

引用格式:孙贵艳,陈文娟,姜广峰.一类带号图构形的 Tutte 多项式[J].北京化工大学学报(自然科学版),2019,46(4):122-128.

SUN GuiYan, CHEN WenJuan, JIANG GuangFeng. Tutte polynomials of a class of signed graphic arrangements[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019,46(4):122-128.

一类带号图构形的 Tutte 多项式

孙贵艳 陈文娟 姜广峰*

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要:研究了带号曲轮图和带号双半轮图对应图构形的 Tutte 多项式,主要用带号图的删除-限制定理来计算其 Tutte 多项式,并运用带号图的符号转换函数找到了几种有规律的基本图形(基图),推导出这些基本图形 Tutte 多项式的递推公式后,通过计算机辅助给出这类带号图的 Tutte 多项式,进而得到特征多项式及 OS 代数的维数。最后计算了半螺旋双吸泵 3 种不同内部结构的 Tutte 多项式。

关键词:带号图构形;带号曲轮图;带号双半轮图;Tutte 多项式

中图分类号: O157 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2019.04.018

引 言

数域 K 上的 l 维向量空间 V 中余维数为 1 的仿射子空间称为超平面,超平面的有限集即为超平面构形,记作 $A = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$,简称构形^[1]。若 $\bigcap_{i=1}^n H_i \neq \emptyset$,则 A 为中心超平面构形,否则 A 为非中心超平面构形。超平面构形有许多组合与拓扑不变量,其中 Tutte 多项式是超平面构形一个重要的组合与拓扑不变量。计算超平面构形的 Tutte 多项式通常是非常困难的。

Falk 等^[2]对由 Tutte 多项式决定的图和拟阵进行了研究;初丽丽等^[3]和李爱民等^[4]研究了一些特殊图构形的 Tutte 多项式,Amanda 等^[5]计算出圈、重边、完全图、扇形图及曲轮图的 Tutte 多项式;Duan 等^[6]证明了曲轮图和双半轮图的 Tutte 多项式的唯一性。以上文献主要研究普通图的 Tutte 多项式的计算,但关于带号图构形的 Tutte 多项式方面还未见报道。因此本文对带号曲轮和带号双半轮的 Tutte 多项式进行研究,找到了几种有规律的基本图形(基图),得出这些基本图形的 Tutte 多项式的递推公式后,再利用计算机辅助给出这类带号图的

Tutte 多项式,进而得到特征多项式,最后得到了这类带号图构形的 OS 代数维数。

1 带号图构形及其 Tutte 多项式

定义 1 设 x_1, x_2, \dots, x_l 是数域 K 上 l 维向量空间 V 的对偶空间 V^* 的基,给定普通图 $\Gamma = (V, E)$,则对任一边 $\{i, j\} \in E$,都在 V 中对应一个以 $x_i - x_j$ 为定义多项式的超平面,继而有一个构形 $A(\Gamma) = \{\ker(x_i - x_j) \mid \{i, j\} \in E\}$ 与之对应,此构形 $A(\Gamma)$ 就称为图构形。

定义 2 设 $\Sigma = (\Gamma, \sigma) = (V, E, \sigma)$ 是一个有限简单带号图,其中 Γ 是一个普通图, σ 是符号函数, E 是图 Γ 的边集。将 E 中每个元素 $\sigma: e \rightarrow \{+, -\}$ 中带正号的边用实线表示,带负号的边用虚线表示。那么 Σ 中的任一边 e_{ij} 在向量空间 V 中对应一个以 $x_i - \sigma(e_{ij})x_j$ 为定义多项式的超平面,由此有一个带号图构形 $A(\Sigma) = \{\ker(x_i - \sigma(e_{ij})x_j) \mid e_{ij} \in E\}$ 与之对应。

定义 3 对于带号图 Σ ,存在一个符号转换函数 $\zeta: \nu \rightarrow \{+, -\}$,使得转换后边 e 的符号为 $\sigma^\zeta(e) = \zeta(\nu)\sigma(e)\zeta(w)$,其中 ν 和 w 为边 e 的端点。设转换后的带号图为 $\Sigma^\zeta = (\Sigma, \sigma^\zeta)$,那么称用 ζ 转换 Σ ,注意且有 $\Sigma^\zeta = \Sigma^{-\zeta}$ 。

定义 4^[7] 超平面构形 A 的 Tutte 多项式为 $T(x, y) = \sum_{B \subseteq A} (x-1)^{r-r(B)} (y-1)^{|B|-r(B)}$,其中 B 为 A 的所有中心子构形。

定义 5 图 $\Gamma = (V, E)$ 的 Tutte 多项式为

收稿日期: 2018-12-30

基金项目: 国家自然科学基金(11071010)

第一作者: 女, 1992 年生, 硕士生

* 通信联系人

E-mail: jianggf@mail.buct.edu.cn

$$T_{\Gamma}(x,y)=\sum_{A\subseteq E}(x-1)^{r(E)-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}$$

定义 6 带号图 $\Sigma=(V,E,\sigma)$ 的 Tutte 多项式为 $T_{\Sigma}(x,y,z)=\sum_{F\subseteq E}(x-1)^{r(E)-r(F)}(y-1)^{n(F)}(z-1)^{u(F)}$ [7], 其中 $r(F)$ 表示顶点数与 F 的平衡分支数之差, $n(F)$ 表示 F 的边数与 $r(F)$ 之差, $u(F)$ 表示 F 的非平衡分支数。

