引用格式:孙颖,陈亚洲. 可压缩气液两相流的一维流动分析[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2019,46(3):117 - 122.
SUN Ying, CHEN YaZhou. The flow for 1D compressible two-phase fluids for an immiscible gas-liquid [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2019,46(3):117 - 122.

可压缩气液两相流的一维流动分析

孙 颖 陈亚洲*
(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要:讨论了一类具有非光滑自由能密度的一维黏性可压缩 Navier - Stokes - Allen - Cahn(NSAC)方程组的周期边值问题,对于初始密度不含真空的任意初值,采用光滑逼近并结合能量估计的方法,通过构造近似方程,证明了该方程组整体解的存在唯一性。

关键词:Navier - Stokes - Allen - Cahn(NSAC)方程组; 周期解; 存在唯一性; 非光滑自由能密度
中图分类号:O29 **DOI**:10.13543/j.bhxbzr.2019.03.018

引 言

气液两相流是流体动力学的研究范畴之一,被广泛应用于化工材料、大气海洋、航天航空等诸多领域,随着生物、能源与环境保护工程的发展,其理论研究日益得到重视。

Matsumura 和 Nishihara[1]首先证明了初始小扰动条件下单一流体流动的可压缩 Navier - Stokes (NS)方程组三维整体解的存在唯一性及渐进稳定性,其后这一问题得到了进一步的研究[2-3]。在气液两相流的流动中,由于气液物质属性的差别,它们的分布对流场有重大影响,因此需要深刻认识两种流体间界面的扩散运动。由于流相界面的复杂性,对于互不相溶的两相流,其数学模型的建立和分析要远远落后于单一流体。Van der Waals[4]第一次把互不相溶两相流之间的界面看成是一个边界层;沿着这一方向,Cahn 和 Allen[5]对气液两相流引入界面自由能,提出了刻画气液两相流界面运动的 Allen - Cahn 方程;Blesgen[6]进一步将描述流体流动的 NS 方程组与 Allen - Cahn 方程相结合,建立了气液两相流流动的 Navier - Stokes - Allen - Cahn(NSAC)方程组;Feireisl 等[7]运用 Lions[8]的证明框架得到了 NSAC 方程组重整化弱解的整体存在性;Kotschote 等[9]讨论了 NSAC 方程组解的局部存在性。此后 Ding 等[10]证明了 NSAC 方程组对光滑自由能密度一维初边值问题解的整体存在性,而对于在化学反应工程和石油、天然气等低沸点液体传输中出现的气液混合物的流动,则需要用非光滑自由能密度模型[11-12]来描述。本文针对这一类非光滑自由能密度,通过构造近似方程,采用光滑逼近结合能量估计的方法,证明了对于初始密度不为零的任意初值,一维 NSAC 方程组周期边值问题整体解是存在唯一的,且其组分浓度差落在有物理意义的区间内,即$\chi \in [-1,1]$。该研究成果将为气液两相流界面的模拟计算和实验分析提供必要的理论支撑。

1 问题的提出

气液两相流的流动通常由 NSAC 非线性偏微分方程组刻画

$$\begin{cases}\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0\\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) = \mathrm{div}\widetilde{\boldsymbol{T}}\\ \partial_t(\rho\chi) + \mathrm{div}(\rho u\chi) = \dfrac{\delta}{\rho}\Delta\chi - \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial f}{\partial\chi}\end{cases} \tag{1}$$

式(1)中,ρ、u、χ 分别表示气液混合物密度、速度及组分的浓度差,δ 表示气液扩散界面的厚度,$\widetilde{\boldsymbol{T}}$ 为 Cauchy 应力张量,f 为自由能密度,且满足

收稿日期:2018-09-13
基金项目:国家自然科学基金(11671027)
第一作者:女,1993 年生,硕士生
*通信联系人
E-mail:chenyz@mail.buct.edu.cn

