

引用格式:陈文娟,孙贵艳,王子璇,等.关于 n -秩轮图 2-adic Orlik–Solomon 代数的研究[J].北京化工大学学报(自然科学版),2019,46(5):112–117.

CHEN WenJuan, SUN GuiYan, WANG ZiXuan, et al. On the 2-adic Orlik–Solomon algebra of n -rank wheel graphs[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019,46(5):112–117.

关于 n -秩轮图 2-adic Orlik–Solomon 代数的研究

陈文娟 孙贵艳 王子璇 姜广峰*

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要:研究了与 n -秩轮图相伴的超平面构形的 2-adic Orlik–Solomon 代数,得到了 2-adic Orlik–Solomon 代数前 4 项的维数计算公式,并发现这类图构形不是二次的,这一结果部分回答了 Falk 提出的公开问题。最后,计算了这一类聚合物拓扑图 2-adic Orlik–Solomon 代数的第 4 项维数。

关键词:超平面构形; 2-adic Orlik–Solomon 代数; n -秩轮图

中图分类号: O157 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2019.05.017

引 言

超平面构形的研究近三十年来得到了数学界的广泛关注并得到了较快的发展^[1],其中 Orlik–Solomon 代数是超平面构形的重要组合与拓扑不变量。Falk^[2]给出了 k -adic Orlik–Solomon 代数的概念和部分研究结果,即: $k=1$ 时, k -adic Orlik–Solomon 是 Orlik–Solomon 代数,同时也是超平面构形的一系列重要组合与拓扑不变量。初丽丽等^[3]研究了 n -秩轮图的 Orlik–Solomon 代数,给出了该类构形 Orlik–Solomon 代数的计算公式。张曦等^[4]给出了 n -秩轮图 2-adic Orlik–Solomon 代数的第 3 项 $OS_2^3 = E^3/I_2^3$ 维数。Guo 等^[5–6]通过研究带符号图构形的 OS_2^3 维数,得到了构形的 ϕ_3 不变量,从而回答了 Falk 提出的一个公开问题^[2]。Falk 提出的另一个公开问题是计算给定拟阵 G 的 A_k^p 维数^[2],同时指出 $k=2$ 的问题仍未得到解决。

本文得到了 n -秩轮图的 2-adic Orlik–Solomon 代数的第 4 项结果,并结合张曦等^[4]的工作给出了该图构形的 2-adic Orlik–Solomon 代数维数的计算

公式,即 $\dim OS_2^t = 2^t \binom{n}{t} (t=0,1,2,3,4)$,部分回答

了 Falk 关于 n -秩轮图构形拟阵的问题;同时对 n -秩轮图构形 2-adic Orlik–Solomon 代数的维数有一个猜测,即

$$\begin{cases} \dim OS_2^t = 2^t \binom{n}{t}, t=0,1,2,\dots,n \\ \dim OS_2^t = 0, t=n+1,n+2,\dots,2n \end{cases}$$

1 预备知识

设 V 是数域 K 上的 l 维向量空间,当取定 V 的一组基 e_1, e_2, \dots, e_l 后,可认为 $V \cong K^l$,其中 $e_i = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0)$,且满足 $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_l e_l, v \in V (x_1, x_2, \dots, x_l)$,则称 $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_l) \in K^l | a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_l x_l = b\}$ 为 V 的一个超平面。 V 中超平面的有限集称为超平面构形,记作 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 。

定义 $E^1 = \bigoplus_{i \in [n]} K e_i$,其中 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$;记 E^1 生成的外代数 $E = \wedge E^1$ 也是一个分次代数,且有 $E^0 = K E^1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} K e_i, E^2 = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} K e_i e_j, \dots, E^p = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} K e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, E = \bigoplus_{p=0}^n E^p$ 。

在外代数 E 上定义一个 K -线性映射 $\partial: E^p \rightarrow E^{p-1}$,且满足 $\partial 1 = 0, \partial e_i = 1 (i=1, \dots, n), \partial(e_1 \cdots e_p) =$

