引用格式:赵梅,兰光强. 随机时滞微分方程的随机线性 θ 方法的均方指数稳定性[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2019,46(5):118-122.

ZHAO Mei, LAN GuangQiang. Mean square exponential stability of the stochastic linear theta method for stochastic delay differential equations[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019, 46(5): 118-122.

随机时滞微分方程的随机线性 θ 方法的均方指数稳定性

赵　梅　兰光强*

(北京化工大学 理学院, 北京　100029)

摘　要:给出了随机时滞微分方程随机线性 θ 方法的均方指数稳定性的充分条件,证明了当扩散系数高度非线性(即不满足线性增长条件)时,随机线性 θ 方法仍可能均方指数稳定。本文研究结果在相同条件下加强了 Huang 在文献[5]中关于随机线性 θ 方法稳定性的结果。

关键词:随机时滞微分方程;随机线性 θ 方法;均方指数稳定性

中图分类号:O211.6　　**DOI**:10.13543/j.bhxbzr.2019.05.018

引　言

随机时滞微分方程可用于刻画有重要应用并与时间相关,且依赖于过去状态的过程。近年来,关于这类方程数值解稳定性的研究取得了很大进展。Higham[1]研究了线性随机微分方程对应的随机 θ 方法的渐近稳定性;Zong 等[2]研究了非线性方程对应的随机 θ 方法的均方指数稳定性;Wu 等[3]得到了中立型随机时滞微分方程相应数值解的指数稳定性;Lan 等[4]得到了带马氏切换的中立型随机时滞微分方程的数值解指数稳定的充分条件。当扩散系数不满足线性增长条件时,Huang[5]通过研究随机线性 θ 方法平凡解的渐近稳定性,证明了特定条件下随机线性 $\theta(1/2\leqslant\theta\leqslant1)$ 方法的均方渐近稳定性,但是并没有给出收敛速度。

本文研究当扩散系数高度非线性时随机线性 θ 方法的均方指数稳定性,在给出随机时滞微分方程的随机线性 θ 方法和两种稳定性定义的基础上,证明了给定条件下随机线性 θ 方法的均方指数稳定性(从而几乎处处指数稳定),完善了文献[5]中的结论。

1　基本假设和定义

对于一个抽象的全集 Ω,$\mathscr{F}$是 Ω 的子集类,P 表示概率测度,令$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0},P)$是一个完全概率空间,$\sigma$ 代数流$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0}$满足基本条件(即单增、右连续且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有零测集)。定义期望 E 为 Ω 上随机变量关于 P 的积分。$W(t)$是定义在概率空间上的标准布朗运动。

考虑以下形式的随机时滞微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}y(t)=f(t,y(t),y(t-\tau))\mathrm{d}t+\\ \qquad g(t,y(t),y(t-\tau))\mathrm{d}W(t), & t\geqslant0\\ y(t)=\phi(t), & t\in[-\tau,0]\end{cases}$$

式中,$y(t)$、$f(t,x,y)$、$g(t,x,y)$是定义在相同概率空间上的随机变量,$y(t)$是未知函数,$t\in[0,T]$;τ 是正常数;$\phi(t)$ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的,且满足 $\sup\limits_{-\tau\leqslant t\leqslant0}E|\phi(t)|^2<\infty$。

考虑随机线性 θ 方法(SLT 方法),即划分格子点 $0=t_0<t_1<t_2\cdots<t_n<T$,$t_n=n\Delta$,$\Delta$ 为步长。考虑

收稿日期:2019-05-21

基金项目:国家自然科学基金(11601025);北京市自然科学基金(1192013)

第一作者:女,1995年生,硕士生

*通信联系人

E-mail:langq@mail.buct.edu.cn

随机线性 θ 方法的数值迭代格式如下

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\theta\Delta f(t_{n+1},y_{n+1},\bar{y}_{n+1})+ \\ \quad (1-\theta)\Delta f(t_n,y_n,\bar{y}_n)+g(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta W_n, & n\geqslant 0 \\ y_n=\phi(t_n), & n\leqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中，y_{n+1} 是 $y(t_{n+1})$ 的近似值，$\bar{y}_n$ 是 $y(t_n-\tau)$ 的近似值，$\Delta>0,\theta\in[0,1]$，$\Delta W_n=W(t_{n+1})-W(t_n)$。

