

三圈图的最小离心距离指标

费军旗 涂建华*

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘要: 为进一步研究离心距离指标(EDS)数学性质,通过研究3种移边变换对离心距离指标的影响,利用移边变换和数学归纳得出了三圈图离心距离指标的最小值及其对应图的结构。本文方法为研究更一般图的离心距离指标提供了一种简单有效的思路。

关键词: 图论不变量; 离心距离; 三圈图

中图分类号: O157 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2018.01.018

引言

图论不变量是一些特殊的拓扑指标,常被用来描述某些化学分子结构图的基础性质。基于顶点间距离的不变量如 Wiener 指标^[1-3]、度距离指标^[4-6]等都得到学者们的广泛关注,并得出大量相关结论。Gupta 等^[7]于2002年首次提出了新的图论不变量,即离心距离指标(EDS)。此后,学者们对树、单圈图和仙人掌图的 EDS 做了大量研究。Yu 等^[8]刻画出具有最小、第二小 $\xi^d(G)$ 值的单圈图,并计算出树的最小离心距离指标;Ilić 等^[9]确定了具有最大 $\xi^d(G)$ 值的树,并对 EDS 与其他图论不变量之间的关系作了一系列的探究;Hua 等^[10]得出了 n 个顶点仙人掌图的 $\xi^d(G)$ 值的下确界。

三圈图是一类具有特殊结构的图,当且仅当图 G 的边数等于顶点数加2时,图 G 就是一个三圈图。在对三圈图的 EDS 的研究过程中, Li 等^[9]通过确定 EDS 与边数 $m(m = |E(G)|)$ 之间的关系,最终得到了三圈图的最小 $\xi^d(G)$ 值。但是文献[11]的方法不具一般性和适用性,不能被用来研究更一般图的离心距离指标。本文构思了一种完全不同于文献[11]的新方法,首先研究了文献[12]中3种移边变换对离心距离指标的数值大小的影响,然后基于这3种变换,利用数学归纳法得到了三圈图的最小 ξ^d

(G) 值以及最小值所对应的特殊结构的三圈图。

1 特定移边变换对 $\xi^d(G)$ 的影响

对于任意连通图 $G = (V, E)$, 定义图 G 的 EDS^[7] 为

$$\xi^d(G) = \sum_{\{u,v\} \subset V(G)} (\varepsilon_G(u) + \varepsilon_G(v)) d_G(u,v)$$

其中距离 $d_G(u,v)$ 表示顶点 u 和 v 之间的最短路长度,离心率 $\varepsilon_G(\cdot)$ 表示对应顶点到图 G 所有其他顶点的距离最大值。

Li 等^[12]在研究离心阻尼距离指标(ERDS)的数学性质时刻画了3种移边变换,具体内容如下。

第一变换 给定一个简单连通图 H 和一个星图(中心为 v , 叶子为 v_1, v_2, \dots, v_{p+1}) 如图1(a)所示。对于图 H 中的某一顶点 u , 将顶点 v_{p+1} 和 u 重合, 记新得到的图为 G 。则第一变换 $G \rightarrow G'$ 为

$$G' = G - \{vv_1, vv_2, \dots, vv_p\} + \{uv_1, uv_2, \dots, uv_p\}$$

第二变换 给定一个简单连通图 G 如图1(b), 设顶点 u 在图 G 中具有 p 个悬挂点 (u_1, u_2, \dots, u_p) , 顶点 v (不同于顶点 u) 在图 G 中具有 q 个悬挂点 (v_1, v_2, \dots, v_q) 。则第二变换 $G \rightarrow G'$ 和 $G \rightarrow G''$ 分别为

$$G' = G - \{vv_1, vv_2, \dots, vv_q\} + \{uv_1, uv_2, \dots, uv_q\}$$

$$G'' = G - \{uu_1, uu_2, \dots, uu_p\} + \{vu_1, vu_2, \dots, vu_p\}$$

第三变换 给定简单连通图 G 如图1(c), $n > 3$, $e = uv$ 是图 G 中的一条非悬挂割边。设

$$G - e = G_1 \cup G_2, u \in V_{G_1}, v \in V_{G_2}$$

将图1(c)中的 $G \rightarrow G'$ 变换记为第三变换。

本文通过计算验证了这3种移边变换对 $\xi^d(G)$ 的数值大小的影响,同时给出下列3条相应的定理。

定理1 设图 G 和图 G' 分别为图1(a)中的两

收稿日期: 2017-05-09

基金项目: 国家自然科学基金(11201021)