$\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} e_1 \cdots \hat{e}_k \cdots e_p$,其中 \hat{e}_k 为被删除的元。

收稿日期: 2019-03-07

基金项目: 国家自然科学基金(11071010)

第一作者: 女,1993 年生,硕士生

* 通信联系人

E-mail: jianggf@mail.buct.edu.cn

对于给定的超平面 p 元组 $S = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_p}) = (i_1, \cdots, i_p)$, 记 $e_S = e_{i_1} \cdots e_{i_p} = e_{i_1 \cdots i_p}$, $\cap S = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p}$. 若 $\text{codim}(\cap S) = |S|$, 则称 p 元组 S 无关; 若 $\cap S \neq \Phi$ 且 $\text{codim}(\cap S) < |S|$, 则称 p 元组 S 相关; 若 p 元组 $S = (H_1, \cdots, H_p)$ 是极小相关的, 则 $S = \{H_1, \cdots, H_p\}$ 为一个极小圈。

将极小圈的全体记为 $C(\mathcal{A})$, 长度为 n 的极小圈全体记为 $C_n = C_n(\mathcal{A})$, $\{e_S \mid \cap S = \Phi\} \cup \{\partial e_S \mid S \text{ 是相关集}\}$ 在 E 中生成的理想为 I , 则称 $OS(\mathcal{A}) = E/I$ 为 \mathcal{A} 的 Orlik-Solomon 代数。若 $I^p = I \cap E^p$, 显然有 $I^0 = 0, I^1 = 0, I^2$ 是由 $\{e_{i_1 i_2} \mid H_{i_1} \cap H_{i_2} = \Phi\} \cup \{\partial e_{j_1 j_2 j_3} \mid H_{j_1}, H_{j_2}, H_{j_3} \text{ 是相关的}\}$ 生成的 E^2 的子空间, 且 $I = \bigoplus_{p=0}^n I^p$ 是 E 的分次理想。因此 $OS(\mathcal{A})$ 是分次代数, 并且有 $OS(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k=0}^n OS^k(\mathcal{A})$ 。记 $I_k = \langle I_0 + I_1 + \cdots + I_k \rangle_E$ 为 E 中的理想, 显然有 $I_0 = \langle I^0 \rangle_E = 0, I_1 = \langle I^0 + I^1 \rangle_E = 0$, 则称 I_k 为 E 的 k -adic Orlik-Solomon 理想, 称 $OS(\mathcal{A})_k = E/I_k$ 为构形 \mathcal{A} 的 k -adic Orlik-Solomon 代数, 且有 $A_k^p = (E/I_k)^p = E^p/I_k^p$ 。

2 n -秩轮图的 2-adic Orlik-Solomon 代数

设 C_n 为一个有 n 个顶点的圈, 第 $n+1$ 个顶点与 C_n 的每个顶点相连成 n 条边, 这样形成的图称为 n -秩轮图。在 n -秩轮图 G 中, G 的边数 (即超平面的个数) 为 $2n$, 顶点个数为 $n+1$, 极小圈个数为 n , 其中极小圈的集合 $C_n = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, 当 $n=4, 5$ 时, n -秩轮图如图 1 所示。

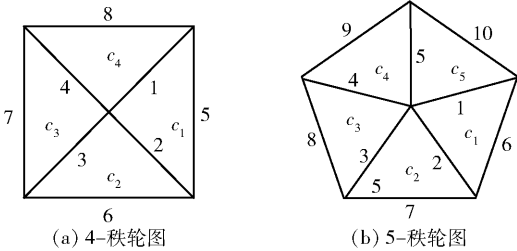


图 1 4-秩轮图和 5-秩轮图

Fig. 1 4-rank wheel graph and 5-rank wheel graph

引理 1 I_2^4 生成元集合的子集 $D_{4,1} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p \in \{i, j, k\}, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}\}$ 满足 $\dim(D_{4,1}) = n(2n-3)$ 。