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{S}-\delta\left(\nabla\chi\otimes\nabla\chi-\dfrac{|\nabla\chi|^2}{2}\boldsymbol{I}\right)-p(\rho,\chi)\boldsymbol{I}\\ f(\chi)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2, & -1\leqslant\chi\leqslant1\\ +\infty, & \text{其他}\end{cases}\end{cases}\tag{2}$$

式(2)中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,$\boldsymbol{S}$ 为 Newton 黏性应力,p 为压力项,且满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}=\upsilon\left(\nabla u+\nabla^{\mathrm{T}}u-\dfrac{2}{3}\mathrm{div}u\boldsymbol{I}\right)+\eta\mathrm{div}u\boldsymbol{I}\\ p=a\rho^r\end{cases}$$

式中,$\upsilon>0$,$\eta>0$,常数项 $a>0$,$r>0$。

组分浓度差 χ 满足

$$\chi=\chi_1-\chi_2\tag{3}$$

式(3)中,$\chi_i=M_i/M(i=1,2)$为第 i 种组分的质量分数,M_i 为具有体积 V 的两相流中第 i 种组分的质量,M 为具有体积 V 的两相流质量。当 $\chi\notin[-1,1]$ 时,关于 f 的导数在次微分意义下成立。

本文考虑如下一维可压缩 NSAC 方程组周期边值问题

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0\\ \rho u_t+\rho uu_x+p_x=\upsilon u_{xx}-\dfrac{\delta}{2}(\chi_x^2)_x\\ \rho\chi_t+\rho u\chi_x=\dfrac{\delta}{\rho}\chi_{xx}-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial f}{\partial\chi}\end{cases}\tag{4}$$

式(4)满足初值条件

$$(\rho,u,\chi)|_{t=0}=(\rho_0(x),u_0(x),\chi_0(x))\tag{5}$$

同时满足周期边界条件

$$(\rho,u,\chi)(x+2L,t)=(\rho,u,\chi)(x,t)\tag{6}$$

式中$(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$,$L>0$。定义密度 ρ 在$[0,2L]$上的均值 $\bar{\rho}=\dfrac{1}{2L}\int_0^{2L}\rho\mathrm{d}x$,由式(4)的第一个式子和式(6)得到

$$\int_0^{2L}\rho(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{2L}\rho_0(x)\mathrm{d}x$$

定义 $L^2(R)$的周期函数空间为

$$L^2_{\mathrm{per}}=\{g\mid g(x)=g(x+2L),x\in\mathbb{R},g(x)\in L^2(0,2L)\}$$

其范数可表示为

$$\|g\|=\left(\int_0^{2L}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $H^l_{\mathrm{per}}(l\geqslant0)$为 L^2_{per}可积且其导数$\partial^j_xg(j=1,2,\cdots,l)$也 L^2_{per}可积的函数全体,其范数记为

$$\|g\|_l=\left(\sum_{j=0}^{l}\|\partial^j_xg\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

式(5)中初值满足如下假设条件

$$\begin{cases}(\rho_0,u_0)\in H^1_{\mathrm{per}},\ \chi_0\in H^2_{\mathrm{per}}\\ \rho_0>0,\ -1\leqslant\chi_0\leqslant1\\ \chi_t(x,0)=-u_0\chi_{0x}+\dfrac{\delta}{\rho_0^2}\chi_{0xx}-\dfrac{1}{\delta\rho_0}(\chi_0^3-\chi_0)\end{cases}\tag{7}$$

定理 1 设初值(ρ_0,u_0,χ_0)满足式(7),则方程组(4)存在唯一的全局解(ρ,u,χ),对任意的时间 T,都存在正常数 C 和 B,且满足

$$\begin{cases}\rho\in L^\infty(0,T;H^1_{\mathrm{per}}),\ 0<\rho\leqslant B\\ \rho_t\in L^\infty(0,T;L^2_{\mathrm{per}})\\ u\in L^\infty(0,T;H^1_{\mathrm{per}})\cap L^2(0,T;H^2_{\mathrm{per}})\\ u_t\in L^2(0,T;L^2_{\mathrm{per}})\\ \chi\in L^\infty(0,T;H^2_{\mathrm{per}})\cap L^2(0,T;H^3_{\mathrm{per}})\\ \chi_t\in L^\infty(0,T;L^2_{\mathrm{per}})\cap L^2(0,T;H^1_{\mathrm{per}}),\ -1\leqslant\chi\leqslant1\end{cases}$$