特别地, 有 $(x-1)^{-u(E)}T_{\Sigma}(x,y,(x-1)(y-1))=T_{\Gamma}(x,y)$ 。

因为图构形 A_{Σ} 的拟阵是图 Σ 的圈拟阵 [2], 所以带号图 Σ 的 Tutte 多项式等价于其对应带号图构形 A_{Σ} 的 Tutte 多项式。

对于带号图 Σ 的 Tutte 多项式 $T_{\Sigma}(x,y,z)$, 令 $x=1-t, y=0, z=0$, 可得其着色多项式 $\chi(\Sigma,t)$, 即 $\chi(\Sigma,t)=(-1)^{r(E)}t^{k(\Sigma)}T_{\Sigma}(1-t,0,0)$ 。而图的着色多项式等价于其所对应图构形的特征多项式 [1], 即 $\chi(\Sigma,t)=\chi(A,t)$ 。

本文主要运用如下定理和性质来计算一类图构形的 Tutte 多项式。

性质 1

- (1) (删除-收缩) 若 e 不是环, 也不是桥, 则 $T_{\Sigma}(x,y,z)=T_{\Sigma\setminus e}(x,y,z)+T_{\Sigma/e}(x,y,z)$;
- (2) 若 e 是一个桥, 则 $T_{\Sigma}(x,y,z)=xT_{\Sigma\setminus e}(x,y,z)$;
- (3) 若 e 是一个正环, 则 $T_{\Sigma}(x,y,z)=yT_{\Sigma/e}(x,y,z)$;
- (4) 若 e 是一个负环, 则 $T_{\Sigma}(x,y,z)=T_{\Sigma/e}(x,y,z)$ 。

性质 2 给定 2 个图 G 和 $H, G\cup H$ 表示 2 个图的并, $G * H$ 表示 2 个图的 1 点连, 则有 $T(G\cup H)=T(G)T(H), T(G * H)=T(G)T(H)$ 。

2 一类带号图的定义

本文研究的带号曲轮图和带号双半轮图的定义如图 1 所示。

3 带号曲轮图构形 Tutte 多项式及计算

3.1 带号曲轮图构形 Tutte 多项式

定理 1 当 $k_2\geq k_1\geq 3$ 时, 带号曲轮图 W_{k_1,k_2} 的 Tutte 多项式基图为 $V_{k_1,k_2}, M_{k_1,k_2}, N_{k_1,k_2}, N_{0,k_2}$ 和 M_{0,k_2} (图 2), 且带号图对应图构形的 Tutte 多项式为

$$T(W_{k_1,k_2})=(x+1)\sum_{i=0}^{k_1-2}T(V_{i,k_2})+y\sum_{i=0}^{k_1-3}T$$

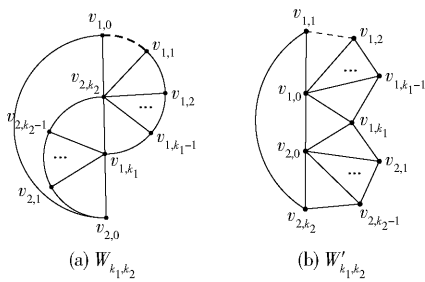


图 1 带号曲轮图 W_{k_1,k_2} 和带号双半轮图 W'_{k_1,k_2}
Fig. 1 Signed twisted wheels and signed double half-wheels

$$(V_{i,k_2})+y^2\sum_{i=0}^{k_1-4}T(V_{i,k_2})+y^3\sum_{i=0}^{k_1-5}T(V_{i,k_2})+\cdots+y^{k_1-3}[T(V_{0,k_2})+T(V_{1,k_2})]+y^{k_1-2}T(V_{0,k_2})+yx\sum_{i=0}^{k_1-4}T(M_{i,k_2})+yx^2\sum_{i=0}^{k_1-5}T(M_{i,k_2})+\cdots+yx^{k_1-4}[T(M_{0,k_2})+T(M_{1,k_2})]+yx^{k_1-3}T(M_{0,k_2})+(y+y^2)\sum_{i=0}^{k_1-3}T(M_{i,k_2})+(y+yx+yx^2+yx^3+\cdots+yx^{k_1-2})T(N_{0,k_2})+T(W_{1,k_2})$$
 (1)

图 2(a) 为带号曲轮图关于某条边缘上边的删除, 记为 V_{k_1,k_2} , 其中 k_1, k_2 分别表示右侧、左侧的三角形个数; 图 2(b) N_{0,k_2} 是 (k_2+1) -秩轮图边缘上有一条负边的图; B'_{k_2+2} 是 (k_2+2) -秩轮图 A_{k_2+2} 关于某条边缘上边的删除, 图 2(c) 是 B'_{k_2+2} 的边缘上有一条负边的图; M_{k_1,k_2}, N_{k_1,k_2} (图 2(d)、(e)) 的带边为