证明: 不妨设 $p=i$, 则有 $e_{pq} \partial e_{ijk} = \pm e_{ijkq}$ 。在 $D_{4,1}$ 中, p 有 n 种取法, q 有 $2n-3$ 种取法, 而该 $n(2n-3)$ 个向量在 E^4 中基的序列各不相同, 故有 $\dim(D_{4,1}) = n(2n-3)$ 。引理 1 得证。

记

$D'_{4,2} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, p, q \text{ 在同一个极小圈中}\}$

$D''_{4,2} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, p, q \text{ 不在同一个极小圈中}\}$

$D_{4,2} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}\}$

引理 2 I_2^4 生成元集合的子集

$D'_{4,2} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, p, q \text{ 在同一个极小圈中}\}$ 满足 $\dim(D'_{4,2}) = n + 5 \frac{n(n-3)}{2}$ 。

证明: 首先, 在 $D'_{4,2}$ 中, 若 p, q 取自邻圈, 对于 n -秩轮图, 任何一个极小圈都有 2 个邻圈, 则 p, q 有 $2n$ 种取法。将 n 个圈 c_1, c_2, \cdots, c_n 两两分为 n 组, 有 $G_1 = \{c_1, c_2\}, G_2 = \{c_2, c_3\}, \cdots, G_n = \{c_n, c_1\}$, 其中第 i 组 $G_i = \{c_i, c_{i+1}\}$ 如图 2 所示。

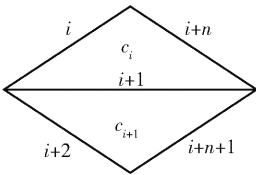


图 2 第 i 组 G_i 的图示

Fig. 2 Graph of the group G_i

第 i 组的 I_2^4 由式 (1) 计算

$$\begin{aligned} & e_{(i+2)(i+n+1)} \partial e_{i(i+1)(i+n)} = e_{i(i+2)(i+n)(i+n+1)} - \\ & \frac{e_{(i+1)(i+2)(i+n)(i+n+1)} + e_{i(i+1)(i+2)(i+n)}}{e_{i(i+n)} \partial e_{(i+1)(i+2)(i+n+1)}} = \frac{e_{i(i+1)(i+n)(i+n+1)}}{e_{i(i+2)(i+n)(i+n+1)} + e_{i(i+1)(i+2)(i+n)}} \end{aligned} \quad (1)$$

式 (1) 中划线的分量可由 $D_{4,1}$ 中的元素线性表示, 剩余的分量最多相差一个负号, 故 $D'_{4,2}$ 中的向量在 $D_{4,1}$ 中是线性相关的, 线性无关的向量个数为 n 。

其次, 在 $D'_{4,2}$ 中, 若 p, q 取自非邻圈, 则对于 n -秩轮图, 任何一个极小圈都有 $n-3$ 个非邻圈。对一个极小圈的一个非邻圈, 不妨标记极小圈的边为 $i, j, k(p, q, r)$; 假定 $i < j < k, p < q < r$, 标记一个非邻圈的边为 $p, q, r(i, j, k)$ (图 3), 则 p, q 共有 $6 \frac{n(n-3)}{2}$

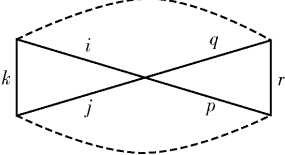


图 3 n -秩轮图中的一个极小圈和一个非邻圈

Fig. 3 A circuit and its non-adjacent circuit in a n -rank wheel graph

种取法。

考虑 5-秩轮图,如图 4 所示。

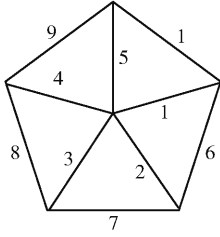


图 4 5-秩轮图

Fig. 4 5-rank wheel graph

不妨取 $\{i, j, k\} \in \{(1, 2, 6), (3, 4, 8)\}$, $p, q \in \{(1, 2, 6), (3, 4, 8)\}$, 则有

