Bird-Carreau 型黏性 van der Waals 流体周期解的渐近稳定性

陈　肖　孙　颖　陈亚洲*
(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘　要: 讨论了一维可压缩黏性 van der Waals 流体系统的渐近稳定性,其中黏性系数为满足 Bird-Carreau 模型的非线性函数,压力为非凸函数。通过构造能量函数并运用能量估计方法及单调算子理论,证明得出:大黏性条件下初值位于稳定区域时,以及大黏性、小扰动条件下初值位于亚稳定区域时,该类 van der Waals 流体的解是渐近稳定的。

关键词: Bird-Carreau 型黏性; van der Waals 流体; 周期边界

中图分类号: O29　　**DOI**: 10.13543/j.bhxbzr.2018.01.020

引　言

可压缩黏性流体是偏微分方程和流体动力学研究的重要课题之一,其一维模型解的稳定性和大时间行为对工程实践和偏微分方程理论的完善有着非常重要的意义。对于状态方程为 $p=Av^{-\gamma}$ 的理想多方气体, Matsumura 等[1] 最早证明了小扰动情况下行波解的渐近稳定性。此后, Matsumura 等[2]、Kawashima 等[3] 分别证明了一维黏性可压缩流体稀疏波解的全局稳定性以及半空间中黏性非线性波解的渐近稳定性。可压缩黏性流体解的大时间行为的研究中另一重要且困难的问题是,当状态方程满足 van der Waals 模型,即压力为非凸函数时,不稳定区域的出现导致该问题在物理上不稳定且在数学上不适定。其中,对状态方程满足 $p=v^3-v$ 的黏弹性流体, Mei 等[4-5] 证明了带人工黏性的周期边界问题解的存在性、一致有界性和收敛性。另外,对于一般的 van der Waals 流体, Hoff 等[6] 证明了小扰动条件下,时间趋于无穷时一维全空间中可压缩 van der Waals 流体全局解收敛到稳态解。之后, Hsieh 等[7] 用数值模拟方法求出了带人工黏性的 van der Waals 系统的解的性态,并证明当初始密度位于椭圆(不稳定)区域时发生相变。Huang 等[8] 通过研究可压缩黏性 van der Waals 系统周期解的渐近稳定性,证明了当初始密度和初始动量足够接近平均密度和平均动量时,方程的解收敛到稳态解。

上述可压缩黏性 van der Waals 流体的研究中均假设黏性系数为常数,本文在前人成果的基础上,研究了具有 Bird-Carreau 型黏性的压力非凸的一维可压缩流体系统周期解的渐近稳定性。黏性非线性和压力非凸导致渐近状态更加复杂,且更难以得到高阶导数的能量估计,这是本课题的难点。本文通过构造能量函数并结合非线性单调算子方法解决了这一难题。

1　基本模型及其主要定理

考虑拉格朗日坐标系下具有人工黏性的一维可压缩流体的周期边值问题:

$$\begin{cases} v_t-u_x=\varepsilon v_{xx} & t>0, x\in\mathbb{R} \\ u_t+p(v)_x=\left(\mu\left(\dfrac{u_x}{v}\right)\dfrac{u_x}{v}\right)_x & t>0, x\in\mathbb{R} \\ (v,u)\Big|_{t=0}=(v_0,u_0)(x) & x\in\mathbb{R} \\ (v,u)(x,t)=(v,u)(x+2L,t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 v、u 和 p 分别表示流体的比容、速度和压力, ε 为人工黏性, $2L$ 为周期常数。流体黏性 μ 满足 Bird-Carreau 模型:

$$\mu=\mu_\infty+(\mu_0-\mu_\infty)(1+(u_x/v)^2)^{\frac{\gamma}{2}} \tag{2}$$

收稿日期: 2017-06-22
基金项目: 国家自然科学基金(11671027)
第一作者: 女,1992 年生,硕士生
*通讯联系人
E-mail: chenyz@mail.buct.edu.cn