式(4)同时满足能量不等式

$$\sup_{t\in[0,T]}(\|(\rho_t+\chi_t)\|^2+\|(\rho,u)\|_1^2+\|\chi\|_2^2)+\int_0^T(\|u_t\|^2+\|\chi_t\|_1^2+\|u\|_2^2+\|\chi\|_3^2)\mathrm{d}t\leqslant C$$

定理 1 中的组分浓度差 χ 可以理解为混合流体的特征函数,假设流体 1 的特征函数 $\chi=1$,流体 2 特征函数 $\chi=-1$,那么流体 1、2 交界区域为两种流体的混合部分,其特征函数 $-1<\chi<1$ 所描述的恰好是两种流体的扩散界面。

定理 1 的证明需要克服两个困难,首先是自由能密度的非光滑性,本文采用构造近似方程并取光滑逼近的方法克服;其次是整体解的证明,需要得到密度和组分浓度差的上下界估计,本文首先采用路径积分结合能量估计得到密度的上下界估计,然后利用能量积分结合 $f(\chi)$ 的构造以及弱解的存在性得到组分浓度差的上下界估计。特别地,通过光滑逼近的方法对近似解取极限,得出 χ 一定落在有物理意义的区间,即 $-1\leqslant\chi\leqslant1$。

2 定理的证明

2.1 近似解的构造

首先,给出式(4)的弱解定义。如果有

$$\begin{cases}\rho(x,t)\in L^\infty((0,2L)\times(0,T)),u(x,t)\in L^2(0,T;H^1(0,2L))\\ \chi(x,t)\in L^2(0,T,H^2(0,2L)),\ -1\leqslant\chi\leqslant1\end{cases}$$

对任意的 $\varphi(x,t)\in C_c^\infty((0,2L)\times(0,T))$,都满足

$$\begin{cases}\int_0^T\int_0^{2L}(\rho\varphi_t+\rho u\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0\\ \int_0^T\int_0^{2L}\rho u\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^{2L}(\rho u^2+P)\varphi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\ \quad\int_0^T\int_0^{2L}\left(u_x-\dfrac{\chi_x^2}{2}\right)\varphi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \int_0^T\int_0^{2L}\dfrac{\delta}{\rho}\chi_{xx}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\dfrac{1}{\delta}\int_0^T\int_0^{2L}\dfrac{\partial f}{\partial\chi}(\chi)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\ \quad-\int_0^T\int_0^{2L}\rho\chi\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{cases}$$

则称$(\rho(x,t),u(x,t),\chi(x,t))$是方程组(4)的弱解。

其次,考虑方程组(4)的近似形式

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0\\ \rho u_t+\rho uu_x+p_x=\upsilon u_{xx}-\dfrac{\delta}{2}(\chi_x^2)_x\\ \rho\chi_t+\rho u\chi_x=\dfrac{\delta}{\rho}\chi_{xx}-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial\chi}\\ (\rho,u,\chi)(x+2L,t)=(\rho,u,\chi)(x,t)\\ (\rho,u,\chi)|_{t=0}=(\rho_0(x),u_0(x),\chi_0(x))\end{cases}\tag{8}$$

式(8)中f_λ满足

$$f_\lambda(\chi)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\lambda}\left[\chi-\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\right]^2+\dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2+\dfrac{\lambda}{24}, & \chi\geqslant1+\lambda\\ \dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2+\dfrac{(\chi-1)^3}{6\lambda^2}, & 1<\chi\leqslant1+\lambda\\ \dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2, & -1\leqslant\chi\leqslant1\\ \dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2-\dfrac{(\chi+1)^3}{6\lambda^2}, & -1-\lambda<\chi\leqslant-1\\ \dfrac{1}{2\lambda}\left[\chi+\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)\right]^2+\dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2+\dfrac{\lambda}{24}, & \chi\leqslant-1-\lambda\end{cases}$$