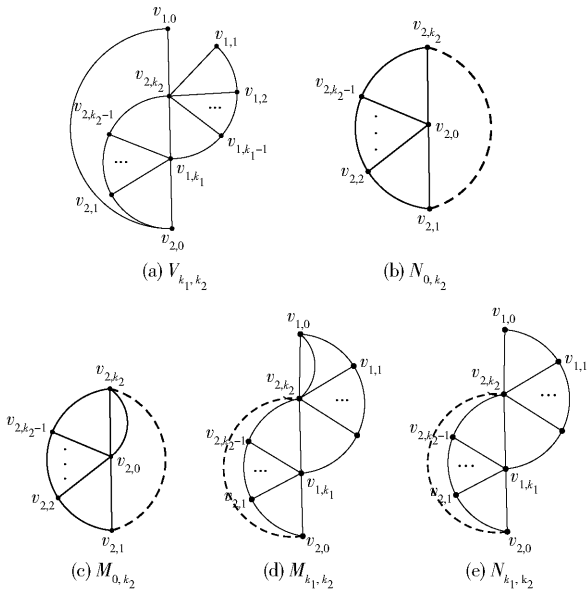


图 2 W_{k_1,k_2} 的基图

Fig. 2 Basic graphs of W_{k_1,k_2}

负边。

V_{k_1, k_2} 的基图为 V_{0, k_2} 、 V_{1, k_2} (图 3), 两个基图都有 $k_2 + 1$ 个三角形, 且都为正边, 因此它们的 Tutte 多项式可用普通图的删除-限制算法^[2]来计算。

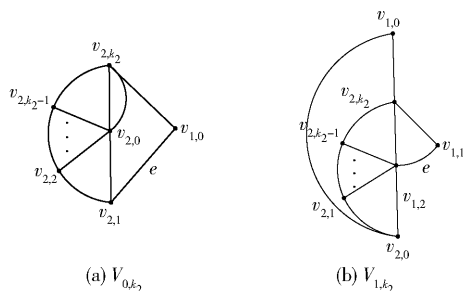


图 3 V_{k_1, k_2} 的基图

Fig. 3 Basic graphs of V_{k_1, k_2}

以下 5 个引理给出了计算定理 1 中几个基图的 Tutte 多项式的递推公式。

引理 1 当 $k_1 = 0$ 时, 初始图 V_{0, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V_{0, k_2}) = xT(B_{k_2}) + xyT(B_{k_2-1}) + xy^2T(B_{k_2-2}) + \dots + xy^{k_2-1}T(B_1) + xy^{k_2}(x+y) + T(B'_{k_2+2})$$

当 $k_1 = 1$ 时, 初始图 V_{1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V_{1, k_2}) = x^2T(B_{k_2}) + xT(A_{k_2+1}) + T(V_{0, k_2})$$

当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时, 基图 V_{k_1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V_{k_1, k_2}) = (x+1)T(V_{k_1-1, k_2}) + yT(V_{k_1-2, k_2}) + y^2T(V_{k_1-3, k_2}) + \dots + y^{k_1-2}T(V_{1, k_2}) + y^{k_1-1}T(V_{0, k_2}) \quad (2)$$

N_{0, k_2} 的基图 P_{k_2} 中含有 $k_2 + 2$ 条负边, 且每个三角形都有 2 条负边和 1 条正边 (除重边), 如图 4 所示。

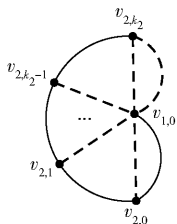


图 4 N_{0, k_2} 的基图 P_{k_2}

Fig. 4 Basic graphs of N_{0, k_2}

引理 2 当 $k_1 = 0$ 时, N_{0, k_2} 的基图为 P_{k_2} , 且有

$$T(P_{k_2}) = T(B_{k_2}) + yT(B_{k_2-1}) + \dots + y^{k_2-1}T(B_1) + T(P_{k_2-1})$$

因 N_{0, k_2} 的初始图 $N_{0, 2}$ 含有 1 条负边, 通过计算可得 $N_{0, 2}$ 的 Tutte 多项式分别为

$$T(N_{0, 2}) = x^3 + 2x^2 + 2xy + x + 2y + y^2 + z^2 + 3z + 3$$

当 $k_2 \geq 3$ 时, N_{0, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(N_{0, k_2}) = T(B_{k_2}) + T(P_{k_2-2}) + T(N_{0, k_2-1}) \quad (3)$$

引理 3 当 $k_2 \geq 3$ 时, M_{0, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(M_{0, k_2}) = yT(P_{k_2-1}) + T(N_{0, k_2}) \quad (4)$$

引理 4 当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时, N_{k_1-1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(N_{k_1-1, k_2}) = x^{k_1-1}T(N_{0, k_2}) + x^{k_1-2}T(M_{0, k_2}) + x^{k_1-3}T(M_{1, k_2}) + \dots + xT(M_{k_1-3, k_2}) + T(M_{k_1-2, k_2}) \quad (5)$$

引理 5 当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时, M_{k_1-1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(M_{k_1-1, k_2}) = x^{k_1-1}T(N_{0, k_2}) + x^{k_1-2}T(M_{0, k_2}) + x^{k_1-3}T(M_{1, k_2}) + \dots + xT(M_{k_1-3, k_2}) + T(M_{k_1-2, k_2}) + yT(M_{k_1-2, k_2}) \quad (6)$$