其中 $-1\leqslant\gamma<0$。压力 p 是关于 v 的非凸函数,其函数关系由流体状态方程决定(图 1)。

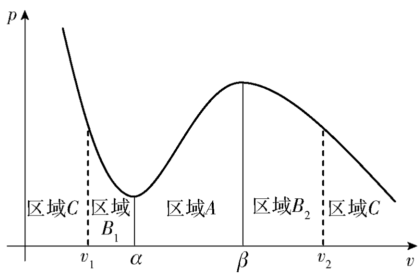

图 1 p 和 v 之间的关系

Fig. 1 Plot of p against v

设集合 $K=[v_1,v_2]$,其中 $0<v_1<\alpha<\beta<v_2$。假定存在常数 $c=c(K)$,使得对于 $v\in K$,有

$$\begin{cases}p'(v)<0, & v\in(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)\\ p'(v)>0, & v\in(\alpha,\beta)\\ |p(v)|\leqslant c, & |p'(v)|\leqslant c\end{cases}\tag{3}$$

满足式(3)模型的共同点是:都存在 v 的一个区间,在此区间上 p 随 v 的增大而增大,即在这个区域中方程组(1)表示的系统是椭圆的,因此这个系统是物理上不稳定和数学上不适定的。

定义初值(v_0,u_0)在$[0,2L]$上的均值为

$$\begin{cases}\bar{v}=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_0^{2L}v_0(x)\mathrm{d}x\\ \bar{u}=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_0^{2L}u_0(x)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{4}$$

由此,从方程组(1)中可以得出

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2L}(v-\bar{v})\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^{2L}(u-\bar{u})\mathrm{d}x=0\end{cases}\tag{5}$$

此时构造能量函数

$$\Phi(v)=\int_{\bar{v}}^{v}(p(\bar{v})-p(\xi))\mathrm{d}\xi=p(\bar{v})(v-\bar{v})-\int_{\bar{v}}^{v}p(\xi)\mathrm{d}\xi\tag{6}$$

显然,$p'(v)>0$ 所对应的区域与 $\Phi''(v)<0$ 所对应的区域一致。麦克斯韦结构由 $v_1<v<v_2$ 所表示的整个区域构成(图 1 中虚线)。其中 v_1、v_2 满足

$$\begin{cases}p(v_1)(v_2-v_1)=\displaystyle\int_{v_1}^{v_2}p(\xi)\mathrm{d}\xi\\ p(v_1)=p(v_2)\end{cases}\tag{7}$$

如图 1 所示,初始状态分离成 A、$B_1\cup B_2$ 和 C 3 个区域,分别对应不稳定区域、亚稳定区域和稳定区域。从 Φ 的定义可知:

$$\Phi(v)\begin{cases}\geqslant0 & \bar{v}\in\text{区域 }C\\ <0 & \bar{v}\in\text{区域 }A\end{cases}\tag{8}$$

$$\Phi(v)\begin{cases}\geqslant0 & v\leqslant v_*,\bar{v}\in\text{区域 }B_1\\ <0 & v>v_*,\bar{v}\in\text{区域 }B_1\end{cases}\tag{9}$$

$$\Phi(v)\begin{cases}\geqslant0 & v\geqslant v^*,\bar{v}\in\text{区域 }B_2\\ <0 & v<v^*,\bar{v}\in\text{区域 }B_2\end{cases}\tag{10}$$

其中 v_* 和 v^* 分别满足 $\int_{\bar{v}}^{v_*}(p(\bar{v})-p(\xi))\mathrm{d}\xi=0$ 和 $\int_{v^*}^{\bar{v}}(p(\bar{v})-p(\xi))\mathrm{d}\xi=0$。