$$\begin{cases} e_{34} \partial e_{126} = e_{2346} - e_{1346} + e_{1234} \\ e_{38} \partial e_{126} = -e_{2368} + e_{1368} + e_{1238} \\ e_{48} \partial e_{126} = -e_{2468} + e_{1468} + e_{1248} \\ e_{12} \partial e_{348} = e_{1248} - e_{1238} + e_{1234} \\ e_{16} \partial e_{348} = -e_{1468} + e_{1368} + e_{1346} \\ e_{26} \partial e_{348} = -e_{2468} + e_{2368} + e_{2346} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)对应的 6×216 矩阵描述如下。

第 1 行的第 1 列元素为 1, 第 30 列元素为 -1, 第 86 列元素为 1, 其余列元素全为 0;

第 2 行的第 5 列元素为 1, 第 41 列元素为 1, 第 97 列元素为 -1, 其余列元素全为 0;

第 3 行的第 11 列元素为 1, 第 56 列元素为 1, 第 112 列元素为 -1, 其余列元素全为 0;

第 4 行的第 1 列元素为 1, 第 5 列元素为 -1, 第 11 列元素为 1, 其余列元素全为 0;

第 5 行的第 30 列元素为 1, 第 41 列元素为 1, 第 56 列元素为 -1, 其余列元素全为 0;

第 6 行的第 86 列元素为 1, 第 97 列元素为 1, 第 112 列元素为 -1, 其余列元素全为 0。

经计算,该矩阵的秩为 5, 且 $e_{26} \partial e_{348} = e_{34} \partial e_{126} - e_{38} \partial e_{126} + e_{48} \partial e_{126} - e_{12} \partial e_{348} + e_{16} \partial e_{348}$, 故该矩阵对应的 6 个向量是线性相关的, 极大无关组个数为 5。则对任意 $\{i, j, k\}, \{p, q, r\} \in C_n, p, q \in \{(i, j, k), (p, q, r)\}$, 有

$$\begin{cases} e_{pq} \partial e_{ijk} = e_{jkpq} - e_{ikpq} + e_{ijpq} \\ e_{pr} \partial e_{ijk} = e_{jkpr} - e_{ikpr} + e_{ijpr} \\ e_{qr} \partial e_{ijk} = e_{jkqr} - e_{ikqr} + e_{ijqr} \\ e_{ij} \partial e_{pqr} = e_{ijqr} - e_{ijpr} + e_{ijpq} \\ e_{ik} \partial e_{pqr} = e_{ikqr} - e_{ikpr} + e_{ikpq} \\ e_{jk} \partial e_{pqr} = e_{jkqr} - e_{jkpr} + e_{jkpq} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)所表示的向量组的秩为 5, 且有

$$e_{jk} \partial e_{pqr} = e_{pq} \partial e_{ijk} - e_{pr} \partial e_{ijk} + e_{qr} \partial e_{ijk} - e_{ij} \partial e_{pqr} + e_{ik} \partial e_{pqr}$$

$$\text{因此有 } \dim(D'_{4,2}) = n + 5 \frac{n(n-3)}{2}.$$

引理 2 得证。

引理 3 I_2^4 生成元集合的子集 $D''_{4,2} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, p, q \text{ 不在同一个极小圈中}\}$ 满足 $\dim(D''_{4,2}) = n(2n^2 - 10n + 13)$ 。

证明: 因 p, q 共有 $n \binom{2n-3}{2}$ 种取法, 所以在 $D''_{4,2}$

中 p, q 有 $\binom{2n-3}{2} - n(3n-7) = n(2n^2 - 10n + 13)$

种取法。 p, q 的取法可分为以下 3 种情况:

①若 p, q 取自邻圈边, 且 $e_{pq} \partial e_{ijk} = e_{jkpq} - e_{ikpq} + e_{ijpq}$ 的各个分量是唯一出现的, 则整个向量是线性无关的;