第一作者: 男, 1993年生, 硕士生

* 通讯联系人

E-mail: tujh81@163.com

个图,则 $\xi^d(G') \leq \xi^d(G)$, 当且仅当图 G 是以顶点 v 为中心的星图时等号成立。

定理 2 设图 G 、图 G' 和图 G'' 分别为图 1(b) 中的图, 则 $\xi^d(G') < \xi^d(G)$ 或 $\xi^d(G'') < \xi^d(G)$ 。

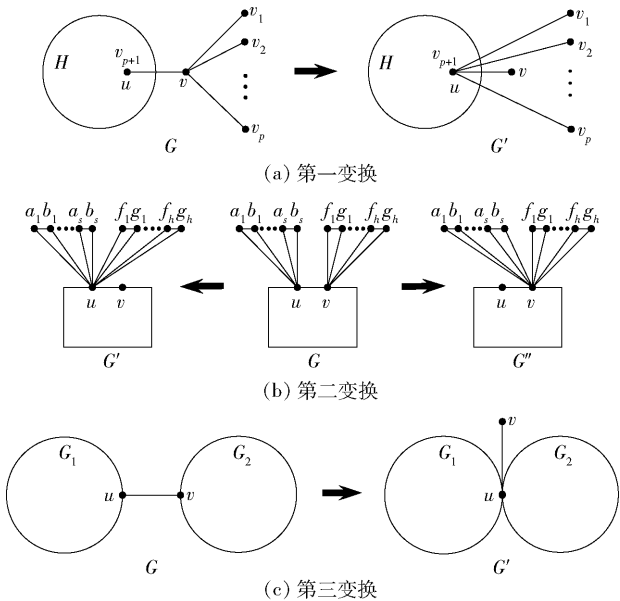


图 1 3 种移边变换

Fig. 1 Three edge-grafting transformations

定理 3 给定简单连通图 $G(n > 3)$, $e = uv$ 是图 G 中的一条非悬挂割边, 对图 G 中的边 e 做第三变换得到图 G' , 则 $\xi^d(G') < \xi^d(G)$ 。

由于定理 1~3 的证明思路、证明方法与文献[10]非常相似, 所以在此只给出定理 1 的详细证明。

为了方便计算, 在后续证明中, 对于图 G 或图 G' 中任意两点 x 和 y , 假设 $\varepsilon(x) := \varepsilon_G(x)$ 或 $\varepsilon'(x) := \varepsilon_{G'}(x)$, $d(x, y) := d_G(x, y)$ 或 $d'(x, y) := d_{G'}(x, y)$

证明 (定理 1)

对于图 1 中的图 G 和 G' , 假设 $|V(H)| > 1$, $W = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, 可以得到

$$\begin{cases} V(G) = V(G'), \varepsilon(v) = \varepsilon'(v) \\ \forall x \in V(H), \varepsilon(x) \geq \varepsilon'(x) \\ \forall y \in W, \varepsilon(y) = \varepsilon'(y) + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \forall x, y \in V(H), d(x, y) = d'(x, y) \\ \forall x, y \in W, d(x, y) = d'(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

因为式(1)和式(2)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= \left(\sum_{\{x, y\} \subseteq V_H} + \sum_{\{x, y\} \subseteq W} \right) [(\varepsilon(x) + \varepsilon(y)) \\ &d(x, y) - (\varepsilon'(x) + \varepsilon'(y))d'(x, y)] + \left(\sum_{x \in V_H \setminus \{u\}, y \in W} + \sum_{x \in V_H, y = v} \right) [(\varepsilon(x) + \varepsilon(y))d(x, y) - (\varepsilon'(x) + \end{aligned}$$

