

带有模糊流动性约束的均值-方差-偏度-正弦熵投资组合优化模型

宋燕玲¹ 周荣喜² 蔡小龙¹ 赵庆亮^{1*}

(1. 北京化工大学 经济管理学院, 北京 100029; 2. 对外经济贸易大学 金融学院, 北京 100029)

摘要: 通过引入可信性偏度及模糊流动性约束, 分别建立了同时满足随机不确定和模糊不确定情形下的均值-方差-偏度-正弦熵(M-V-S-SE)的投资组合模型和带有模糊流动性约束的均值-方差-偏度-正弦熵(M-V-S-L-SE)投资组合优化模型。然后运用马尔科夫方法求解模糊收益率, 利用上海证券交易所数据进行实证研究。结果表明: 模糊流动性约束的引入使得模型更加稳定, 在提高收益、控制风险等方面更具有优势。

关键词: 可信性理论; 模糊流动性; 正弦熵; 投资组合模型

中图分类号: F224; F830.9

DOI: 10.13543/j.bhxbzr.2018.01.017

引言

Markowitz 于 1952 年首次提出均值-方差模型, 为现代投资组合理论打下坚实的基础^[1]。但传统模型的方差风险测度具有假设条件苛刻、高估风险和协方差矩阵复杂等缺陷, 因此研究者们相继提出了新的风险度量模型, 如 LPM 模型^[2]、绝对偏差模型^[3]、最大绝对偏差模型^[4]等。余涓等^[5]认为不同的风险测度产生的模型效果大不相同, 因此选取合适的风险测度模型尤为重要; Shannon^[6]首次将信息熵作为一种风险度量指标来构建投资组合模型。此后, 熵理论得到了进一步发展, 各类熵概念如随机熵^[7]、增值熵^[8]、模糊熵^[9]、叉熵^[10]、混合熵^[11]和广义熵^[12-13]等被应用于金融风险度量和证券投资组合研究。但是以上研究只考虑了投资风险, 而忽视了风险资产的流动性^[14]。因此, 本文在可信性理论的基础上, 为了增加正收益率的概率而引入了三阶距偏度约束, 又兼顾了以证券收益率的宽度和深度来衡量的流动性因素^[15], 利用正弦熵^[16]作为主要的风险测度指标, 分别构建了均值-方差-偏度-正弦熵的投资组合模型(M-V-S-SE)和带有模糊流动

性约束的均值-方差-偏度-正弦熵的投资组合优化模型(M-V-S-L-SE), 并进行了实证对比分析。

1 可信性及正弦熵理论

1.1 可信性理论及性质

定义 1 设 ξ 是可信性空间 (Θ, P, Cr) 上的模糊变量, 并存在有限期望, 则其期望 E 、方差 V 和偏度 S 可分别定义为^[17]

$$\begin{cases} E[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\} dr \\ V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2] \\ S[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^3] \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中 $\int_0^{+\infty} Cr\{\xi \geq r\} dr$ 和 $\int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\} dr$ 两个积分式中至少有一个是有限的, 并且满足

$$\begin{cases} E[m\xi + n\eta] = mE[\xi] + nE[\eta] \\ V[m\xi + n\eta] = m^2V[\xi] + n^2V[\eta] \\ S[m\xi + n\eta] = m^3S[\xi] + n^3S[\eta] \end{cases} \quad (2)$$

其中, ξ 和 η 相互独立。

设三角模糊变量 $\xi = (a, b, c)$ 是可信性空间 (Θ, P, Cr) 上的一个模糊变量, 则易求得 ξ 的期望、方差及偏度分别为

$$\begin{cases} E[\xi] = (a + 2b + c)/4 \\ V[\xi] = \frac{33\alpha^3 + 21\alpha^2\beta + 11\alpha\beta^2 - \beta^3}{384\alpha} \\ S[\xi] = \frac{(c-a)^2(c-2b+a)}{32} \end{cases} \quad (3)$$

收稿日期: 2017-04-28

基金项目: 国家自然科学基金(71631005); 教育部人文社会科学研究规划基金(16YJA630078)

第一作者: 女, 1992 年生, 硕士生

* 通讯联系人

E-mail: zhaoql@mail.buct.edu.cn

其中, $\alpha = \max \{b - a, c - d\}$; $\beta = \min \{b - a, c - d\}$; a, b, c, d 为实数。