记函数空间如式(11)~(13):

$$L^2_{\mathrm{per}}=\{f(x)\mid f(x)=f(x+2L);f(x)\in L^2(0,2L)\}\tag{11}$$

其范数表示为 $\|f\|=\left(\int_0^{2L}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$;

$$H^k_{\mathrm{per}}=\{f(x)\mid f(x)\in L^2_{\mathrm{per}},\partial_x^i f\in L^2_{\mathrm{per}}(\mathbb{R});i=1,\cdots,k\}\tag{12}$$

其范数表示为 $\|f\|_k=\left(\sum_{i=0}^{k}\int_0^{2L}\left|\partial_x^i f(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$;

$$H^k_{\mathrm{per},0}=\left\{f(x)\mid f(x)\in H^k_{\mathrm{per}},\int_0^{2L}f(x)\mathrm{d}x=0\right\}\tag{13}$$

其中 $k=1,2,\cdots$。

定义 $\|(f,g)\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$ 和 $\|(f,g)\|_k^2=\|f\|_k^2+\|g\|_k^2$。

定理 1 假设初值$(v_0,u_0)\in H^1_{\mathrm{per}}$,且存在正数 m 和 M,使得 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}v_0(x)\geqslant m$, $\|(v_0-\bar{v},u_0-\bar{u})\|_1\leqslant M$ 成立,且满足

$$\begin{cases}\bar{v}\in\text{区域 }C\\ \text{或 }\bar{v}\in\text{区域 }B_1\text{ 且 }M\leqslant\dfrac{v_*-\bar{v}}{2\sqrt{2L}}\\ \text{或 }\bar{v}\in\text{区域 }B_2\text{ 且 }M\leqslant\dfrac{\bar{v}-v^*}{2\sqrt{2L}}\end{cases}\tag{14}$$

若人工黏性 ε 满足

$$\varepsilon>\frac{2^{\frac{5}{2}}L^{\frac{1}{2}}(L^2+\pi^2)M}{\mu_\infty\pi^2}\sup_{v\in\text{区域}A}|p'(v)|\tag{15}$$

则存在 $\delta>0$,使得 $\|v_0-\bar{v},u_0-\bar{u}\|_2\leqslant\delta$ 时,方程组(1)存在唯一的全局解

$$(v,u)(x,t)\in C(0,+\infty;H^1_{\mathrm{per}})$$

并满足能量不等式(16)(C 为常数)

$$\|(v-\bar{v},u-\bar{u})(t)\|_1^2+\int_0^{+\infty}\|(v-\bar{v},u-\bar{u})\|_2^2\mathrm{d}t\leqslant C\|(v_0-\bar{v},u_0-\bar{u})\|_1^2\tag{16}$$

进一步有

$$\lim_{t\to+\infty}\|v-\bar{v},u-\bar{u}\|=0 \tag{17}$$

2　问题重构

令$(\varphi,\psi)=(v,u)-(\bar{v},\bar{u})$，方程组(1)可化为方程组(18)：

$$\begin{cases}\phi_t-\psi_x=\varepsilon\phi_{xx}\\ \psi_t+(p(\phi+\bar{v})-p(\bar{v}))_x=\left(\mu\dfrac{\psi_x}{\phi+\bar{v}}\right)_x\\ (\phi,\psi)(x,t)=(\phi,\psi)(x+2L,t)\\ (\phi,\psi)\Big|_{t=0}=(v_0-\bar{v},u_0-\bar{u})(x)\\ \int_0^{2L}(\phi,\psi)(x,t)\mathrm{d}x=(0,0)\end{cases} \tag{18}$$

其中$\mu=\mu\left(\dfrac{\psi_x}{\phi+\bar{v}}\right)$。

对于时间区间$I=[\tau,\tau+t_0]\in[0,+\infty)$，定义其解空间$X_{m,M}(I)$为

$$X_{m,M}(I)=\{(\phi,\psi)\mid(\phi,\psi)\in C(I;H^1_{\mathrm{per},0}),(\phi,\psi)\in L^2(I;H^2_{\mathrm{per},0}),\sup_{t\in I}\|(\phi,\psi)(t)\|_2\leqslant M,\inf_{t\in I,x\in\mathbb{R}}(\bar{v}+\phi)(x,t)\geqslant m\} \tag{19}$$