$$\varepsilon'(y))d'(x, y)] > 0$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &:= \sum_{x \in W, y = u} (\varepsilon(x) + \varepsilon(y))d(x, y) - \sum_{x \in W, y = u} (\varepsilon'(x) + \varepsilon'(y))d'(x, y) + \sum_{x \in W, y = v} (\varepsilon(x) + \varepsilon(y))d(x, y) - \sum_{x \in W, y = v} (\varepsilon'(x) + \varepsilon'(y))d'(x, y) = \\ &|W| [2(\varepsilon(u) + \varepsilon(v_1)) - (\varepsilon'(u) + \varepsilon'(v_1))] + |W| [(\varepsilon(v) + \varepsilon(v_1)) - 2(\varepsilon'(v) + \varepsilon'(v_1))] \geq 3|W|(\varepsilon(v_1) + \varepsilon'(v_1)) + |W|(2\varepsilon(u) - 2\varepsilon'(v) + \varepsilon(v) - \varepsilon'(u)) \geq 3|W| + |W|(\varepsilon(u) - \varepsilon'(v)) = |W|(\varepsilon(u) - \varepsilon(v) + 3) \end{aligned}$$

如果 $\varepsilon_H(u) = 1$, 那么 $\varepsilon(u) = \varepsilon(v) = 2$, 则

$$\varepsilon(u) - \varepsilon(v) + 3 > 0$$

如果 $\varepsilon_H(u) = r \geq 2$, 那么 $\varepsilon(u) = r, \varepsilon(v) = r + 1$, 则

$$\varepsilon(u) - \varepsilon(v) + 3 > 0$$

由此可知 $\xi_2 > 0$ 。根据 $\xi^d(G)$ 的定义可以得到

$$\xi^d(G) - \xi^d(G') = \xi_1 + \xi_2 > 0$$

显然, 当且仅当 $|V(H)| = 1$, 即图 G 是以顶点 v 为中心的星图时, $\xi^d(G) = \xi^d(G')$ 。

定理 1 由此得证。证毕。

2 三圈图的最小离心距离指标

对任意三圈图 G , 其基图 \hat{G} 是指图 G 的唯一不包含悬挂点的三圈子图。一般性地, 用 C_n 表示 n 个顶点构成的圈, 用 P_n 表示 n 个顶点构成的路。

设图 G 是具有最小 ξ^d 值的三圈图, \hat{G} 是图 G 的基图。由定理 1~3 可知, \hat{G} 的内部不存在割边, 且图 G 必然是由 $(|V(G)| - |V(\hat{G})|)$ 个孤立顶点连接于 \hat{G} 中的同一顶点构成的。为了便于进一步讨论, 将所有图 G 根据基图的结构分为 3 大类:

1) $T^1(n, r, s, t) = \{G\}$, 其中 r, s, t 分别表示图 \hat{G} 中的 3 个圈 C_r, C_s 和 C_t , $r \geq s \geq t$, 且 C_r, C_s, C_t 彼此之间在图 \hat{G} 中至多有 1 个公共顶点;

2) $T^2(n, x, y, z, w) = \{G\}$, 其中 x, y, z 分别表示 \hat{G} 中连通顶点 p 和 q 的 3 条内部不交的路 P_x, P_y 和 P_z , w 表示 \hat{G} 中连通顶点 g 和 h 的路 $P_w, w \geq x \geq y \geq z$, 且 $\{g, h\} \subset \bigcup_{i=x, y, z} V(P_i)$;

3) $T^3(n, x, y, z, w) = \{G\}$, 其中 x, y, z 分别表示 \hat{G} 中连通顶点 p 和 q 的 3 条内部不交的路 P_x, P_y 和 $P_z (x \geq y \geq z)$, w 表示 \hat{G} 中悬挂于顶点 g 的圈 $C_w (w \geq 3)$, 且 $g \in \bigcup_{i=x, y, z} V(P_i), V(C_w - g) \cap \bigcup_{i=x, y, z} V(P_i) = \emptyset$ 。

引理 4 若三圈图 $G \in T^1(7, r, s, t)$, 则 $\xi^d(G) \geq$

126; 若三圈图 $G \in T^2(5, x, y, z, w)$, 则 $\xi^d(G) \geq 48$;
若三圈图 $G \in T^3(6, x, y, z, w)$, 则 $\xi^d(G) \geq 83$ 。