对于 τ，存在正整数 m 和 $\delta(0<\delta\leqslant 1)$，使得 $\tau=(m-\delta)\Delta$，所以式(1)中的 $\bar{y}_n$ 可以线性表示为 $\bar{y}_n=(1-\delta)y_{n-m}+\delta y_{n-m+1}$。显然当 $\delta=0$ 时，随机线性 θ 方法回归为普通随机 θ 方法，该方法是随机 θ 方法的一个推广。

注意到当 $\theta>0$ 时式(1)是隐式方法，为使式(1)有定义，通常需要使系数 f 满足特定条件(如单边 Lipschitz 条件)。

定义 1　对于式(1)中的随机线性 θ 方法 y_n，若存在 $\Delta>0$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\dfrac{\lg E(|y_n|^2)}{k\Delta}<0$，则称 y_n 是均方指数稳定的。

定义 2　对于式(1)中的随机线性 θ 方法 y_n，若存在 $\Delta>0$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}E(|y_n|^2)=0$，则称 y_n 是渐近均方稳定的。

2　主要结果和证明

定理 1　假定式(1)有定义，若系数 f、g 满足

$$2\langle u,f(t,u,v)\rangle+|g(t,u,v)|^2\leqslant -C_1|u|^2+C_2|v|^2,\ C_1>C_2>0 \tag{2}$$

则当 $\frac{1}{2}<\theta\leqslant 1$ 时，随机线性 θ 方法是均方指数稳定的。

证明：定理 1 的证明分 5 步进行。

① 方程(1)可变换为

$$y_{n+1}-\theta\Delta f(t_{n+1},y_{n+1},\bar{y}_{n+1})=y_n-\theta\Delta f(t_n,y_n,\bar{y}_n)+f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta+g(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta W_n$$

令 $F_n=y_n-\theta\Delta f(t_n,y_n,\bar{y}_n)$，则有

$$|F_{n+1}|^2=|F_n|^2+|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta+g(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta W_n|^2+2\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta,F_n\rangle+2\langle g(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta W_n,F_n\rangle=|F_n|^2+|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta^2+|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta+2\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta,y_n\rangle-2\theta|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta^2+M_n=|F_n|^2+(1-2\theta)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta^2+|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta+2\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta,y_n\rangle+M_n=|F_n|^2+((1-2\theta)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta+|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2+2\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n),y_n\rangle)\Delta+M_n \tag{3}$$

式(3)中，$M_n=|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\ |\Delta W_n|^2-|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta+2\langle g(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta W_n,F_n\rangle+2\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta,g(t_n,y_n,\bar{y}_n)\Delta W_n\rangle$ 为鞅，鞅取期望为 0。

② 证明存在 $0<C<C_1$，使得

$$(1-2\theta)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta+|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2+2\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n),y_n\rangle\leqslant -C|F_n|^2+C_2|\bar{y}_n|^2 \tag{4}$$

事实上，有

$$(2\theta-1)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta-C|F_n|^2=(2\theta-1)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta-C(|y_n|^2+|\theta\Delta f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2-2\langle\theta\Delta f(t_n,y_n,\bar{y}_n),y_n\rangle)=[(2\theta-1)\Delta-C\theta^2\Delta^2]|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2+2C\theta\Delta\langle f(t_n,y_n,\bar{y}_n),y_n\rangle-C|y_n|^2=a|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)+by_n|^2-(ab^2+C)|y_n|^2 \tag{5}$$