1.2 正弦熵及其性质

定义 2^[16] 设 ξ 是可信性空间 (Θ, P, Cr) 上的模糊变量, 其不确定分布 $\Phi(x) = Cr\{\xi \leq x\}$, 则 ξ 的正弦熵 $S_E[\xi]$ 定义为

$$S_E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi\Phi(x)) dx \quad (4)$$

设 ξ 是定义在可信性空间 (Θ, P, Cr) 上的模糊变量, 其有不确定分布为 $\Phi(x)$, 且

$$\Phi(x) = Cr\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a < x \leq b \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & b < x \leq c \\ 1, & c < x \end{cases} \quad (5)$$

则 ξ 的正弦熵的表达式为

$$S_E[\xi] = \int_a^b \sin\left(\frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}\right) dx + \int_b^c \sin\left(\frac{\pi(x+c-2b)}{2(c-b)}\right) dx = \frac{2}{\pi}(b-a) + \frac{2}{\pi}(c-b) = \frac{2}{\pi}(c-a) \quad (6)$$

综合式(1)至式(6), 设 $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是相互独立的三角模糊数, 可得组合的期望、方差、偏度、正弦熵的表达式分别为

$$\begin{cases} E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (a_i + 2b_i + c_i) x_i \\ V\left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \left[\frac{33\alpha_i^3 + 21\alpha_i\beta_i + 11\alpha_i\beta_i - \beta_i}{384\alpha_i} \right] \\ S\left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right] = \frac{1}{32} \sum_{i=1}^n x_i^3 [(c_i - a_i)^2 (c_i - 2b_i + a_i)] \\ S_E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right] = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n |x_i| (c_i - a_i) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\alpha_i = \max \{b_i - a_i, c_i - d_i\}$, $\beta_i = \min \{b_i - a_i, c_i - d_i\}$ 。

2 带有模糊流动性约束特征的投资组合优化模型

2.1 基于马尔科夫链的模糊收益率的预测方法

本文用三角模糊变量来刻画收益率, 用马尔科夫方法^[11]预测证券日收益率的中心值及左右边界值。日交易数据主要包括开盘价 P_{11} 、收盘价 P_{12} 、当日最高价 P_{13} 、最低价 P_{14} 。

将每只股票的日收益率设为一个三角模糊数

$$r' = (r'_{1l}, r'_{1e}, r'_{1h})$$

其中 $r'_{1l} = (P_{14} - P_{11})/P_{11}$ 代表当日收益率下限, $r'_{1e} = (P_{12} - P_{11})/P_{11}$ 代表当日平均收益率, $r'_{1h} = (P_{13} - P_{11})/P_{11}$ 代表当日收益率上限。

以此 3 类收益率的极大极小值为区间, 将 3 个大区间各自均分为 10 个小区间, 并分别以各收益率的中点 d_{1m}, d_{2m} 和 d_{3m} ($m = 1, 2, \dots, 10$) 为初始聚类点进行 K 均值聚类。在此基础上建立一步转移矩阵 P , 通过求解 $x = Px$ 得到马尔科夫链的稳定解 x , 可得

$$\text{得证券的模糊收益率 } r_e = \sum_{m=1}^{10} x_m d_{me}。$$

2.2 模型建立

2.2.1 M-V-S-SE 模型

假设某投资者考虑一个 n 种风险证券投资组合, 其投资比例为 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。用收益率的期望来刻画收益, 用收益率的方差和正弦熵度量风险, 用偏度衡量各个可能的收益率对期望值的偏离大小, 偏度越大越好。设投资者预期收益水平为 γ_0 , 预期风险水平为 ν_0 , 偏度大于 0, γ_0 和 ν_0 依据投资对风险的厌恶程度决定。结合式(7)建立 M-V-S-SE 如式(8)

$$\begin{aligned} \min S_E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \\ \text{s. t. } \begin{cases} E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq \gamma_0 \\ V[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \leq \nu_0 \\ S[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