证明 显然, 如图 2 所示, 若三圈图 $G \in T^1(7, r, s, t)$, 则

$$G \in \{T^{1(1)}, T^{1(2)}\}$$

若三圈图 $G \in T^2(5, x, y, z, w)$, 则

$$G \in \{T^{2(1)}, T^{2(2)}, T^{2(3)}\}$$

若三圈图 $G \in T^3(6, x, y, z, w)$, 则

$$G \in \{T^{3(1)}, T^{3(2)}\}$$

计算可得

$$\begin{cases} \xi^d(T^{1(1)}) = 126, \xi^d(T^{1(2)}) = 211 \\ \xi^d(T^{2(1)}) = 48, \xi^d(T^{2(2)}) = 48, \xi^d(T^{2(3)}) = 48 \\ \xi^d(T^{3(1)}) = 83, \xi^d(T^{3(2)}) = 124 \end{cases}$$

由计算结果可知引理 4 成立。证毕。

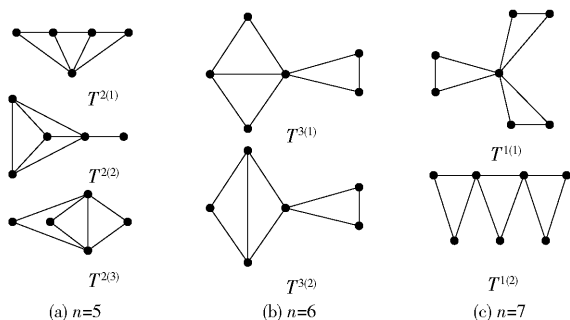


图 2 $n=5, 6, 7$ 时的某些特殊三圈图

Fig. 2 Some special tricyclic graphs with order $n=5, 6, 7$

引理 5 若三圈图 $G \in T^1(n, r, s, t)$, $n \geq 7$, 则 $\xi^d(G) \geq 4n^2 - 9n - 7$, 当且仅当 $G \cong G_3$ 时等号成立 (其中 G_3 如图 3 所示)。

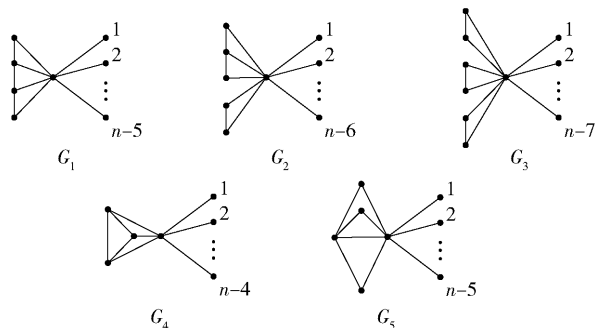


图 3 具有最小 $\xi^d(G)$ 值的三圈图

Fig. 3 The tricyclic graphs with minimum $\xi^d(G)$

证明 对 n 进行归纳。由引理 4 可知, 当 $n=7$ 时, $\xi^d(G) \geq 126$, 当且仅当 $G \cong G_3$ 时等号成立。假设对任意 $n-1$ 个顶点的三圈图结论都成立, 则只需证明对任意 $n \geq 8$ 个顶点的三圈图, 结论仍成立。

情况 1 若图 G 中存在悬挂点, 不妨取 G 中任

意悬挂点 w , 顶点 w' 为 w 在图 G 中的唯一邻点。显然有

$$\begin{cases} \varepsilon(w) \geq 2, \varepsilon(w') \geq 1, d(w, w') = 1 \\ \varepsilon(a) \geq 2, d(a, w) \geq 2, \forall a \in V(G) \setminus \{w, w'\} \end{cases} \quad (3)$$

记 $G' = G - w$, G' 仍是三圈图, 由分析可知

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq \varepsilon'(a), \varepsilon(b) \geq \varepsilon'(b), \forall a, b \in V(G') \\ d(a, b) \geq d'(a, b), \forall a, b \in V(G') \\ \xi^d(G') \geq 4(n-1)^2 - 9(n-1) - 7 = 4n^2 - 17n + 6 \end{cases} \quad (4)$$