式(5)中，$a=(2\theta-1)\Delta-C\theta^2\Delta^2$，$b=\dfrac{C\theta\Delta}{a}$。当 $\frac{1}{2}<\theta\leqslant 1$，能取到 Δ 足够小，使得 a 足够小且 $a>0$，因此存在 a 足够小，使得 $(ab^2+C)<C_1$，从而式(5)可变为

$$(2\theta-1)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta-C|F_n|^2\geqslant -(ab^2+C)|y_n|^2\geqslant -C_1|y_n|^2$$

又由式(2)可得

$$(2\theta-1)|f(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2\Delta-C|F_n|^2\geqslant 2\langle y_n,f(t_n,y_n,\bar{y}_n)\rangle+|g(t_n,y_n,\bar{y}_n)|^2-C_2|\bar{y}_n|^2$$

移项后，式(4)得证。

③ 将式(4)代入式(3)，有

$$|F_{n+1}|^2\leqslant|F_n|^2+(-C|F_n|^2+C_2|\bar{y}_n|^2)\Delta+M_n\leqslant|F_n|^2-C|F_n|^2\Delta+C_2|\bar{y}_n|^2\Delta+M_n\leqslant(1-C\Delta)|F_n|^2+C_2|\bar{y}_n|^2\Delta+M_n$$

且 $|\bar{y}_n|^2\leqslant\delta|y_{n-m+1}|^2+(1-\delta)|y_{n-m}|^2$，所以有

$$|F_{n+1}|^2\leqslant(1-C\Delta)|F_n|^2+C_2\Delta\delta|y_{n-m+1}|^2+C_2\Delta(1-\delta)|y_{n-m}|^2+M_n$$

又由于对任意的 $A>1$，都有

$$A^{(n+1)\Delta}|F_{n+1}|^2-A^{n\Delta}|F_n|^2\leqslant A^{(n+1)\Delta}[(1-C\Delta)|F_n|^2+C_2\Delta\delta|y_{n-m+1}|^2+C_2\Delta(1-\delta)|y_{n-m}|^2+M_n]-A^{n\Delta}|F_n|^2\leqslant A^{(n+1)\Delta}(1-C\Delta-A^{-\Delta})|F_n|^2+A^{(n+1)\Delta}C_2\Delta\delta|y_{n-m+1}|^2+A^{(n+1)\Delta}C_2\Delta(1-\delta)|y_{n-m}|^2+A^{(n+1)\Delta}M_n\leqslant R_1A^{(n+1)\Delta}|F_n|^2+R_2A^{(n+1)\Delta}|y_{n-m+1}|^2\Delta+R_3A^{(n+1)\Delta}|y_{n-m}|^2\Delta+A^{(n+1)\Delta}M_n \tag{6}$$

式(6)中，$R_1=1-C\Delta-A^{-\Delta}$，$R_2=C_2\delta$，$R_3=C_2(1-\delta)$，$R_2+R_3=C_2$。

对式(6)从 $n=0$ 到 $n=k-1$ 求和，得

$$A^{k\Delta}|F_k|^2\leqslant|F_0|^2+R_1\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|F_i|^2+$$

$$R_2\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2\Delta+R_3\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2\Delta+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i \tag{7}$$

注意到 $R_1|_{\Delta=0}=0$,且

$$R_1'(\Delta)=-C+A^{-\Delta}\ln A \tag{8}$$

当 $1<A<\mathrm{e}^C$ 时,$R_1'(\Delta)<0$,因此当 $\Delta>0$ 时 $R_1<0$。

对 $F_n=y_n-\theta\Delta f(t_n,y_n,\bar{y}_n)$ 两边平方,并应用式(2)得

$$|F_i|^2=|y_i|^2+\theta^2\Delta^2|f(t_i,y_i,\bar{y}_i)|^2-2\theta\Delta\langle f(t_i,y_i,\bar{y}_i),y_i\rangle\geqslant|y_i|^2-2\theta\Delta\langle f(t_i,y_i,\bar{y}_i),y_i\rangle\geqslant|y_i|^2+C_1\theta\Delta|y_i|^2-C_2\theta\Delta|\bar{y}_i|^2 \tag{9}$$