3.2 带号曲轮图构形 Tutte 多项式的计算

将公式 (1) ~ (6) 联立, 计算得出当 $k_1 = 3, k_2 = 3, 4$ 时带号图 W_{k_1, k_2} 的 Tutte 多项式分别为

$$T(W_{3, 3}) = x^7 + 7x^6 + 7x^5y + 22x^5 + 6x^4y^2 + 34x^4y + 41x^4 + 5x^3y^3 + 34x^3y^2 + 73x^3y + 49x^3 + 4x^2y^4 + 25x^2y^3 + 70x^2y^2 + 86x^2y + x^2z^2 + 3x^2z + 39x^2 + xy^5 + 11xy^4 + 41xy^3 + 68xy^2 + xyz^2 + 3xyz + 57xy + 3xz^2 + 9xz + 21x + 3y^5 + 13y^4 + 27y^3 + y^2z^2 + 3y^2z + 33y^2 + 3yz^2 + 9yz + 24y + 3z^2 + 9z + 9$$

$$T(W_{3, 4}) = x^8 + 8x^7 + 8x^6y + 29x^6 + 7x^5y^2 + 47x^5y + 64x^5 + 6x^4y^3 + 51x^4y^2 + 125x^4y + 97x^4 + 5x^3y^4 + 46x^3y^3 + 142x^3y^2 + 198x^3y + 103x^3 + 4x^2y^5 + 32x^2y^4 + 115x^2y^3 + 209x^2y^2 + 196x^2y + x^2z^2 + 3x^2z + 73x^2 + xy^6 + 14xy^5 + 62xy^4 + 133xy^3 + 166xy^2 + xyz^2 + 3xyz + 111xy + 3xz^2 + 9xz + 31x + 4y^6 + 19y^5 + 46y^4 + 68y^3 + y^2z^2 + 3y^2z + 63y^2 + 3yz^2 + 9yz + 34y + 3z^2 + 9z + 9$$

结果发现含 z 的项和常数项的系数固定。

由 $\chi(A(\Sigma), t) = \chi(\Sigma, t) = (-1)^{r(E)} t^{k(\Sigma)} T_\Sigma(1-t, 0, 0)$, 得到当 $k_1 = 3, k_2 = 3, 4$ 时 W_{k_1, k_2} 对应图构形的特征多项式分别为

$$\chi(W_{3, 3}, t) = t^8 - 14t^7 + 85t^6 - 291t^5 + 608t^4 - 778t^3 + 569t^2 - 189t$$

$$\chi(W_{3, 4}, t) = t^9 - 16t^8 + 113t^7 - 462t^6 + 1202t^5 - 2047t^4 + 2235t^3 - 1432t^2 + 415t$$

进而, 因超平面构形 OS 代数的 $i (i = 1, 2, \dots)$ 次子代数的维数等于特征多项式系数的绝对值^[1], 由此可知曲轮图构形 OS 代数的 $i (i = 1, 2, \dots, 9)$ 次子代数维数如表 1 所示。

表 1 $k_1=3, k_2=3, 4$ 时 W_{k_1, k_2} 对应图构形的 OS 代数维数
Table 1 Dimensions of the OS algebra of graphic arrangements
 W_{k_1, k_2} for $k_1=3, k_2=3, 4$

图构形	W_{k_1, k_2} 子代数维数								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$W_{3,3}$	1	14	85	291	608	778	569	189	–
$W_{3,4}$	1	16	113	462	1202	2047	2235	1432	415

4 带号双半轮图构形的 Tutte 多项式及计算

4.1 带号双半轮图构形的 Tutte 多项式

定理 2 当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时, 设带号双半轮图 W'_{k_1, k_2} 的 Tutte 多项式基图为 K_{k_1, k_2} 、 V'_{k_1, k_2} 、 H_{k_1-2, k_2} 、 U_{k_1-1, k_2} 和 V''_{k_1, k_2} , 且带号双半轮图对应图构形的 Tutte 多项式为

$$\begin{aligned} T(W'_{k_1, k_2}) = & (x+1)T(V'_{k_1-1, k_2}) + yT(V'_{k_1-2, k_2}) + \\ & y^2T(V'_{k_1-3, k_2}) + \cdots + y^{k_1-3}T(V'_{2, k_2}) + y^{k_1-2}T(V'_{2, k_2}/e) + \\ & y[T(H_{1, k_2}) + T(H_{2, k_2}) + \cdots + T(H_{k_1-2, k_2})] + [T(U_{2, k_2}) + \\ & T(U_{3, k_2}) + \cdots + T(U_{k_1-1, k_2})] + T(V''_{2, k_2}) \end{aligned}$$

(7)

带号双半轮图 W'_{k_1, k_2} 的 Tutte 多项式基图如图 5 所示。带号双半轮图关于带边的删除记为 K_{k_1, k_2} , 它有 k_1+k_2 个三角形; H_{k_1-2, k_2} 含有 2 条负边; U_{k_1-1, k_2} 是 (k_2+2) -秩轮图 A_{k_2+2} 的导出图; V''_{2, k_2} 是 (k_2+2) -