将方程组(1)解的渐近稳定性问题转化为考虑方程组(18)的稳态问题，其稳态解满足方程组(20)

$$\begin{cases}-U_x=\varepsilon V_{xx}\\ (p(V+\bar{v})-p(\bar{v}))_x=\left(\mu\left(\dfrac{U_x}{V+\bar{v}}\right)\dfrac{U_x}{V+\bar{v}}\right)_x\\ (V,U)(x)=(V,U)(x+2L)\\ \int_0^{2L}(V,U)(x)\mathrm{d}x=(0,0)\end{cases} \tag{20}$$

定义解空间$Y_{m,M}$如式(21)

$$Y_{m,M}=\left\{(V,U)\,\Big|\,(V,U)\in H_{\mathrm{per},0},\|(V,U)\|_1\leqslant M,\inf_{x\in\mathbb{R}}(V+\bar{v})(x)\geqslant m>0\right\} \tag{21}$$

引理 1　令$f(x)\in H^1_{\mathrm{per},0}$，则有

$$\begin{cases}\|f\|\leqslant\dfrac{L}{\pi}\|f_x\|\\ \sup_{[0,2L]}|f|\leqslant 2\sqrt{2L}\|f_x\|\end{cases} \tag{22}$$

此外，若$f\in L_{\mathrm{per}}$、$f_x\in L_{\mathrm{per}}$，则有

$$\sup_{[0,2L]}|f|\leqslant 2\int_0^{2L}|f'|\mathrm{d}x+\frac{1}{2L}\int_0^{2L}|f|\mathrm{d}x \tag{23}$$

证明　式(22)第 1 个不等式文献[9]已证明。

式(22)第 2 个不等式的证明：因为$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s$，故将其在$[0,2L]$上积分得

$$f(0)=\frac{1}{2L}\int_0^{2L}\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

进而有

$$\sup|f(x)|\leqslant\left|\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\frac{1}{2L}\int_0^{2L}\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\sqrt{2L}\|f_x\|$$

由此式(22)第 2 个不等式得证。同理可得不等式(23)。证毕。

引理 2　若人工黏性$\varepsilon>\dfrac{L^2\sup|p'|M}{\mu_\infty\pi^2}$，则方程组(20)在解空间$Y_{m,M}$中有唯一平凡解$(V,U)(x)=(0,0)$。

证明　显然，方程组(20)至少有一个解(0,0)，且一般情况下解的存在性都可以由不动点定理得到，因而不再详述。此处仅证明(V,U)的唯一性。令方程组(22)的第 1 个等式乘以V、第 2 个等式乘以U，并分别在$[0,2L]$上积分，得

$$\begin{cases}\varepsilon\int_0^{2L}V_x^2\mathrm{d}x=\int_0^{2L}VU_x\mathrm{d}x\\ \int_0^{2L}\mu\dfrac{U_x^2}{V+\bar{v}}\mathrm{d}x=\int_0^{2L}(p(V+\bar{v})-p(\bar{v}))U_x\mathrm{d}x\end{cases} \tag{24}$$

运用引理 1 的结论可得

$$\int_0^{2L}\left(\frac{\varepsilon\pi^2}{L^2}V^2-2VU_x+\frac{\mu_\infty}{M\sup|p'|}U_x^2\right)\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{25}$$

由此可推知引理 2。证毕。

3　主要定理的证明

通过第 2 章的问题重构，方程组(1)解的渐近稳定性的证明就转化成了方程组(18)解的全局存在性和渐近行为的证明。由经典能量方法可知，只需得到解的局部存在性和一致估计，即可完成证明。