2.2.2 M-V-S-L-SE 模型

设定第 i 只证券的不确定性收益率的三角模糊变量为

$$\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$$

流动性指标梯形模糊数变量为

$$\xi'_i = (d_i, e_i, f_i, g_i)$$

其中容许区间为 $[d_i, e_i]$, f_i 为左宽度, g_i 为右宽度。设 L 是度量投资组合流动性的指标 (其值不低于投资者预期值即可), 则由梯度模糊数的计算规则得到 L 的表达式为

$$L[\xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \dots + \xi'_n x_n] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{d_i + e_i}{2} + \frac{f_i + g_i}{6} \right) \quad (9)$$

本文首先由 K -Means 聚类方法获得模糊流动性指标数据,将得到的两个聚类中点分别作为容许区间的两个端点 d_i 和 e_i ,将证券流动性数据的最大值和最小值分别作为宽度的左端点值和右端点值,然后计算求得左宽度 f_i 和右宽度 g_i ,添加模糊流动性指标 l_0 (l_0 由投资者的预期值来确定)后建立 M-V-S-L-SE 如式(10)

$$\min S_E[\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \cdots + \xi_nx_n]$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} E[\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \cdots + \xi_nx_n] \geq \gamma_0 \\ V[\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \cdots + \xi_nx_n] \leq \nu_0 \\ S[\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \cdots + \xi_nx_n] \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{d_i + e_i}{2} + \frac{f_i + g_i}{6} \right) \geq l_0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \quad (10)$$

3 实证分析

3.1 三角模糊收益率和投资比例求解

本文从上海证券交易所选取 15 支来自不同行业、不同板块的股票,将 2014 年 1 月 4 日至 2015 年 11 月 26 日之间的日交易数据作为样本数据,并以

2014 年 1 月至 2015 年 1 月一年期日交易数据为样本数据进行建模,用 2015 年 1 月 5 日至 9 月 14 日的日交易数据进行预测,来验证模型的有效性和适用性。运用 2.1 节中模糊收益率的马尔科夫预测方法和公式(9)预测得到三角模糊收益率及梯度模糊流动性见表 1,然后将表 1 数据代入公式(7)分别求得三角模糊变量的均值、方差、偏度、正弦熵及流动性指标的值见表 2。

表 2 的结果表明第 15 只股票比第 14 只股票流动性相对更强。计算求得 M-V-S-SE 及 M-V-S-L-SE 的正弦熵值分别为 0.030693 和 0.029915,两模型的正弦熵值接近;M-V-S-L-SE 的正弦熵值小于 M-V-S-SE 的正弦熵值,说明前者考虑了流动性指标后降低了模型应用投资的风险,改进后的模型更可靠。

根据投资者可接受的预期收益、预期风险及预期流动性水平,设定 $\gamma_0 = 0.01$, $\nu_0 = 0.007$, $l_0 = 10.00$,将表 2 数据代入 M-V-S-SE 和 M-V-S-L-SE,得到 15 只股票对应两个模型的资金配置比例分别为 x'_i 和 x''_i ($i = 1, 2, \cdots, 15$),并与均匀投资策略(MEAN)作比较,结果如图 1。

由图 1 可看出,MEAN 是均匀投资在 15 只股票

表 1 三角模糊收益率及梯度模糊流动性
Table 1 The triangular fuzzy returns and gradient fuzzy liquidity

股票	三角模糊收益率	梯度模糊流动性
S_1	(-0.0303, 0.0033, 0.03860)	(4.5193, 8.5024, 15.1802, 23.4107)
S_2	(-0.0223, 0.0031, 0.0295)	(3.7529, 7.6174, 13.5409, 21.7062)
S_3	(-0.0201, 0.0043, 0.0293)	(2.8425, 6.0128, 11.1459, 24.9816)
S_4	(-0.0292, 0.0024, 0.0342)	(1.8919, 6.0619, 13.3108, 23.1746)
S_5	(-0.0293, 0.0001, 0.0284)	(2.1919, 5.0151, 8.4136, 15.4084)
S_6	(-0.0127, 0.0027, 0.0310)	(1.2501, 4.6808, 7.4564, 11.5046)
S_7	(-0.0166, 0.0034, 0.0225)	(1.1640, 5.3920, 8.3502, 16.1046)
S_8	(-0.0134, 0.0021, 0.0190)	(1.8901, 3.5702, 7.4186, 13.5172)
S_9	(-0.0140, 0.0014, 0.0349)	(3.3926, 9.1724, 19.7042, 28.2451)
S_{10}	(-0.0352, -0.0009, 0.0311)	(1.2614, 5.0489, 9.1747, 16.2549)
S_{11}	(-0.0140, 0.0026, 0.0352)	(4.1409, 9.0278, 14.0325, 26.1806)
S_{12}	(-0.0248, 0.0014, 0.0250)	(1.2134, 4.0278, 8.2701, 16.1248)
S_{13}	(-0.0140, 0.0024, 0.0405)	(1.9340, 5.3868, 9.1769, 17.0452)
S_{14}	(-0.0227, 0.0023, 0.0273)	(2.9890, 6.4281, 13.5119, 22.7501)
S_{15}	(-0.0230, 0.0019, 0.0276)	(1.8078, 6.7016, 13.9603, 23.0218)