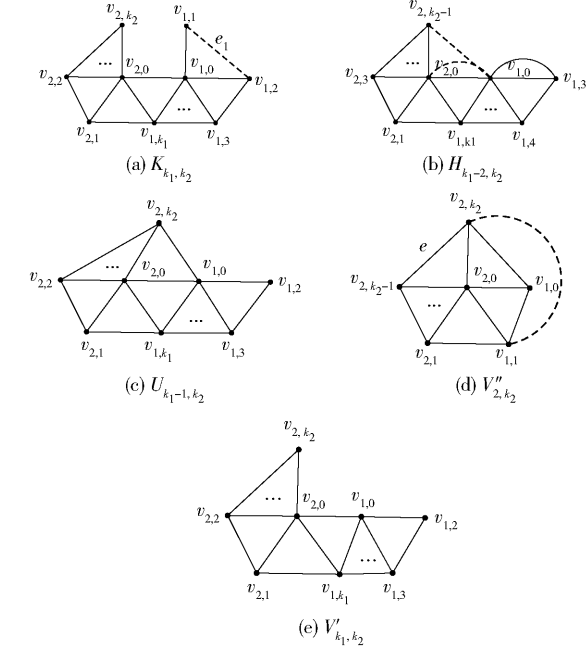


图 5 W'_{k_1, k_2} 的基图
Fig. 5 Basic graphs of W'_{k_1, k_2}

秩轮图 A_{k_2+2} 上加了 1 条负边; V'_{k_1, k_2} 是带有 k_1+k_2 个三角形的简单图。

V'_{k_1, k_2} 的基图如图 6 所示。 V'_{1, k_2} 、 V'_{2, k_2} 均是带有正边的图, 因此它们的 Tutte 多项式可用普通图的删除-限制算法来计算。 K_{k_1, k_2} 的基图 $K_{2, k_2}/e$ 是带有 1 条负边的图(图 7)。

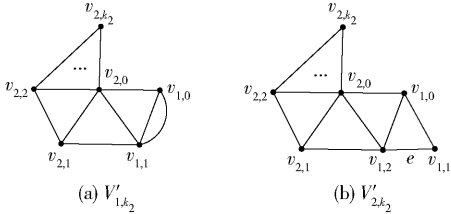


图 6 V'_{k_1, k_2} 的基图
Fig. 6 Basic graphs of V'_{k_1, k_2}

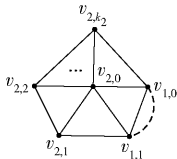


图 7 K_{k_1, k_2} 的基图
Fig. 7 Basic graphs of K_{k_1, k_2}

以下 4 个引理主要给出了计算定理 2 中几个基图 Tutte 多项式的递推公式。

引理 6 当 $k_1=1$ 时, 初始图 V'_{1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V'_{1, k_2}) = T(B_{k_2+1}) + yT(B_{k_2}) + y^2T(B_{k_2-1}) + \cdots + y^{k_2}T(B_1) + y^{k_2+1}(x+y)$$

当 $k_1=2$ 时, 初始图 V'_{2, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V'_{2, k_2}) = xT(B_{k_2+1}) + T(V'_{1, k_2})$$

当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时, 基图 V'_{k_1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V'_{k_1, k_2}) = (x+1)T(V'_{k_1-1, k_2}) + yT(V'_{k_1-2, k_2}) + y^2T(V'_{k_1-3, k_2}) + \cdots + y^{k_1-3}T(V'_{2, k_2}) + y^{k_1-2}T(V'_{1, k_2})$$

(8)

当 $k_1=2$ 时, 初始图 $K_{2, k_2}/e$ 的 Tutte 多项式为

$$T(K_{2, k_2}/e) = T(B_{k_2+1}) + yT(B_{k_2}) + y^2T(B_{k_2-1}) + \cdots + y^{k_2}T(B_1) + y^{k_2+1}(z+1)$$

当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时, 带号图 K_{k_1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(K_{k_1, k_2}) = (x+1)T(V'_{k_1-1, k_2}) + T(V'_{k_1-2, k_2}) + T(V'_{k_1-3, k_2}) + \cdots + T(V'_{3, k_2}) + T(V'_{2, k_2}) + T(K_{2, k_2}/e)$$

(9)

H_{k_1-2, k_2} 的基图如图 8 所示, H_{1, k_2} 含有两条负边, k_2+1 个三角形。首先将图 H_{1, k_2} 右边的重边 e 进行删除-收缩, 在后期计算过程中需要将其中的负

边符号转换为正边之后,再进行普通图的删除-收缩操作。

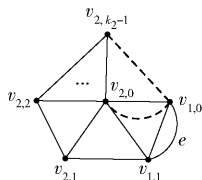


图 8 H_{k_1-2, k_2} 的基图

Fig. 8 Basic graphs of H_{k_1-2, k_2}

引理 7 当 $k_1 = 3$ 时,图 H_{k_1-2, k_2} 的 Tutte 多项式的基图为 H_{1, k_2} , 且

$$T(H_{1, k_2}) = T(A_{k_2+1}) + yT(A_{k_2}) + T(P_{k_2-1}) + 2yT(P_{k_2-2})$$

当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时,基图 H_{k_1-2, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(H_{k_1-2, k_2}) = x^{k_1-3} T(B'_{k_2+2}) + x^{k_1-4} T(H_{1, k_2}) + x^{k_1-5} T(H_{2, k_2}) + \cdots + x^2 T(H_{k_1-5, k_2}) + xT(H_{k_1-4, k_2}) + T(H_{k_1-3, k_2}) \quad (10)$$

U_{k_1-1, k_2} 的基图如图 9 所示。 U_{2, k_2} 、 $U_{2, k_2}/e$ 亦均是带有正边的图,可直接利用普通图的删除-收缩算法进行 Tutte 多项式计算。

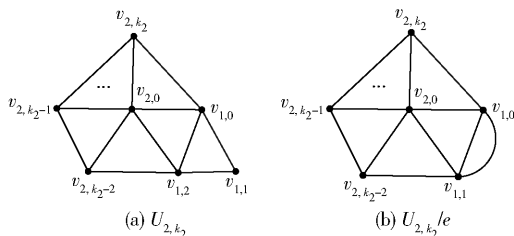


图 9 U_{k_1-1, k_2} 的基图

Fig. 9 Basic graphs of U_{k_1-1, k_2}

引理 8 当 $k_1 = 2$ 时,图 U_{k_1-1, k_2} Tutte 多项式的基图为 U_{2, k_2} 、 $U_{2, k_2}/e$, 且

$$\begin{cases} T(U_{2, k_2}) = (x+1)T(A_{k_2+2}) + yT(B'_{k_2+2}) \\ T(U_{2, k_2}/e) = T(A_{k_2+2}) + yT(B'_{k_2+2}) \end{cases}$$