②若 p, q 取自非邻圈边, 且 $e_{pq} \partial e_{ijk} = e_{jkpq} - e_{ikpq} + e_{ijpq}$ 的 3 个分量中包含一个唯一的破圈, 即整个向量都是唯一出现的, 则整个向量是线性无关的;

③若 p 取自邻圈边, q 取自非邻圈边, 且 $e_{pq} \partial e_{ijk} = e_{jkpq} - e_{ikpq} + e_{ijpq}$, 则总有一个分量是唯一出现的, 故整个向量是线性无关的, 即 $\dim(D''_{4,2}) = n(2n^2 - 10n + 13)$ 。

引理 3 得证。

引理 4 I_2^4 生成元集合的子集 $D_{4,2} = \{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}\}$ 满足 $\dim(D_{4,2}) = n + 5 \frac{n(n-3)}{2} + n(2n^2 - 10n + 13)$ 。

证明: 在 $D_{4,2}$ 中, 将 p, q 细分为 p, q 在同一个极小圈中和 p, q 不在同一个极小圈中两种情况, 则有

$$D_{4,2} = \text{span}(D'_{4,2}) \cup \text{span}(D''_{4,2})$$

设 $\alpha = \text{span}(D'_{4,2}) \cap \text{span}(D''_{4,2})$, 则有

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{\substack{e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, \\ p, q \text{ 在同一极小圈中}}} \lambda_{pqijk} e_{pq} \partial e_{ijk} = \\ &\sum_{\substack{e_{uvw} \in C_n, x, y \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, \\ x, y \text{ 不在同一极小圈中}}} \mu_{xyuvw} e_{xy} \partial e_{uvw} \\ &\text{即} \\ &\sum_{\substack{e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, \\ p, q \text{ 在同一极小圈中}}} \lambda_{pqijk} e_{pq} \partial e_{ijk} - \\ &\sum_{\substack{e_{uvw} \in C_n, x, y \in [2n] \setminus \{i, j, k\}, \\ x, y \text{ 不在同一极小圈中}}} \mu_{xyuvw} e_{xy} \partial e_{uvw} = 0 \end{aligned}$$

由于在 $D'_{4,2}$ 中, $e_{j_k p q}, e_{i_k p q}, e_{i j p q}$ 不会在 $D''_{4,2}$ 中出现, 故 $\lambda_{pqijk} = 0, \alpha = 0$, 从而有

$$\dim(D_{4,2}) = \dim(D'_{4,2}) + \dim(D''_{4,2}) = n + 5 + \frac{n(n-3)}{2} + n(2n^2 - 10n + 13)$$

引理 4 得证。

引理 5 n -秩轮图的 $\dim I_2^4 = \frac{1}{2}n(n-1)(4n-7)$ 。

证明: I_2^4 的定义为 $I_2^4 = E^2 I^2 = \text{span}\{e_{pq} \partial e_{ijk} \mid e_{ijk} \in C_n, p, q \in [2n]\}$ 的 E^4 中的子空间。考虑 I_2^4 的生成元 $e_{pq} \partial e_{ijk}, p, q$ 有 3 种情形:

- ① $p, q \in \{i, j, k\}$ 时, $e_{pq} \partial e_{ijk} = 0$;
- ② $p \in \{i, j, k\}, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}$ 时, 结果见引理 1;
- ③ $p, q \in [2n] \setminus \{i, j, k\}$ 时, 结果见引理 2 和引理 3。

因为情形②中的元素是 $D_{4,1}$ 中的元素, 情形③中的元素是 $D_{4,2}$ 中的元素, 所以有 $I_2^4 = \text{span}(D_{4,1}) \cup \text{span}(D_{4,2})$, 则

$$\dim I_2^4 = \dim(D_{4,1} + D_{4,2}) = n(2n-3) + 5 + \frac{n(n-3)}{2} + n + n(2n^2 - 10n + 13) = \frac{1}{2}n(n-1)(4n-7)$$