所以有

$$R_1|F_i|^2\leqslant R_1(|y_i|^2+C_1\theta\Delta|y_i|^2-C_2\theta\Delta|\bar{y}_i|^2) \tag{10}$$

将式(10)代入式(7),有

$$A^{k\Delta}|F_k|^2\leqslant|F_0|^2+R_1\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}(|y_i|^2+C_1\theta\Delta|y_i|^2-C_2\theta\Delta|\bar{y}_i|^2)+R_2\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2\Delta+R_3\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2\Delta+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i\leqslant|F_0|^2+R_1\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}[|y_i|^2+C_1\theta\Delta|y_i|^2-C_2\theta\Delta(\delta|y_{i-m+1}|^2+(1-\delta)|y_{i-m}|^2)]+R_2\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2\Delta+R_3\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2\Delta+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i\leqslant|F_0|^2+R_1\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}(1+C_1\theta\Delta)|y_i|^2+(R_2-R_1C_2\theta\delta)\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2\Delta+(R_3-R_1C_2\theta(1-\delta))\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2\Delta+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i$$

整理得

$$A^{k\Delta}|F_k|^2\leqslant|F_0|^2+k_1\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+k_2\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2+k_3\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i \tag{11}$$

式(11)中

$$\begin{cases}k_1=R_1(1+C_1\theta\Delta)\\k_2=(R_2-R_1C_2\theta\delta)\Delta\\k_3=(R_3-R_1C_2\theta(1-\delta))\Delta\end{cases}$$

以下考虑式(11)中 $\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2$ 和 $\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2$ 两项。显然有

$$\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m+1}|^2=\sum_{i=-m-1}^{k-m}A^{(i+m)\Delta}|y_i|^2\leqslant A^{\tau}\sum_{i=-m-1}^{k-m}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2\leqslant A^{\tau}\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+A^{\tau}\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2\leqslant A^{\tau+\Delta}\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+A^{\tau+\Delta}\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2 \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_{i-m}|^2=\sum_{i=-m}^{k-m-1}A^{(i+m+1)\Delta}|y_i|^2\leqslant A^{\tau+\Delta}\sum_{i=-m}^{k-m-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2\leqslant A^{\tau+\Delta}\sum_{i=-m}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+A^{\tau+\Delta}\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2\leqslant A^{\tau+\Delta}\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+A^{\tau+\Delta}\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2 \tag{13}$$

将式(12)、(13)代入式(11),有

$$A^{k\Delta}|F_k|^2\leqslant|F_0|^2+k_1\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+k_2\left(A^{\tau+\Delta}\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+A^{\tau+\Delta}\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2\right)+k_3\left(A^{\tau+\Delta}\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+A^{\tau+\Delta}\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2\right)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i$$

合并系数得

$$A^{k\Delta}|F_k|^2\leqslant|F_0|^2+(k_1+k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+(k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i \tag{14}$$

式(14)中

$$k_1+k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta}=R_1(1+C_1\theta\Delta)+(C_2-R_1C_2\theta\delta)\Delta A^{\tau+\Delta}=\Delta\left(\left(\frac{R_1}{\Delta}+C_2A^{\tau+\Delta}\right)+R_1(C_1\theta-A^{\tau+\Delta}C_2\theta\delta)\right) \tag{15}$$

④ 证明 $A^{k\Delta}E|F_k|^2$ 有界。

考虑式(15)中 $k_1+k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta}$ 的正负。

首先考虑 $R_1(C_1\theta-A^{\tau+\Delta}C_2\theta\delta)$ 的正负。

令 $C_1>C_2A^{\tau+\Delta}$，故 $C_1>C_2A^{\tau+\Delta}\delta$，从而有 $C_1\theta-A^{\tau+\Delta}C_2\theta\delta>0$，因此有 $R_1(C_1\theta-A^{\tau+\Delta}C_2\theta\delta)<0$，进而有 $k_1+k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta}\leqslant\Delta\left(\dfrac{R_1}{\Delta}+C_2A^{\tau+\Delta}\right)$。