且有

$$\begin{cases}f_\lambda(\chi)\geqslant\dfrac{1}{4}(\chi^2-1)^2\\ \dfrac{\partial^2f_\lambda}{\partial\chi^2}(\chi)\begin{cases}=3\chi^2-1, & -1\leqslant\chi\leqslant1\\ \geqslant0, & \text{其他}\end{cases}\end{cases}\tag{9}$$

构造函数集合

$X_{\mathrm{per},(\widetilde{m},\widetilde{M})}([0,T])=\{(\rho,u,\chi)|(\rho,u)\in C^0(0,T;H^1_{\mathrm{per}})\chi\in C^0(0,T;H^2_{\mathrm{per}}),\inf_{x\in\mathbb{R}}\rho\geqslant\widetilde{m}>0,u\in L^\infty(0,T;H^1_{\mathrm{per}})\cap L^2(0,T;H^2_{\mathrm{per}}),\chi\in L^\infty(0,T;H^2_{\mathrm{per}})\cap L^2(0,T;H^3_{\mathrm{per}}),\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\|(\rho,u)\|_1,\|\chi\|_2\}\leqslant\widetilde{M}\}$

命题 1　(局部近似解存在性)

对固定的$\lambda>0$,任意$\widetilde{m}>0$和$\widetilde{M}>0$,如果初值(ρ_0,u_0,χ_0)满足$\sup_{x\in[0,2L]}\{\|(\rho,u)\|_1,\|\chi\|_2\}\leqslant\widetilde{M}$,且$\inf_{x\in\mathbb{R}}\rho\geqslant\widetilde{m}>0$,则存在$T_1=T_1(\rho_0,u_0,\chi_0)$,使得近似方程组(8)在$X_{\mathrm{per},(\widetilde{m},\widetilde{M})}([0,T_1])$中存在局部解$(\rho_\lambda,u_\lambda,\chi_\lambda)$。

2.2　全局弱解的存在性

命题 2　(全局弱解存在性)

如果初值(ρ_0,u_0,χ_0)满足假设条件式(7),则方程组(4)存在全局弱解(ρ,u,χ)。

引理 1　在命题 1 的假设下,对于任意给定的$T>0$,由近似方程组(8)得到能量估计

$$\int_0^{2L}\left(\frac{\rho u^2}{2}+\Phi(\rho)+\frac{1}{4\delta}\rho(\chi^2-1)^2+\frac{\delta}{2}\chi_x^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^{2L}(\upsilon u_x^2+\mu^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\tag{10}$$

式中

$$\begin{cases}\Phi(\rho)=\rho\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\dfrac{p(s)-p(\bar{\rho})}{s^2}\mathrm{d}s\\ \mu=\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial\chi}-\dfrac{\delta}{\rho}\chi_{xx}\end{cases}$$

证明　对式(8)的第二个式子乘以u,并在$(0,2L)$上积分,结合式(8)的第一个式子可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\frac{\rho u^2}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{2L}p_xu\mathrm{d}x+\int_0^{2L}\left(\upsilon u_x^2-\frac{\delta}{2}\chi_x^2u_x\right)\mathrm{d}x=0\tag{11}$$

对式(8)的第三个式子乘以μ,并在$(0,2L)$上积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\left(\frac{\delta}{2}\chi_x^2+\frac{1}{\delta}\rho f_\lambda\right)\mathrm{d}x+\int_0^{2L}\mu^2\mathrm{d}x=-\frac{\delta}{2}\int_0^{2L}u_x\chi_x^2\mathrm{d}x\tag{12}$$

构造$\Phi(\rho)=\rho\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\dfrac{p(s)-p(\bar{\rho})}{s^2}\mathrm{d}s$可知

$$\Phi(\rho)_t+(\Phi(\rho)u)_x+(p(\rho)-p(\bar{\rho}))u_x=0\tag{13}$$

对式(13)积分有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\Phi(\rho)\mathrm{d}x+\int_0^{2L}p(\rho)u_x\mathrm{d}x=0\tag{14}$$