引理 5 得证。

定理 1 对于 n -秩轮图, 有

$$\dim OS_2^4 = \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

证明: 由 $OS_2^4 = E^4/I_2^4$ 得

$$\begin{aligned} \dim OS_2^4 &= \dim E^4 - \dim I_2^4 = \binom{2n}{4} - \frac{1}{2}n(n-1)(4n-7) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)(2n-3) - \frac{1}{2}n(n-1)(4n-7) \\ &= \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

定理 1 得证。

推论 1 对于 n -秩轮图, 有

$$\dim OS_2^t = 2^t \binom{n}{t}, t=0, 1, 2, 3, 4$$

证明: 由 I_2 定义可知, $I_2^0 = 0, I_2^1 = 0, I_2^2 \cong C_3$, 所以对 n -秩轮图, 有

$$\begin{aligned} \dim I_2^0 &= 0, \dim I_2^1 = 0, \dim I_2^2 = n, \dim I_2^3 = 2n \\ (n-1) \dim I_2^4 &= \frac{1}{2}n(n-1)(4n-7) \end{aligned}$$

由 $OS_2^t = E^t/I_2^t (t=0, 1, 2, 3, 4)$ 可得

$$\begin{aligned} \dim OS_2^0 &= 1, \dim OS_2^1 = 2n, \dim OS_2^2 = 2n(n-1), \dim OS_2^3 = \frac{4}{3}n(n-1)(n-2), \\ \dim OS_2^4 &= \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)(n-3) \end{aligned}$$

观察归纳可得, $\dim OS_2^t = 2^t \binom{n}{t}, t=0, 1, 2, 3, 4$ 。

推论 1 得证。

推论 2 对于 n -秩轮图, 当 $n=4$ 时有 $\dim OS_2^t = \dim OS^t, t=0, 1, 2, \dim OS_2^t \neq \dim OS^t, t=3, 4$;

当 $n=5$ 时有 $\dim OS_2^t = \dim OS^t, t=0, 1, 2, 3, \dim OS_2^4 \neq \dim OS^4$;

















当 $n \geq 6$ 时有 $\dim OS_2^t = \dim OS^t, t=0, 1, 2, 3, 4$ 。比较 $\dim OS_2^t, \dim OS^t$, 发现 n -秩轮图不是二次的^[7]。

3 一类聚合物拓扑图的第 4 个 2-adic Orlik-Solomon 代数

聚合物拓扑分类对应着拓扑图。计算与轮式图相关的聚合物分子图构形的第 4 个 2-adic Orlik-Solomon 代数的维数, 两类聚合物 $C_n H_{2n} (n=6, 7)$ 和 $C_n H_{2n-4} (n=5 \sim 10)$ 拓扑结构的 $\dim OS_2^4$ 计算结果^[8] 分别见表 1 和表 2。

表 1 聚合物 $C_n H_{2n} (n=6, 7)$ 的 $\dim OS_2^4$


































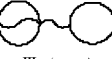


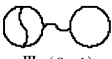

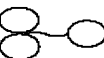

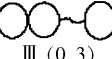

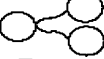

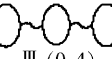

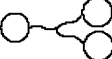
Table 1 $\dim OS_2^4$ of the polymer $C_n H_{2n} (n=6, 7)$

拓扑结构	分子图	$\dim OS_2^4$	拓扑结构	分子图	$\dim OS_2^4$
		9			9
$I_6(2,2)$			$I_6(3,1)$		
		9			9
$I_6(3,2)$			$I_6(3,3)$		
		25			25
$I_7(3,2)[1(4)]$			$I_7(3,2)[2(3,0)]$		
		25			25
$I_7(3,3)$			$I_7(4,2)[2-2]$		

一般地, 类似于表 1 中的分子结构图, 若有 n 个分支和一个长度为 3 的极小圈, 则这样的聚合物的 OS_2^4 维数计算公式为

$$\dim OS_2^4 = \binom{n+3}{4} - \left(n + \binom{n}{2} \right) = \frac{n(n+6)(n^2-1)}{24}$$