接下来考虑 $\Delta\left(\dfrac{R_1}{\Delta}+C_2A^{\tau+\Delta}\right)$ 的正负。

由 $0<C_2,C<C_1,A>1=\mathrm{e}^0$ 可知，存在足够小的 Δ，使得 $C>C_2A^{\tau+\Delta}$，因此

$$\mathrm{e}^{C-C_2A^{\tau+\Delta}}>A \tag{16}$$

在式(16)的条件下，有 $C-C_2A^{\tau+\Delta}\geqslant\ln A$，进而 $C-C_2A^{\tau+\Delta}\geqslant A^{-\Delta}\ln A$。

结合式(8)有 $-C_2A^{\tau+\Delta}\geqslant R_1'(\Delta)$，故 $\lim\limits_{\Delta\to0}\dfrac{R_1}{\Delta}+C_2A^{\tau+\Delta}\leqslant0$；进一步因式(15)中 $k_1+k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta}\leqslant0$，则式(14)变为

$$A^{k\Delta}\ |F_k|^2\leqslant|F_0|^2+(k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}|y_i|^2+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}M_i \tag{17}$$

对式(17)两边取期望得

$$A^{k\Delta}\ E\ |F_k|^2\leqslant E\ |F_0|^2+(k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}\ E\ |y_i|^2+\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}\ EM_i=E|F_0|^2+(k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}E\ |y_i|^2\leqslant E|y_0-\theta\Delta f(0,y_0,\bar{y}_0)|^2+(k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}E\ |\phi(t_i)|^2\leqslant E\ |\phi(0)-\theta\Delta f(0,\phi(0),\overline{\phi(0)})|^2+(k_2A^{\tau+\Delta}+k_3A^{\tau+\Delta})\sum_{i=-m-1}^{-1}A^{(i+1)\Delta}E\ |\phi(t_i)|^2:=K<\infty$$

由此得到了 $A^{k\Delta}E\ |F_k|^2$ 的有界性。

⑤ 证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\lg E\ |y_k|^2}{k\Delta}\leqslant-\lg A<0$。

整理式(9)得

$$|F_k|^2\geqslant(1+C_1\theta\Delta)\,|y_k|^2-C_2\theta\Delta\ |\bar{y}_k|^2$$

故有

$$|y_k|^2\leqslant\frac{|F_k|^2+C_2\theta\Delta\ |\bar{y}_k|^2}{1+C_1\theta\Delta} \tag{18}$$

对式(18)两边乘 $A^{k\Delta}$ 并取期望，得

$$A^{k\Delta}\ E\ |y_k|^2\leqslant\frac{A^{k\Delta}E\ |F_k|^2+A^{k\Delta}C_2\theta\Delta E\ |\bar{y}_k|^2}{1+C_1\theta\Delta}\leqslant\frac{K+A^{k\Delta}C_2\theta\Delta E\ |\bar{y}_k|^2}{1+C_1\theta\Delta}\leqslant\frac{K+A^{k\Delta}C_2\theta\Delta\delta E\ |y_{k-m+1}|^2}{1+C_1\theta\Delta}+\frac{A^{k\Delta}C_2\theta\Delta(1-\delta)E\ |y_{k-m}|^2}{1+C_1\theta\Delta}$$

记

$$\begin{cases}b=\dfrac{K}{1+C_1\theta\Delta}\\[2mm] q_1=\dfrac{C_2\theta\Delta\delta A^{(m-1)\Delta}}{1+C_1\theta\Delta}\leqslant\dfrac{C_2\theta\Delta\delta A^{\tau}}{1+C_1\theta\Delta}\leqslant\dfrac{C_2\theta\Delta\delta A^{\tau+\Delta}}{1+C_1\theta\Delta}\\[2mm] q_2=\dfrac{C_2\theta\Delta(1-\delta)A^{m\Delta}}{1+C_1\theta\Delta}\leqslant\dfrac{C_2\theta\Delta(1-\delta)A^{\tau+\Delta}}{1+C_1\theta\Delta}\end{cases}$$