将式(12)、式(14)代入式(11),然后在$(0,T)$上积分,得到式(10),引理 1 得证。

引理 2　在命题 1 的假设条件下,对于任意给定的$T>0$,都有$\|\rho\|_{L^\infty((0,2L)\times(0,T))}\leqslant C$。

证明　因$\int_0^{2L}\rho\mathrm{d}x=\int_0^{2L}\rho_0\mathrm{d}x$,由式(10)可得

$$|\chi(x,t)|\leqslant C\left|\int_0^{2L}\rho(y,t)(\chi(x,t)-\chi(y,t))\mathrm{d}y\right|+C\left|\int_0^{2L}\rho(y,t)\chi(y,t)\mathrm{d}y\right|\leqslant C\int_0^{2L}\chi_x^2\mathrm{d}x+C\leqslant C \tag{15}$$

由引理 1 有

$$\int_0^{2L}\Phi(\rho)\mathrm{d}x=\int_0^{2L}\rho\int_{\bar\rho}^{\rho}\frac{p(s)-p(\bar\rho)}{s^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}x=C\int_0^{2L}\rho^r\mathrm{d}x+C\int_0^{2L}\rho\ln\rho\mathrm{d}x+C\leqslant C$$

由 $\int_0^{2L}\rho\ln\rho\mathrm{d}x>-\dfrac{2L}{\mathrm{e}}$,得到

$$\int_0^{2L}\rho^r\mathrm{d}x\leqslant C \tag{16}$$

令 $w(x,t)=\int_0^t\left(u_x-\dfrac{\chi_x^2}{2}-\rho u^2-p\right)\mathrm{d}\tau+\int_0^x\rho_0u_0\mathrm{d}y$,则有

$$\begin{cases}w_t=u_x-\dfrac{\chi_x^2}{2}-\rho u^2-p\\ w_x=\rho u\end{cases} \tag{17}$$

结合引理 1、式(16)和式(17)得到

$$\int_0^{2L}(|w|+|w_x|)\mathrm{d}x\leqslant C+C\int_0^t\int_0^{2L}\rho^r\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant C \tag{18}$$

对任意$(y,s)\in(0,2L)\times(0,T)$,使得 $x(y,t)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(y,t)}{\mathrm{d}t}=u(x(y,t),t), & 0\leqslant t<s\\ x(y,s)=y, & 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

再令 $f=\exp\{w\}$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho f)(x(y,t),t)=\left(-\frac{\rho\chi_x^2}{2}-\rho^{\gamma+1}\right)f\leqslant 0 \tag{19}$$

由式(19)可得

$$\rho(y,s)f(y,s)\leqslant\rho(x(y,0))f(x(y,0),0)\leqslant C$$

从而由式(18)得到

$$\rho(y,s)\leqslant C\exp\{\|w\|_{L^\infty((0,2L)\times(0,T))}\}\leqslant C \tag{20}$$

对任意 $T>0$,将式(8)的第三个式子化为

$$\frac{\delta}{\rho}\chi_{xx}=\frac{1}{\delta}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\chi}-\mu \tag{21}$$

式(21)两边乘以χ_{xx}并在$[0,2L]\times[0,T]$上积分,得到

$$\int_0^T\int_0^{2L}\frac{\delta}{\rho}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^{2L}\frac{1}{\delta}\frac{\partial^2f_\lambda}{\partial\lambda^2}\chi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant-\int_0^{2T}\int_0^{2L}\mu\chi_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^{2L}\frac{\delta}{\rho}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^{2L}\frac{\rho}{\delta}\mu^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^{2L}\frac{\delta}{\rho}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C \tag{22}$$

结合式(9)、(10)、(15)、(20)、(22)有

$$\int_0^T\int_0^{2L}\frac{\delta}{\rho}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^T\int_0^{2L}|3\chi^2-1|\chi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\leqslant C$$