因为式(3)和式(4)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi^d(G) - \xi^d(G') &= \sum_{a, b \in V(G')} [(\varepsilon(a) + \varepsilon(b)) \\ &\quad d(a, b) - (\varepsilon'(a) + \varepsilon'(b)) d'(a, b)] + (\varepsilon(w') + \\ &\quad \varepsilon(w)) d(w', w) + \sum_{a \in V(G') \setminus \{w'\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(w)) d(a, \\ &\quad w) \geq 0 + (1+2) \times 1 + (n-2) \times (2+2) \times 2 = \\ &\quad 8n - 13 \end{aligned}$$

即对于情况 1 下的三圈图 G , 有 $\xi^d(G) \geq \xi^d(G') + 8n - 13 \geq 4n^2 - 9n - 7$, 当且仅当 $G \cong G_3$ 时等号成立。

情况 2 若图 G 中不存在悬挂点, 由于 $n \geq 8$, $r+s+t-2=n$, 且 $r \geq s \geq t$, 则有 $r \geq 4$ 。不妨取 G 中顶点 $w \in V(C_r)$ 且 $w \notin V(C_s) \cup V(C_t)$, w' 和 w'' 为 w 在图 G 中的两个邻点。显然有

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq 2, \forall a \in V(G) \\ d(w, w') = 1, d(w, w'') = 1, d(w', w'') = 2 \\ d(a, w) \geq 2, \forall a \in V(G) \setminus \{w, w', w''\} \end{cases} \quad (5)$$

记 $G' = G - w + w'w''$, G' 仍是三圈图, 由分析可得

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq \varepsilon'(a), \varepsilon(b) \geq \varepsilon'(b), \forall a, b \in V(G') \\ d(a, b) \geq d'(a, b), \forall a, b \in V(G') \\ \xi^d(G') \geq 4(n-1)^2 - 9(n-1) - 7 = 4n^2 - 17n + 6 \end{cases} \quad (6)$$

因为式(5)和式(6)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi^d(G) - \xi^d(G') &\geq 0 + (\varepsilon(w') + \varepsilon(w'')) d(w', \\ &\quad w'') - (\varepsilon'(w') + \varepsilon'(w'')) d'(w', w'') + \sum_{a \in \{w', w''\}} (\varepsilon \\ &\quad (a) + \varepsilon(w)) d(a, w) + \sum_{a \in V(G') \setminus \{w', w''\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(w)) \\ &\quad d(a, w) \geq (2+2) + 2 \times (2+2) + 2 \times (2+2) \times (n- \\ &\quad 3) = 8n - 12 \end{aligned}$$

即对于情况 2 下的三圈图 G , 有

$$\xi^d(G) \geq \xi^d(G') + 8n - 12 > 4n^2 - 9n - 7$$

引理 5 由此得证。证毕。

引理 6 若 $G \in T^2(n, x, y, z, w)$, $n \geq 5$, 则 $\xi^d(G) \geq 4n^2 - 9n - 7$ 当且仅当 $G \in \{G_1, G_4, G_5\}$ 时等号成立(其中 $\{G_1, G_4, G_5\}$ 见图 3)。

证明 显然, $n = 4$ 时 $G \cong K_4$ (即 $G \cong G_4$), $\xi^d(G) = \xi^d(K_4) = 12$, 故此处只讨论 $n \geq 5$ 的情况。仍对 n 进行归纳。由引理 4 可知, 当 $n = 5$ 时, $\xi^d(G) \geq 48$, 当且仅当 $G \in \{G_1, G_4, G_5\}$ 时等号成立。假设对任意 $n - 1$ 个顶点的三圈图结论都成立, 故只需证明对任意 $n \geq 6$ 个顶点的三圈图, 结论仍成立。

情况 1 若图 G 中存在悬挂点, 不妨取 G 中任意悬挂点 u , 顶点 u' 为 u 在图 G 中的唯一邻点。显然有

$$\begin{cases} \varepsilon(u) \geq 2, \varepsilon(u') \geq 1, d(u, u') = 1 \\ \varepsilon(a) \geq 2, d(a, u) \geq 2, \forall a \in V(G) \setminus \{u, u'\} \end{cases} \quad (7)$$

