1&type=pdf.

[6] CHEN Y Z, HE Q L, MEI M, et al. Asymptotic stability of solutions for 1-D compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 467: 185-206.

[7] HE Q L, MEI M, SHI X D, et al. Global solution for gas-liquid flow of 1-D van der Waals equation of state with large initial datas[J/OL]. [2019-05-01]. https://arxiv.org/pdf/1810.00291.pdf.

[8] HE Q L, LIU C, SHI X D. Numerical study of phase transition in van der Waals fluids[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2018,23: 4519-4540.

[9] HSIEH D Y, WANG X P. Phase transition in van der Waals fluids[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, 57(4): 871-892.


# Well-posedness of solutions for Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system in one dimension


WANG WeiYi TONG TianJiao CHEN YaZhou *

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)



**Abstract**: This paper is concerned with a diffusive interface model for immiscible gas-liquid binary fluids. The periodic boundary value problem for a compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard equation is discussed, and the van der Waals equation of state, which is non-convex for density and is the classical model for gas-liquid phase transition, is employed. In addition, we make use of the monotonic decomposition of pressure combined with the energy estimation method to overcome the difficulty caused by the non-convexity of the state equation, and the upper and lower bounds of the density are obtained. For any initial value (density without vacuum), the global existence and uniqueness of strong solutions is thus proved. The results indicate that there is no shock or vacuum phenomenon in the gas-liquid phase change problem.



**Key words**: Navier-Stokes-Cahn-Hilliard (NSCH) equations; van der Waals equation of state; gas-liquid flow

（责任编辑：汪　琴）