进一步可得

$$\int_0^T\int_0^{2L}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{23}$$

引理 2 得证。

引理 3 在命题 1 的假设条件下,对于任意给定的 $T>0$,都有

$$\int_0^{2L}\rho_x^2\mathrm{d}x\leqslant C,\quad\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty((0,2L)\times(0,T))}\leqslant C \tag{24}$$

证明 式(8)的第二个式子乘以$\left(\dfrac{1}{\rho}\right)_x$,然后在$(0,2L)$上积分得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+\gamma\int_0^{2L}\rho^{\gamma-3}\rho_x\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\rho u\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\mathrm{d}x=\int_0^{2L}u_x^2\mathrm{d}x-\int_0^{2L}\frac{\rho_x}{\rho^2}\chi_x\chi_{xx}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2L}u_x^2\mathrm{d}x+C\left(\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty}+\int_0^{2L}\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x\right)\int_0^{2L}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x+C\int_0^{2L}\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+C \tag{25}$$

其中式(25)第一个等式用到

$$\int_0^{2L}\left(\frac{1}{\rho}\right)_xu_{xx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x$$

经计算有

$$\left\|\frac{1}{\rho(x,t)}\right\|_{L^\infty}\leqslant C+C\int_0^{2L}\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x \tag{26}$$

将式(26)代入式(25),然后对式(25)关于时间 t 在$[0,T]$上积分,再结合引理 1、式(23)和 Gronwalls 不等式,得到

$$\int_0^{2L}\rho\left|\left(\frac{1}{\rho}\right)_x\right|^2\mathrm{d}x+\gamma\int_0^T\int_0^{2L}\rho^{\gamma-3}\rho_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{27}$$

由式(26)、(27)得到

$$\left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L^\infty((0,T)\times(0,2L))}\leqslant C$$

进一步由 ρ 的上下界得到

$$\int_0^{2L}\rho_x^2\mathrm{d}x\leqslant C \tag{28}$$

引理 3 得证。

命题 2 的证明 (ρ,u,χ)是原方程式(4)的弱解,并且 $-1\leqslant\chi\leqslant 1$。

证明　首先，假设$(\rho_\lambda, u_\lambda, \chi_\lambda)$是方程组式(4)的逼近解，则其一定在弱意义下满足近似方程式(8)。因为$\{\rho_\lambda\}$在$L^\infty(0,T;H^1)$中一致有界，且$\{\partial_t\rho_\lambda\}$在$L^2((0,2L)\times(0,T))$中一致有界，由Aubin–Lions定理可知，$\{\rho_\lambda\}$在$L^2((0,2L)\times(0,T))$中强收敛到$\rho$。

其次，因为$\{\rho_\lambda\}$在$L^\gamma((0,2L)\times(0,T))$中强收敛到$\rho$，$\{\partial_x u_\lambda\}$在$L^2((0,2L)\times(0,T))$中弱收敛到$\partial_x u$，$\{\chi_\lambda\}$在$L^2(0,T;H^2(0,2L))$中一致有界，$\{\partial_t\chi_\lambda\}$在$L^2((0,2L)\times(0,T))$中一致有界，由Aubin–Lions定理可知，$\{\chi_\lambda\}$在$L^2(0,T;H^1(0,2L))$中强收敛到$\chi$。

最后，$\{\partial_{xx}\chi_\lambda\}$在$L^2((0,2L)\times(0,T))$中弱收敛到$\partial_{xx}\chi$，$\{1/\rho_\lambda\}$在$L^2((0,2L)\times(0,T))$中强收敛到$1/\rho$。综合上述得到的结果，令$\lambda\to 0$，可知$(\rho,u,\chi)$满足方程组式(4)定义的弱解，再由$f$和$f_\lambda$的构造以及弱解的存在性可得$-1\leqslant\chi\leqslant 1$。命题2得证。