记 $G' = G - u$, G' 仍是三圈图。由分析可知

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq \varepsilon'(a), \varepsilon(b) \geq \varepsilon'(b), \forall a, b \in V(G') \\ d(a, b) \geq d'(a, b), \forall a, b \in V(G') \\ \xi^d(G') \geq 4(n-1)^2 - 9(n-1) - 7 = 4n^2 - 17n + 6 \end{cases} \quad (8)$$

因为式(7)和式(8)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi^d(G) - \xi^d(G') &= \sum_{a, b \in V(G')} [(\varepsilon(a) + \varepsilon(b)) \\ &d(a, b) - (\varepsilon'(a) + \varepsilon'(b))d'(a, b)] + (\varepsilon(u') + \\ &\varepsilon(u))d(u, u') + \sum_{a \in V(G') \setminus \{u'\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(u))d(a, u) \geq \\ &0 + (1+2) \times 1 + (n-2) \times (2+2) \times 2 = 8n - 13 \end{aligned}$$

即对于情况 1 下的三圈图 G , 有 $\xi^d(G) \geq \xi^d(G') + 8n - 13 \geq 4n^2 - 9n - 7$, 当且仅当 $G \in \{G_1, G_4, G_5\}$ 时等号成立。

情况 2 若图 G 中不存在悬挂点, 由于 $n \geq 6$, $x + y + z + w - 6 = n$ 且 $w \geq x \geq y \geq z$, 则 $w \geq 4$ 。不妨取 G 中顶点 $u \in V(P_w)$ 且 $u \notin V(P_x) \cup V(P_y) \cup V(P_z)$, 顶点 u' 和 u'' 为 u 在图 G 中的两个邻点。显然有

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq 2, \forall a \in V(G) \\ d(u, u') = 1, d(u, u'') = 1, d(u', u'') = 2 \\ d(a, u) \geq 2, \forall a \in V(G) \setminus \{u, u', u''\} \end{cases} \quad (9)$$

记 $G' = G - u + u'u''$, G' 仍是三圈图, 由分析可知

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq \varepsilon'(a), \varepsilon(b) \geq \varepsilon'(b), \forall a, b \in V(G') \\ d(a, b) \geq d'(a, b), \forall a, b \in V(G') \\ \xi^d(G') \geq 4n^2 - 17n + 6 \end{cases} \quad (10)$$

因为式(9)和式(10)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi^d(G) - \xi^d(G') &\geq 0 + (\varepsilon(u') + \varepsilon(u''))d(u', u'') - (\varepsilon'(u') + \varepsilon'(u''))d'(u', u'') + \sum_{a \in \{u', u''\}} (\varepsilon(a) + \\ &\varepsilon(u))d(a, u) + \sum_{a \in V(G') \setminus \{u', u''\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(u))d(a, \\ &u) \geq (2+2) + 2 \times (2+2) + 2 \times (2+2) \times (n-3) = \\ &8n - 12 \end{aligned}$$

对于情况 2 下的三圈图 G , 有

$$\xi^d(G) \geq \xi^d(G') + 8n - 12 > 4n^2 - 9n - 7$$

引理 6 由此得证。证毕。

引理 7 若 $G \in T^3(n, x, y, z, w)$, $n \geq 6$, 则 $\xi^d(G) \geq 4n^2 - 9n - 7$ 当且仅当 $G \cong G_2$ 时等号成立, 其中 G_2 如图 3 所示。

证明 对 n 进行归纳。由引理 4 可知, 当 $n = 6$ 时, $\xi^d(G) \geq 83$ 当且仅当 $G \cong G_2$ 时等号成立。假设对任意 $n - 1$ 个顶点的三圈图, 结论都成立, 故只需证明对任意 $n \geq 7$ 个顶点的三圈图, 结论仍成立。

情况 1 若图 G 中存在悬挂点, 不妨取 G 中任意悬挂点 u , 顶点 u' 为 u 在图 G 中的唯一邻点。显然有

$$\begin{cases} \varepsilon(u) \geq 2, \varepsilon(u') \geq 1, d(u, u') = 1 \\ \varepsilon(a) \geq 2, d(a, u) \geq 2, \forall a \in V(G) \setminus \{u, u'\} \end{cases} \quad (11)$$