命题 1(局部存在性)　假设$(\phi_0,\psi_0)\in H^1_{\mathrm{per},0}$，对任意的$m>0$和$M>0$，如果$\|(\phi_0,\psi_0)\|_1\leqslant M$，且$\inf_{\mathbb{R}\times[0,t_0]}|\phi_0+\bar{v}|\geqslant m$，则存在一个正常数$t_0$，使得方程(18)存在唯一解$(\phi,\psi)\in X_{\frac{1}{2}m,2M}(\tau,\tau+t_0)$。

证明　不失一般性，假设$\tau=0$。设$A(\psi^{(n)}):=$

$\mu\left(\frac{\psi_x^{(n)}}{\phi^{(n-1)}+\bar v}\right)\frac{\psi_x^{(n)}}{\phi^{(n-1)}+\bar v}$,用单调算子法由 A 的单调性可证明对所有的 $(\phi,\psi)^{(n-1)}\in X_{\frac12 m,2M}([0,t_0])$,方程组(26)存在唯一解 $(\phi,\psi)^{(n)}$:

$$\begin{cases}\phi_t^{(n)}-\varepsilon\phi_{xx}^{(n)}=\psi_x^{(n)}\\ \psi_t^{(n)}-\left(\mu\left(\frac{\psi_x^{(n)}}{\phi^{(n-1)}+\bar v}\right)\frac{\psi_x^{(n)}}{\phi^{(n-1)}+\bar v}\right)_x=-p_x^{(n)}\\ (\phi^{(n)},\psi^{(n)})\Big|_{t=0}=(v_0-\bar v,u_0-\bar u)(x)\\ (\phi^{(n)},\psi^{(n)})(x,t)=(\phi^{(n)},\psi^{(n)})(x+2L,t)\end{cases}\tag{26}$$

其中 $p_x^{(n)}=p_x(\phi^{(n-1)}+\bar v)$。由不动点定理可知:存在 $t_0>0$ 且 $(\phi,\psi)\in X_{\frac12 m,2M}([0,t_0])$,当 $\tau=0$ 时方程组(18)成立。证毕。

命题 2(先验估计) 对于 $(\phi,\psi)\in X_{m,M}(I)$,当 $\bar v$ 满足式(14)且 ε 满足式(15)时,对 $t\in[0,+\infty)$,有式(27)成立

$$\|(\phi,\psi)(t)\|_1^2+\int_0^t\|(\phi,\psi)(\tau)\|_2^2\mathrm d\tau\leqslant C(\|\phi_0\|_1^2+\|\psi_0\|_1^2)\tag{27}$$

证明 方程组(18)第 1 个等式乘以 ϕ 再在 $[0,2L]$ 上积分得

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\phi^2\mathrm dx+\varepsilon\int_0^{2L}\phi_x^2\mathrm dx=\int_0^{2L}\phi\psi_x\mathrm dx\tag{28}$$

方程组(18)第 2 个等式乘以 ψ 再在 $[0,2L]$ 上积分得

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\psi^2\mathrm dx+\int_0^{2L}\left((p(\bar v)-p(\phi+\bar v))\psi_x+\frac{\mu\psi_x^2}{\phi+\bar v}\right)\mathrm dx=0\tag{29}$$

将方程组(18)第 1 个等式带入式(29),由式(6)中的能量函数 Φ 的定义可得

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\left(\frac12\psi^2+\Phi(\phi+\bar v)\right)\mathrm dx+\int_0^{2L}\left(\frac{\mu}{\phi}+\frac{\psi_x^2}{\bar v}\right)\mathrm dx-\varepsilon\int_0^{2L}p'(\phi+\bar v)\phi_x^2\mathrm dx=0\tag{30}$$

由引理 1 知 $\sup\limits_{x\in[0,2L]}|\phi+\bar v|\leqslant 2\sqrt{2L}\|(\phi+\bar v)_x\|\leqslant 2\sqrt{2L}M$,又注意到 $\mu_\infty\leqslant\mu\leqslant\mu_0$,故式(30)可转化为式(31)