2.3　解的能量估计

首先给出方程组(4)解的高阶能量估计，在此基础上完成定理1的证明。

命题3(解的能量估计)　如果初值(ρ_0,u_0,χ_0)满足假设条件式(7)，则对于任意给定的$T>0$，式(4)的解(ρ,u,χ)满足如下能量不等式

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\|(\rho,u)\|_1^2,\ \|\chi\|_2^2\}+\int_0^T(\|\rho\|_1^2+\|u\|_2^2+\|\chi\|_3^2)\mathrm{d}t\leqslant C$$

命题3的证明由命题2结合引理4~5直接给出，其中出现的常数C均只依赖于初值和T。

引理4　在命题2成立的情况下，对于任意给定的$T>0$，都有

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^{2L}(\chi_t^2+\chi_{xx}^2)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^{2L}(\chi_{xt}^2+\chi_{xxx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C$$

证明　将式(4)的第三个式子乘以ρ后对x求导，然后乘以χ_{xt}并在$[0,2L]$上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x+\int_0^{2L}\rho^2\chi_{xt}^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2L}\rho^2\chi_{xt}^2\mathrm{d}x+C\int_0^{2L}(\rho_x^2\chi_t^2+u^2\rho_x^2\chi_x^2+u_x^2\chi_x^2+u^2\chi_{xx}^2+\rho_x^2+\chi_x^2)\mathrm{d}x \tag{29}$$

利用Sobolev嵌入不等式得到

$$\|\chi_x\|_{L^\infty(0,2L)}^2\leqslant C\int_0^{2L}(\chi_x^2+\chi_{xx}^2)\mathrm{d}x \tag{30}$$

又因为

$$\|\chi_t\|_\infty^2\leqslant C(\varepsilon)\int_0^{2L}\chi_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^{2L}\chi_{xt}^2\mathrm{d}x\leqslant C(\varepsilon)\int_0^{2L}(u^2\chi_x^2+\chi_{xx}^2+1)\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^{2L}\chi_{xt}^2\mathrm{d}x\leqslant C(\varepsilon)\left(\|u\|_{L^\infty}^2\int_0^{2L}\chi_x^2\mathrm{d}x+\int_0^{2L}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x+1\right)+\varepsilon\int_0^{2L}\chi_{xt}^2\mathrm{d}x \tag{31}$$

将式(30)、(31)代入式(29)中，并结合式(28)、引理1及Gronwalls不等式，取ε足够小，得到

$$\int_0^{2L}\chi_{xx}^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^{2L}\chi_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{32}$$

将式(4)的第三个式子乘以χ_t并在$[0,T]\times[0,2L]$上积分，结合式(32)及引理1得到

$$\int_0^{2L}\chi_t^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_0^{2L}(\chi_{xx}^2+\chi_x^2u^2)\mathrm{d}x+C\leqslant C$$

对式(4)的第三个式子关于x求导，再乘以χ_{xxx}并在$[0,T]\times[0,2L]$上积分，结合引理1和式(28)、(32)得到

$$\int_0^T\int_0^{2L}\chi_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^T\int_0^{2L}(\rho_x^2\chi_t^2+\chi_{xt}^2+\rho_x^2u^2\chi_x^2+u_x^2\chi_x^2+u^2\chi_{xx}^2+\rho_x^2+\chi_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^T\max_{x\in[0,2L]}u^2\chi_x^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\max_{x\in[0,2L]}\chi_{xx}^2\mathrm{d}t+C\leqslant C\int_0^T\int_0^{2L}(u^2+u_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\varepsilon\int_0^T\int_0^{2L}\chi_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C(\varepsilon) \tag{33}$$

式(33)中取ε足够小得到

$$\int_0^T\int_0^{2L}\chi_{xxx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C$$

引理4得证。

引理5　在命题2成立的情况下，对于任意给定的$T>0$，都有

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^{2L}(\rho_t^2+u_x^2)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^{2L}(u_t^2+u_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C$$

证明　第一步，将式(4)的第二个式子乘以u_t后在$(0,2L)$上积分，利用引理3、4得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2L}u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^{2L}\rho u_t^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2L}\rho u_t^2\mathrm{d}x+C_2\int_0^{2L}(u^2u_x^2+\rho_x^2+\chi_x^2\chi_{xx}^2)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2L}\rho u_t^2\mathrm{d}x+C\|u\|_{L^\infty}^2\int_0^{2L}u_x^2\mathrm{d}x+C \tag{34}$$