记 $G' = G - u$, G' 仍是三圈图。由分析可知

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq \varepsilon'(a), \varepsilon(b) \geq \varepsilon'(b), \forall a, b \in V(G') \\ d(a, b) \geq d'(a, b), \forall a, b \in V(G') \\ \xi^d(G') \geq 4(n-1)^2 - 9(n-1) - 7 = 4n^2 - 17n + 6 \end{cases} \quad (12)$$

因为式(11)和式(12)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi^d(G) - \xi^d(G') &= \sum_{a, b \in V(G')} [(\varepsilon(a) + \varepsilon(b)) \\ &d(a, b) - (\varepsilon'(a) + \varepsilon'(b))d'(a, b)] + (\varepsilon(u') + \\ &\varepsilon(u))d(u, u') + \sum_{a \in V(G') \setminus \{u'\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(u))d(a, u) \geq \\ &0 + (1+2) \times 1 + (n-2) \times (2+2) \times 2 = 8n - 13 \end{aligned}$$

即对于情况 1 下的三圈图 G , 有 $\xi^d(G) \geq \xi^d(G') + 8n - 13 \geq 4n^2 - 9n - 7$, 当且仅当 $G \cong G_2$ 时等号成立。

情况 2 若图 G 中不存在悬挂点, 由于 $n = x +$

$y+z+w-5 \geq 7, x \geq y \geq z, w \geq 3$, 则 $x=y=z=w=3$, 或 $x \geq 4$, 或 $w \geq 4$ 。

对于 $n=7, x=y=z=w=3$ 的情况, 经过简单计算可以直接得到

$$\xi^d(G) > \xi^d(G_2) = 126$$

对于 $n > 7$ 且 $x \geq 4$ 的情况, 选取 G 中顶点 $u \in V(P_x)$ 且 $u \notin V(C_w) \cup V(P_y) \cup V(P_z)$, 顶点 u' 和 u'' 为 u 在图 G 中的两个邻点。显然有

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq 2, \forall a \in V(G) \\ d(u, u') = 1, d(u, u'') = 1, d(u', u'') = 2 \\ d(a, u) \geq 2, \forall a \in V(G) \setminus \{u, u', u''\} \end{cases} \quad (13)$$

记 $G' = G - u + u'u''$, G' 仍是三圈图。由分析可知

$$\begin{cases} \varepsilon(a) \geq \varepsilon'(a), \varepsilon(b) \geq \varepsilon'(b), \forall a, b \in V(G') \\ d(a, b) \geq d'(a, b), \forall a, b \in V(G') \\ \xi^d(G') \geq 4n^2 - 17n + 6 \end{cases} \quad (14)$$

因为式(13)和式(14)成立, 所以有

$$\begin{aligned} \xi^d(G) - \xi^d(G') &\geq 0 + (\varepsilon(u') + \varepsilon(u''))d(u', u'') - (\varepsilon'(u') + \varepsilon'(u''))d'(u', u'') + \sum_{a \in \{u', u''\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(u))d(a, u) + \sum_{a \in V(G') \setminus \{u', u''\}} (\varepsilon(a) + \varepsilon(u))d(a, u) \\ &\geq (2+2) + 2 \times (2+2) + 2 \times (2+2) \times (n-3) = 8n - 12 \end{aligned}$$

即 $\xi^d(G) \geq \xi^d(G') + 8n - 12 > 4n^2 - 9n - 7$ 成立。

对于 $n > 7$ 且 $w \geq 4$ 的情况, 选取 G 中顶点 $u \in V(C_w)$ 且 $u \notin V(P_x) \cup V(P_y) \cup V(P_z)$, 顶点 u' 和 u'' 为 u 在图 G 中的两个邻点。记 $G' = G - u + u'u''$, 显然 G' 仍是三圈图。类似 $n > 7, x \geq 4$ 的情况, 通过证明可以得到 $\xi^d(G) > 4n^2 - 9n - 7$ 。