表 2 聚合物 C_nH_{2n-4} ($n=5 \sim 10$) 的 $\dim OS_2^4$
Table 2 $\dim OS_2^4$ of the polymer C_nH_{2n-4} ($n=5 \sim 10$)

拓扑结构	分子图	$\dim OS_2^4$	拓扑结构	分子图	$\dim OS_2^4$
 $III_4(0,4)$		16	 $III_5(0,2)$		8
		31			41
		70			70
		85			85
		126			105
		105			126
		126			
 $III_6(0,4)$		41	 $III_6(0,2)$		28
		105			85
		85			85
		105			105
 $III_5(0,3)$		8	 $III_7(0,1)$		66
		41		 $III_7(0,2)$	66
 $III_5(0,3)$		55	 $III_7(0,3)$		66
		41		 $III_7(0,4)$	66
		105		 $III_8(0,2)$	129
		85		 $III_8(0,3)$	129
		105		 $III_9(0,3)$	225
		105		 $III_9(0,4)$	225
		126		 $III_{10}(0,4)$	363

4 结束语

本文得到了 n -秩轮图的 $A_2^t = OS_2^t = E^t / I_2^t$ ($t = 0, 1, 2, 3, 4$) 维数的计算公式 $\dim OS_2^t = 2^t \binom{n}{t}$ ($t = 0, 1, 2, 3, 4$), 对比了 n -秩轮图 Orlik–Solomon 代数, 通过计算 4-秩轮图 2-adic Orlik–Solomon 代数的维数, 得到一个关于 n -秩轮图 2-adic Orlik–Solomon 代数的维数猜测。对于该猜测, 还需要作进一步的证明。

参考文献:

- [1] ORLIK P, TERAOKA H. Arrangements of hyperplanes [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [2] FALK M. Combinatorial and algebraic in Orlik–Solomon algebras[J]. Europ J Combinatorics, 2001, 22(3): 687–698.
- [3] 初丽丽, 姜广峰. 一类图构形的 Orlik–Solomon 代数及 Tutte 多项式[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2009, 36(5): 116–120.
CHU L L, JIANG G F. Orlik–Solomon algebra and Tutte polynomials of a class of graphic arrangements[J]. Jour-

- nal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2009, 36(5): 116–120. (in Chinese)
- [4] 张曦, 姜广峰. 超平面构形的 φ_3 不变量的一个算法[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2007, 34(4): 446–448.
ZHANG X, JIANG G F. An algorithm for invariant φ_3 of hyperplane arrangements [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2007, 34(4): 446–448. (in Chinese)
- [5] GUO Q M, GUO W L, HU W T, et al. The global invariant of signed graphic hyperplane arrangements [J]. Graphs and Combinatorics, 2017, 33: 527–535.
- [6] GUO W L, GUO Q M, JIANG G F. Falk invariants of signed graphic arrangements[J]. Graphs and Combinatorics, 2018, 34: 1247–1258.
- [7] PERSON K J. Cohomology of OS algebras for quadratic arrangements [J]. Lecturas Matematicas, 2001, 22: 103–134.
- [8] TEZYKA Y, OIKE H. Topological polymer chemistry: systematic classification of nonlinear polymer topologies [J]. Journal of the American Chemical Society, 2001, 123: 11570–11576.

On the 2-adic Orlik–Solomon algebra of n -rank wheel graphs

CHEN WenJuan SUN GuiYan WANG ZiXuan JIANG GuangFeng*

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: We have studied the 2-adic Orlik–Solomon algebra of a hyperplane arrangement associated with an n -rank wheel graph, obtained the dimension formular of the first four terms of the 2-adic Orlik–Solomon algebra, and found that this arrangement is not quadratic. The results partially answer an open question raised by M. Falk. Finally, the calculation method is used in computing the fourth term of the 2-adic Orlik–Solomon algebra of graphs from the topological classification of polymers.

Key words: hyperplane arrangement; 2-adic Orlik–Solomon algebra; n -rank wheel graph

(责任编辑: 汪 琴)