当 $k_2 \geq k_1 \geq 3$ 时,基图 U_{k_1-1, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(U_{k_1-1, k_2}) = (x+1)T(U_{k_1-2, k_2}) + yT(U_{k_1-3, k_2}) + y^2 T(U_{k_1-4, k_2}) + \cdots + y^{k_1-4} T(U_{2, k_2}) + y^{k_1-3} T(U_{2, k_2}/e) \quad (11)$$

图 V''_{2, k_2} 的基图如图 10 所示。 I_{k_2} 含有 1 条负边和 k_2 个三角形,考虑将其边缘上的边进行删除-收缩后得到公式 (12); G_{k_2-1} 可直接运用普通图的删除-收缩操作得到公式 (13); L_{k_2-3} 的 Tutte 多项式计算过程中需要将负边符号转换为正边之后再行普通图的删除-收缩操作。

引理 9 当 $k_1 = 2$ 时,图 V''_{2, k_2} Tutte 多项式的基图为 G_{k_2-1} 、 I_{k_2} 、 L_{k_2-3} 和 $V''_{2,1}$, 且有

$$T(I_{k_2}) = (x+1)T(I_{k_2-1}) + yT(I_{k_2-2}) + \cdots + y^{k_2-3} T(I_2) + y^{k_2-2} T(H_2) \quad (12)$$

$$T(G_{k_2-2}) = x^{k_2-2} (x+y) + x^{k_2-3} (x+y+y^2) + x^{k_2-4} T(G_2) + \cdots + xT(G_{k_2-4}) + (1+y)T(G_{k_2-3}) \quad (13)$$

I_{k_2} 的基图 H_2 、 I_2 如图 11 所示。

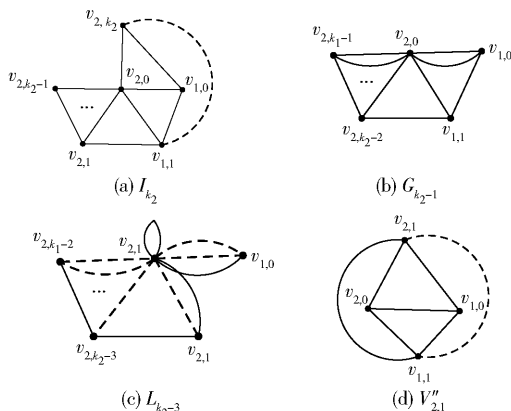


图 10 V''_{2, k_2} 的基图

Fig. 10 Basic graphs of V''_{2, k_2}

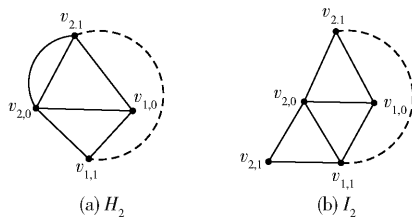


图 11 I_{k_2} 的基图

Fig. 11 Basic graphs of I_{k_2}

经过计算,可知有

$$\begin{cases} T(H_2) = T(N_{0,2}) + y(x+y)(z+1) + y(z+1+y+y^2) \\ T(V''_{2,1}) = T(N_{0,2}) + (x+y)^2 + x+y+y^2+y^3 \\ T(I_2) = xT(N_{0,2}) + T(H_2) \\ T(L_{00}) = x(x+y) + y \\ T(L_0) = y(z+y+1)^2 \end{cases}$$

则当 $k_2 \geq 3$ 时,基图 V''_{2, k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(V''_{2, k_2}) = T(I_{k_2}) + T(I_{k_2-1}) + \cdots + T(I_2) + y[T(G_{k_2-1}) + T(G_{k_2-2}) + \cdots + T(G_1)] + T(L_{k_2-3}) + T(I_{k_2-4}) + \cdots + T(L_0) + T(L_{00}) + T(V''_{2,1}) \quad (14)$$

4.2 带号双半轮图构形 Tutte 多项式的计算

将公式 (7) ~ (14) 联立, 计算得到当 $k_1 = 3$,

$k_2 = 3, 4$ 时,带号图 W'_{k_1,k_2} 的 Tutte 多项式为

$$T(W'_{3,3}) = x^7 + 7x^6 + 6x^5y + 22x^5 + 5x^4y^2 + 32x^4y + 40x^4 + 4x^3y^3 + 32x^3y^2 + 74x^3y + 45x^3 + 3x^2y^4 + 28x^2y^3 + 76x^2y^2 + x^2yz + 94x^2y + x^2z^2 + 3x^2z + 33x^2 + 3xy^5 + 21xy^4 + 59xy^3 + 2xy^2z + 91xy^2 + 3xyz + 61xy + 3xz^2 + 9xz + 18x + 4y^6 + 12y^5 + 32y^4 + y^3z + y^2z^2 + 50y^3 + 5y^2z + 43y^2 + 2yz^2 + 7yz + 19y + 3z^2 + 9z + 9$$