则有 $A^{k\Delta}\ E\ |y_k|^2\leqslant b+q_1A^{(k-m+1)\Delta}\ E\ |y_{k-m+1}|^2+q_2A^{(k-m)\Delta}E\ |y_{k-m}|^2$。

令 $a_k=A^{k\Delta}E\ |y_k|^2$，有递推式 $a_k\leqslant b+q_1a_{k-m+1}+q_2a_{k-m}$，从而得到

$$a_k\leqslant b+q_1a_{k-m+1}+q_2a_{k-m}\leqslant b\sum_{i=0}^{1}(q_1+q_2)^i+C_2^0q_1^2q_2^0a_{k-2(m-1)}+C_2^1q_1^1q_2^1a_{k-2(m-1)-1}+C_2^2q_1^0q_2^2a_{k-2m}\leqslant b\sum_{i=0}^{2}(q_1+q_2)^i+C_3^0q_1^3q_2^0a_{k-3(m-1)}+C_3^1q_1^2q_2^1a_{k-3(m-1)-1}+C_3^2q_1^1q_2^2a_{k-3(m-1)-2}+C_3^3q_1^0q_2^3a_{k-3m}\leqslant\cdots\leqslant b\sum_{i=0}^{l}(q_1+q_2)^i+\sum_{i=0}^{l+1}C_{l+1}^iq_1^{l+1-i}q_2^ia_{k-(l+1)(m-1)-i} \tag{19}$$

式(19)中 $l=\left\lfloor\dfrac{k}{m-1}\right\rfloor$。显然式(19)最后一个不等式中 a 的下标均小于等于0。

令 $C_1>C_2A^{\tau+\Delta}$，当 Δ 充分小时，有 $q_1+q_2\leqslant\dfrac{C_2\theta\Delta A^{\tau+\Delta}}{1+C_1\theta\Delta}<1$，从而式(19)变为

$$A^{k\Delta}E\ |y_k|^2\leqslant\frac{b}{1-(q_1+q_2)}+\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant0}E\ |\phi(t)|^2\sum_{i=0}^{l+1}C_{l+1}^iq_1^{l+1-i}q_2^i=K'<\infty$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lg E\ |y_k|^2}{k\Delta}\leqslant-\lg A<0$$

第⑤步证明完成。至此，得到了随机线性 θ 方法数值解的均方指数稳定性，定理1得证。证毕。

3　结束语

本文参考文献[4]中 $\theta-$EM 数值格式的方法，研究了随机时滞微分方程随机线性 θ 方法的均方指数稳定性。与文献[5]相比，本文处理了更为复杂

的滞后项,并在相同条件下得到了随机线性 θ 方法的均方指数稳定性($1/2 < \theta \leq 1$),从而几乎处处指数稳定,比文献[5]中的结论更完善。

参考文献:

[1] HIGHAM D J. Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2001, 38(3): 753-769.

[2] ZONG X F, WU F K. Choice of θ and mean-square exponential stability in the stochastic theta method of stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 255: 837-847.

[3] ZONG X F, WU F K, HUANG C M. Exponential mean square stability of the theta approximations for neutral stochastic differential delay equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 286: 172-185.

[4] LAN G Q, YUAN C G. Exponential stability of the exact solutions and θ-EM approximations to neutral SDDEs with Markov switching [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 28(35): 230-242.

[5] HUANG C M. Mean square stability and dissipativity of two classes of theta methods for systems of stochastic delay differential equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 259: 77-86.

Mean square exponential stability of the stochastic linear theta method for stochastic delay differential equations

ZHAO Mei　LAN GuangQiang *

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this work, the sufficient conditions for the mean square exponential stability of stochastic linear theta methods for stochastic delay differential equations are given. It is proved that when the diffusion coefficient is highly nonlinear (that is, it does not satisfy the linear growth condition), the stochastic linear theta method still has mean square exponential stability. Finally, the results of a previous paper by Huang (Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 259: 77—86) are strengthened under the same conditions.

Key words: stochastic delay differential equations; stochastic linear θ method; mean square exponential stability

(责任编辑:汪　琴)