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\left(\frac12\psi^2+\Phi(\phi+\bar v)\right)\mathrm dx+\frac{\mu_\infty}{2^{\frac32}L^{\frac12}M}\int_0^{2L}\psi_x^2\mathrm dx-\varepsilon\int_0^{2L}p'(\phi+\bar v)\phi_x^2\mathrm dx\leqslant 0\tag{31}$$

式(31)乘以 $\frac{2^{\frac32}L^{\frac52}M}{\mu_\infty\pi^2\varepsilon}$,再加上式(28)得

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\left[\frac{2^{\frac32}L^{\frac52}M}{\mu_\infty\pi^2\varepsilon}\left(\frac{\psi^2}{2}+\Phi(\phi+\bar v)\right)+\frac12\phi^2\right]\mathrm dx+\int_0^{2L}\left(\frac{L^2}{2\pi^2\varepsilon}\psi_x^2+\frac{\varepsilon}{2}\phi_x^2\right)\mathrm dx+\int_0^{2L}\left(\frac{L^2}{2\pi^2\varepsilon}\psi_x^2-\psi_x\phi+\frac{\varepsilon\pi^2}{2L^2}\phi^2\right)\mathrm dx\leqslant\frac{2^{\frac32}L^{\frac52}M}{\mu_\infty\pi^2}\int_0^{2L}p'(\phi+\bar v)\phi_x^2\mathrm dx\tag{32}$$

方程组(18)第 1 个等式乘以 ϕ_{xx} 再在 $[0,2L]$ 上积分得

$$\frac12\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\phi_x^2\mathrm dx+\varepsilon\int_0^{2L}\phi_{xx}^2\mathrm dx=-\int_0^{2L}\phi_{xx}\psi_x\mathrm dx\tag{33}$$

式(31)乘以 $\frac{2^{\frac32}L^{\frac12}M}{\mu_\infty\varepsilon}$ 再加上式(33)得

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\left[\frac{2^{\frac32}L^{\frac12}M}{\mu_\infty\varepsilon}\left(\frac12\psi^2+\Phi(\phi+\bar v)\right)+\frac12\phi_x^2\right]\mathrm dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{2L}\psi_x^2\mathrm dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2L}\phi_{xx}^2\mathrm dx+\int_0^{2L}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\psi_x^2+\psi_x\phi_{xx}+\frac{\varepsilon}{2}\phi_{xx}^2\right)\mathrm dx\leqslant\frac{2^{\frac32}L^{\frac12}M}{\mu_\infty}\int_0^{2L}p'(\phi+\bar v)\phi_x^2\mathrm dx\tag{34}$$

将式(32)、(34)相加得

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\int_0^{2L}\left[\frac{2^{\frac32}L^{\frac12}M(L^2+\pi^2)}{\mu_\infty\pi^2\varepsilon}\left(\frac12\psi^2+\Phi(\phi+\bar v)\right)+\frac12(\phi_x^2+\phi^2)\right]\mathrm dx+\frac{L^2+\pi^2}{2\pi^2\varepsilon}\int_0^{2L}\psi_x^2\mathrm dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2L}(\phi_x^2+\phi_{xx}^2)\mathrm dx\leqslant\frac{2^{\frac32}L^{\frac12}M(L^2+\pi^2)}{\mu_\infty\pi^2}\int_0^{2L}p'(\phi+\bar v)\phi_x^2\mathrm dx\tag{35}$$

由式(8)~(10)可知 $\bar v\in$ 区域 C、或 $\bar v\in$ 区域 B_1 且 $v\leqslant v_*$、或 $\bar v\in$ 区域 B_2 且 $v\leqslant v_*$ 时,有 $\Phi(\phi+\bar v)\geqslant 0$;因 $v\leqslant v_*$,故 $\phi\leqslant v_*-\bar v$。又由引理 1 可知 $\sup\limits_{[0,2L]}|\phi|\leqslant 2\sqrt{2L}\|\phi_x\|\leqslant 2\sqrt{2L}M$,因此 $\bar v\in$ 区域 B_1 且 $M\leqslant\frac{v_*-\bar v}{2\sqrt{2L}}$ 时,有 $\Phi(\phi+\bar v)\geqslant 0$;同理,$\bar v\in$ 区域 B_2 且 $M\leqslant\frac{\bar v-v^*}{2\sqrt{2L}}$ 时,有 $\Phi(\phi+\bar v)\geqslant 0$。因此当 $\bar v$、ε 分别满足式(14)、(15)时,有