$$T(W'_{3,4}) = x^8 + 8x^7 + 7x^6y + 29x^6 + 6x^5y^2 + 44x^5y + 63x^5 + 5x^4y^3 + 49x^4y^2 + 122x^4y + 90x^4 + 4x^3y^4 + 46x^3y^3 + 149x^3y^2 + 197x^3y + 85x^3 + 4x^2y^5 + 40x^2y^4 + 137x^2y^3 + 234x^2y^2 + x^2yz + 195x^2y + x^2z^2 + 3x^2z + 52x^2 + 8xy^6 + 30xy^5 + 97xy^4 + 183xy^3 + 2xy^2z + 199xy^2 + 3xyz + 103xy + 3xz^2 + 9xz + 22x + 4y^7 + 18y^6 + 45y^5 + 87y^4 + 104y^3 + y^3z + 5y^2z + 69y^2 + 2yz^2 + 7yz + 23y + 3z^2 + 9z + 9$$

结果发现含 z 的项和常数项的系数固定,对于其他项的系数规律还待进一步探讨。

由 $\chi(A(\Sigma), t) = \chi(\Sigma, t) = (-1)^{r(E)} t^{k(\Sigma)} T_\Sigma(1-t, 0, 0)$ 得到,当 $k_1 = 3, k_2 = 3, 4$ 时 W'_{k_1,k_2} 对应图构形的特征多项式如下

$$\chi(W'_{3,3}, t) = t^8 - 14t^7 + 85t^6 - 290t^5 + 600t^4 - 754t^3 + 538t^2 - 175t$$

$$\chi(W'_{3,4}, t) = t^9 - 16t^8 + 113t^7 - 461t^6 + 1190t^5 - 1991t^4 + 2108t^3 - 1294t^2 + 359t$$

进而,因超平面构形 OS 代数的 $i(i = 1, 2, \cdots)$ 次子代数的维数等于特征多项式系数的绝对值,由此可知曲轮图构形 OS 代数的 $i(i = 1, 2, \cdots, 9)$ 次子代数维数如表 2 所示。

表 2 $k_1 = 3, k_2 = 3, 4$ 时 W'_{k_1,k_2} 对应图构形 OS 代数的维数
Table 2 Dimensions of the OS algebra of graphic arrangements W'_{k_1,k_2} for $k_1 = 3, k_2 = 3, 4$

图构形	W'_{k_1,k_2} 子代数维数								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$W'_{3,3}$	1	14	85	290	600	754	538	175	-
$W'_{3,4}$	1	16	113	461	1190	1991	2108	1294	359

5 Tutte 多项式在半螺旋双吸泵优化设计方面的应用

双吸泵广泛应用于各种输送液体的场合,由于其功率和流量大,对效率 and 设计性能要求较高。而图构形的 Tutte 多项式可用于研究其内部结构

形式,通过全流道数值模拟分析导流板对排水性能的影响。由于双吸泵模型复杂,将其划分为混合网格,计算模型共有约 180 万个网络单元,如图 12 所示。

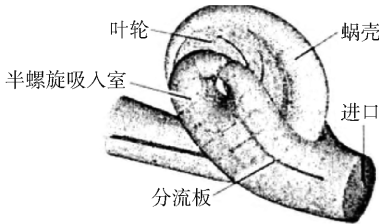


图 12 计算区域及网格

Fig. 12 Computational domain and unstructured mesh

将双吸泵内部结构转化成平面图,如图 13 中 W_1, W_2, W_3 所示,分流板为平面扇叶中的辐条,实线表示有分流板,虚线表示无分流板。

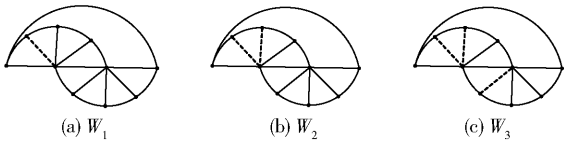


图 13 半螺旋双吸泵平面图

Fig. 13 Planar graph of a double suction pump with a semi-volute

应用带号曲轮图 Tutte 多项式的计算公式(1),得到有 1 条虚线、2 条虚线和 3 条虚线 3 种不同内部结构的半螺旋双吸泵的 Tutte 多项式如式(15)~(17)所示。

$$T_1 = x^9 + 9x^8 + 9x^7y + 37x^7 + 8x^6y^2 + 62x^6y + 93x^6 + 7x^5y^3 + 71x^5y^2 + 194x^5y + 162x^5 + 6x^4y^4 + 69x^4y^3 + 244x^4y^2 + 368x^4y + 208x^4 + 5x^3y^5 + 58x^3y^4 + 232x^3y^3 + 461x^3y^2 + 468x^3y + 195x^3 + 4x^2y^6 + 39x^2y^5 + 170x^2y^4 + 393x^2y^3 + 531x^2y^2 + 395x^2y + x^2z^2 + 3x^2z + 123x^2 + xy^7 + 17xy^6 + 87xy^5 + 223xy^4 + 356xy^3 + 352xy^2 + xy^2z + 3xyz + 194xy + 3xz^2 + 9xz + 44x + 5y^7 + 26y^6 + 71y^5 + 125y^4 + 146y^3 + y^2z^2 + 3y^2z + 109y^2 + 3yz^2 + 9yz + 47y + 3z^2 + 9z + 9 \quad (15)$$