引理7由此得证。证毕。

结合定理1~3及引理5~7, 可以得到关于三圈图 ξ^d 值的最终结论。

定理8 对任意 $n \geq 5$ 个顶点的三圈图 G , $\xi^d(G) \geq 4n^2 - 9n - 7$ 当且仅当 $G \in \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ 时等号成立(其中 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 见图3)。

证明 假设 G^* 是具有最小 ξ^d 值的三圈图, \hat{G}^* 是其基图。结合定理1~3可知, \hat{G}^* 的内部不存在割边, 且图 G^* 必然是由 $(|V(G^*)| - |V(\hat{G}^*)|)$ 个孤立顶点连接于 \hat{G}^* 中的同一顶点构成的。此时, G^* 要么属于 $T^1(n, r, s, t)$, 要么属于 $T^2(n, x, y, z, w)$, 要么属于 $T^3(n, x, y, z, w)$ 。若

$$G^* \notin \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$$

由引理5~7的证明可知

$$\xi^d(G^*) > 4n^2 - 9n - 7$$

因此当且仅当 $G^* \in \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ 时 $\xi^d(G^*) = 4n^2 - 9n - 7$ 达到最小值。

定理8由此得证。证毕。

3 结束语

本文首先研究了移边变换对离心距离指标的数值影响, 然后利用数学归纳计算出了三圈图的离心距离指标的最小值, 同时确定了最小值所对应的图的结构。本文的研究方法具有较好的适应性, 为研究更一般图的离心距离指标提供了一种新思路。

参考文献:

- [1] Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points[J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69(1): 17-20.
- [2] Dobrynin A A, Entringer R, Gutman I. Wiener index of trees: theory and applications [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2001, 66(3): 211-249.
- [3] 杜永军, 吴建春. 单圈图 Wiener 指标的极值[J]. 兰州理工大学学报, 2013, 39(2): 163-165.
Du Y J, Wu J C. Extremum of Wiener indices on unicyclic graphs[J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2013, 39(2): 163-165. (in Chinese)
- [4] Dobrynin A A, Kochetova A A. Degree distance of a graph: a degree analogue of the Wiener index[J]. Journal of Chemical Information & Modeling, 1994, 34(5): 1082-1086.
- [5] Gutman I. A property of the Wiener number and its modifications [J]. Indian Journal of Chemistry, 1997, 36(2): 128-132.
- [6] 何秀萍. 具有最小度距离的双圈图[J]. 数学研究, 2008, 41(4): 434-438.
He X P. The bicyclic graphs with minimal degree distance[J]. Journal of Mathematical Study, 2008, 41(4): 434-438. (in Chinese)
- [7] Gupta S, Singh M, Madan A K. Eccentric distance sum: a novel graph invariant for predicting biological and physical properties [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2002, 275(1): 386-401.
- [8] Yu G H, Feng L H, Ilić A. On the eccentric distance sum of trees and unicyclic graphs[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2011, 375(1): 99-107.
- [9] Ilić A, Yu G H, Feng L H. On the eccentric distance

- sum of graphs[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2011, 381(2):590–600.
- [10] Hua H B, Xu K X, Wen S. A short and unified proof of Yu et al.'s two results on the eccentric distance sum[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2011, 382(1):364–366.
- [11] Li S C, Wu Y Y. On the extreme eccentric distance sum of graphs with some given parameters[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 206: 90–99.
- [12] Li S C, Wei W. Some edge-grafting transformations on the eccentricity resistance-distance sum and their applications[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 211: 130–142.

Tricyclic graphs with a minimum eccentric distance sum

FEI JunQi TU JianHua^{*}

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The eccentric distance sum (EDS) has been widely used in the fields of chemistry and biology. In order to study its mathematical properties further, a new method has been used in this paper. Firstly, three transformations of edge-grafting on the eccentricity distance sum of a connected graph were studied. Then by using these transformations and induction, we obtained the minimum eccentric distance sum among all tricyclic graphs with order n , and also characterized the structure of the corresponding tricyclic graphs. The results demonstrate that our method is simple and effective, and offers a new way of studying the eccentric distance sum of general graphs.

Key words: graph invariant; eccentric distance sum; tricyclic graphs

(责任编辑:汪 琴)