$$\|\psi(t)\|^2+\|\phi(t)\|_1^2+\int_0^{+\infty}(\|\psi\|_1^2+\|\phi\|_2^2)\mathrm dx\leqslant C(\|\phi_0\|_1^2+\|\psi_0\|^2)\tag{36}$$

类似地,方程组(18)第 2 个等式乘以 ψ_{xx} 再在 $[0,2L]$ 上积分得

$$\|\psi_x(t)\|^2+\int_0^{+\infty}(\|\psi_{xx}\|^2)\mathrm{d}x\leqslant C(\|(\phi_0)\|_1^2+\|(\psi_0)\|_1^2) \tag{37}$$

联立式(36)、(37),得到先验估计式(27)。

由局部存在定理和先验估计可得到方程(18)的全局解的存在性。类似于文献[8]中的证明过程,最终得到解的渐近行为式(17)。综上所述,定理 1 得证。

4　结束语

本文运用经典能量方法,通过构造能量函数并结合非线性单调算子方法,解决了方程本身的压力非凸性和黏性非线性的问题,得到了解的全局估计和渐近行为。

参考文献:

[1] Matsumura A, Nishihara K. On the stability of travelling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas[J]. Japan Journal of Applied Mathematics, 1985, 2(1): 17-25.

[2] Matsumura A, Nishihara K. Global stability of the rarefaction wave of a one-dimensional model system for compressible viscous gas[J]. Communications in Mathematical Physics, 1992, 144(2): 325-335.

[3] Kawashima S C, Zhu P C. Asymptotic stability of nonlinear wave for the compressible Navier-Stokes equations in the half space[J]. Journal of Differential Equations, 2008, 244(12): 3151-3179.

[4] Mei M, Wong Y S, Liu L. Phase transitions in a coupled viscoelastic system with periodic initial-boundary condition: (I) existence and uniform boundedness[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2007, 7(4): 825-837.

[5] Mei M, Wong Y S, Liu L. Phase transitions in a coupled viscoelastic system with periodic initial-boundary condition: (II) convergence[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2007, 7(4): 839-857.

[6] Hoff D, Khodja M. Stability of coexisting phases for compressible van der Waals fluids[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1993, 53(1): 1-14.

[7] Hsieh D Y, Wang X P. Phase transition in van der Waals fluid[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, 57(4): 871-892.

[8] Huang J Y, Shi X D, Wang X P, et al. Asymptotic stability of periodic solution for compressible viscous van der Waals fluids[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2014, 30(4): 1113-1120.

[9] Mei M, Wong Y S, Liu L P. Stationary solutions of phase transitions in a coupled viscoelastic system[M]//Roux N. Nonlinear analysis research trends. New York, USA: Nova Science Publishers, Inc., 2008: 277-293.

Asymptotic stability of the periodic solution of Bird-Carreau type viscous van der Waals fluids

CHEN Xiao　SUN Ying　CHEN YaZhou*

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this paper, the asymptotic stability of a one-dimensional compressible viscous van der Waals fluids system is discussed, where the viscosity coefficient is a nonlinear function that satisfies the Bird-Carreau model, and the pressure is a non-convex function. By constructing the energy function and using the energy estimation method and the monotone operator theory, we prove that: under the condition of large viscosity, the solutions of the non-Newtonian fluid are asymptotically stable when the initial value is either located in the stable region, or located in the metastable region under small disturbance conditions.

Key words: Bird-Carreau type viscosity; van der Waals fluids; periodic boundary

(责任编辑:汪　琴)