$$T_2 = x^9 + 9x^8 + 8x^7y + 37x^7 + 7x^6y^2 + 59x^6y + 92x^6 + 5x^5y^3 + 67x^5y^2 + 196x^5y + 154x^5 + 4x^4y^4 + 64x^4y^3 + 252x^4y^2 + 382x^4y + 180x^4 + 4x^3y^5 + 61x^3y^4 + 258x^3y^3 + 508x^3y^2 + 470x^3y + 144x^3 + 7x^2y^6 + 58x^2y^5 + 228x^2y^4 + 491x^2y^3 + 595x^2y^2 + 351x^2y + 72x^2 + 72x^2 + 10xy^7 + 56xy^6 + 179xy^5 + 352xy^4 + 462xy^3 + 369xy^2 + 141xy + 17x + 8y^8 + 45y^7 + 104y^6 + 166y^5 + 198y^4 + 172y^3 + 86y^2 + 17y \quad (16)$$

$$T_3 = x^9 + 9x^8 + 8x^7y + 37x^7 + 7x^6y^2 + 58x^6y + 92x^6 + 6x^5y^3 + 67x^5y^2 + 188x^5y + 154x^5 + 5x^4y^4 + 68x^4y^3 + 246x^4y^2 + 360x^4y + 180x^4 + 5x^3y^5 + 62x^3y^4 + 256x^3y^3 + 485x^3y^2 + 446x^3y + 144x^3 + 9x^2y^6 + 53x^2y^5 + 217x^2y^4 + 466x^2y^3 + 568x^2y^2 + x^2yz + 352x^2y + x^2z^2 + 3x^2z + 75x^2 + 8xy^7 + 47xy^6 + 143xy^5 + 320xy^4 + 447xy^3 + 2xy^2z + 370xy^2 + 3xyz^2 + 3xyz + 152xy + 3xz^2 + 9xz + 26x + 22y^8 + 22y^7 + 65y^6 + 133y^5 + 196y^4 + y^3z + 184y^3 + 5y^2z + 99y^2 + 2yz^2 + 7yz + 27y + 3z^2 + 9z + 9 \quad (17)$$

进而得到 W_1 、 W_2 、 W_3 对应图构形的特征多项式如式(18)~(20)所示。

$$\chi(W_1, t) = t^{10} - 18t^9 + 145t^8 - 688t^7 + 2127t^6 - 4464t^5 + 6390t^4 - 6036t^3 + 3415t^2 - 881t \quad (18)$$

$$\chi(W_2, t) = t^{10} - 18t^9 + 145t^8 - 687t^7 + 2113t^6 - 4381t^5 + 6127t^4 - 5569t^3 + 2975t^2 - 706t \quad (19)$$

$$\chi(W_3, t) = t^{10} - 18t^9 + 145t^8 - 687t^7 + 2113t^6 - 4381t^5 + 6127t^4 - 5572t^3 + 2990t^2 - 727t \quad (20)$$

6 结束语

本文研究了带号曲轮图构形和带号双半轮图构形的 Tutte 多项式,给出计算结果,发现这两种轮式图的 Tutte 多项式不相同,由此说明这两种图是不同构的。本文开始动机是寻找这类图的 Tutte 多项式的一般表达式,但由于其计算的复杂度和时间问题,尚待以后进一步探讨。

Tutte polynomials of a class of signed graphic arrangements

SUN GuiYan CHEN WenJuan JIANG GuangFeng*

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Tutte polynomials of twisted wheels with a negative edge and double half-wheels with a negative edge have been studied. The Tutte polynomials of signed twisted wheels and signed double half-wheels have been calculated by using the deletion-restriction theorem of signed graphs. By using the transformation function in the deletion-restriction theorem of signed graphs, several regular basic graphs have been found. Recursive formulas of Tutte polynomials for these basic graphs have been derived. Then the Tutte polynomials of this class of signed graphs are obtained with the aid of computation. Furthermore, the characteristic polynomials of the class of signed graphs have been obtained. Finally, the OS algebraic dimension of this class of signed graphic arrangements was obtained. Using the results, the Tutte polynomials of a double suction pump with semi-volutes for three different internal structures were calculated.

Key words: signed graphic arrangements; signed twisted wheels; signed double half-wheels; Tutte polynomial

(责任编辑:汪 琴)

参考文献:

- [1] ORLIK P, TERAOKA H. Arrangements of hyperplanes [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [2] ESCHENBRENNER C J, FALK M J. Graphs and matroids determined by their Tutte polynomials [J]. J Alg Comb, 2003, 10(2): 189-199.
- [3] 初丽丽, 姜广峰. 一类图构形的 Orlik-Solomon 代数及 Tutte 多项式 [J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2009, 36(5): 116-120.
CHU L L, JIANG G F. Orlik-Solomon algebras and Tutte polynomials [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2009, 36(5): 116-120. (in Chinese)
- [4] 李爱民, 姜广峰. 一类碳纳米管状图的 Tutte 多项式 [J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2011, 38(1): 130-135.
LI A M, JIANG G F. Tutte polynomials of a class of carbon nanotube-like graph [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2011, 38(1): 130-135. (in Chinese)
- [5] AMAND H. The Tutte polynomial formula for the class of twisted wheel graphs [D]. Oxford: The University of Mississippi, 2014.
- [6] DUAN Y H, WU H D, YU Q L. On Tutte polynomial uniqueness of twisted wheels [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 926-936.
- [7] ARDILA F. Computing the Tutte polynomial of a hyperplane arrangement [J]. Pacific J Math, 2007, 230(1): 1-26.