由式(34)、式(10)和Gronwall不等式可得

$$\int_0^{2L}u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^{2L}\rho u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C \tag{35}$$

结合式(4)的第二个式子、引理2和式(35)，有

$$\int_0^T\int_0^{2L}u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C+C\int_0^T\int_0^{2L}(u_t^2+u^2u_x^2+\rho_x^2+\chi_x^2+\chi_x^2\chi_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C$$

再由式(35)得到

$$\int_0^{2L} \rho_t^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_0^{2L} (\rho_x^2 u^2 + u_x^2) \mathrm{d}x \leqslant C$$

引理 5 得证,故定理 1 得证。

证毕。

3 结束语

本文研究了一类具有非光滑自由能密度的一维黏性可压缩 NSAC 方程组的周期边值问题,克服了自由能密度的非光滑性及密度差与组分浓度差的上下界估计等困难,证明了该方程组整体解的存在唯一性,并证得 χ 一定落在有物理意义的区间,即 $-1 \leqslant \chi \leqslant 1$。本文结果将为气液两相流界面的模拟计算和实验分析提供必要的理论支撑。

参考文献:

[1] MATSUMURA A, NISHIHARA K. On the stability of traveling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas[J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 1985, 2(1): 17-25.

[2] HUANG F M, LI J, MATSUMURA A. Asymptotic stability of combination of viscous contact wave with rarefaction waves for one-dimensional compressible Navier-Stokes system[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2010, 197(1): 89-116.

[3] SHI X D, YONG Y, ZHANG Y L. Vanishing viscosity for nonisentropic gas dynamics with interacting shocks [J]. Acta Mathematica Scientia, 2016, 36B(6): 1699-1720.

[4] VAN DER WAALS J D. Thermodynamische theorie der kapillarität unter voraussetzung stetiger dichteänderung [J]. Zeitschrift für Physikalische Chemie, 1894, 13 (1): 657-725.

[5] ALLEN S M, CAHN J W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening [J]. Acta Metallurgica, 1979, 27 (6): 1085-1095.

[6] BLESGEN T. A generalization of the Navier - Stokes equations to two-phase flow[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 1999, 32(10): 1119-1123.

[7] FEIREISL E, PETZELTOVA H, ROCCA E, et al. Analysis of a phase-field model for two-phase compressible fluids [J]. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 2010, 20(7): 1129-1160.

[8] LIONS P L. Mathematical topics in fluid mechanic, volume 2, compressible models[M]. New York: Oxford University Press, 1998.

[9] KOTSCHOTE M, ZACHER R. Strong solutions in the dynamical theory of compressible fluid mixtures [J]. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 2015, 25(7): 1217-1256.

[10] DING S J, LI Y H, LUO W L. Global solutions for a coupled compressible Navier - Stokes/Allen-Cahn system in 1D [J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2013, 15(2): 335-360.

[11] CHEN Y Z, HE Q L, SHI X D, et al. Asymptotic stability of solutions for 1-D compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 467(1): 185-206.

[12] BLOWEY J F, ELLIOTT C M. The Cahn-Hilliard gradient theory for phase separation with non-smooth free energy part I: Mathematical analysis[J]. European Journal of Applied Mathematics, 1991, 2(3): 233-280.

The flow of 1D compressible two-phase fluids for an immiscible gas-liquid

SUN Ying CHEN YaZhou*

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: This paper considers the non-smooth free energy density for a viscosity-compressible NSAC system with periodic boundary value conditions in one-dimensional space. We prove the existence and uniqueness of the global solution for this system with an arbitrary initial value, when the initial density does not contain a vacuum. Our method is based on constructing approximate equations combined with smoothing approximations and energy estimates.

Key words: Navier - Stokes - Allen - Cahn (NSAC) equations; periodic solution; existence and uniqueness; non-smooth free energy density

(责任编辑:汪 琴)