表2 三角模糊收益率的均值、方差、偏度、正弦熵、流动性指标

Table 2 The mean, variance, skewness, and sine entropy of the triangular fuzzy returns

股票	E	V	S	S_E	L
S_1	0.003758	0.00000025	0.000000252	0.043877	8.9426
S_2	0.003351	0.00000008	0.000000099	0.032993	11.5596
S_3	0.004426	0.00000006	0.000000053	0.031481	10.4489
S_4	0.002429	0.00000017	0.000000037	0.040341	10.0578
S_5	-0.000183	0.00000012	-0.000000118	0.036712	7.5738
S_6	0.005913	0.00000008	0.000000771	0.027864	6.1256
S_7	0.003208	0.00000003	-0.000000045	0.024888	7.3538
S_8	0.002471	0.00000001	0.000000044	0.020615	6.2194
S_9	0.005943	0.00000015	0.000001342	0.031121	14.2740
S_{10}	-0.001454	0.00000022	-0.000000324	0.042224	7.3934
S_{11}	0.006610	0.00000014	0.000001198	0.031325	13.2865
S_{12}	0.000774	0.00000007	-0.000000202	0.031698	6.6864
S_{13}	0.007827	0.00000024	0.000002021	0.03499	8.0307
S_{14}	0.002295	0.00000007	0.000000004	0.031842	10.7522
S_{15}	0.002092	0.00000007	0.000000065	0.032171	11.4183

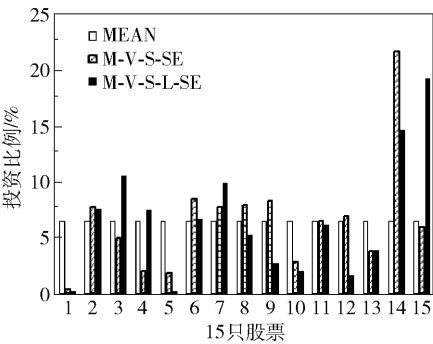


图1 MEAN、M-V-S-SE 及 M-V-S-L-SE 求解结果

Fig.1 Results of MEAN, M-V-S-SE and M-V-S-L-SE models

当中,没有考虑各只股票的风险问题;M-V-S-SE 和 M-V-S-L-SE 只微量投资第一只股票,其余资金几乎都分布在后 14 只股票中,体现了分散投资的理念;并且图 1 中 M-V-S-L-SE 增加了对第 15 只股票的投资比例而减少对第 14 只股票的投资比例,说明第 15 只股票比第 14 只股票流动性相对更强,与表 2 的结果相符。

3.2 投资组合的收益率预测

考虑股票市场的连续效应,本文选取 2015 年 1 月 5 日至 9 月 14 日连续 172 个交易日数据进行预测,得到 3 种模型下股票的日收益率和累计收益率

变化情况如图 2、图 3 所示。

由图 2 看出,3 种模型求得的日收益率变化趋势基本相似,但 M-V-S-L-SE 的日收益率振幅区间为 $[-6.41\%, 6.40\%]$,而 MEAN 和 M-V-S-SE 的日收益率区间分别为 $[-7.80\%, 7.47\%]$ 和 $[-7.06\%, 7.05\%]$,可见后两者的波动要大于前者,说明 M-V-S-L-SE 的稳定性更高,这也验证了 M-V-S-L-SE 的正弦熵值略小的结果。

分析图 3 可知,3 种模型的累积收益率变化趋势为先持续上升,然后迅速下降,接着又波动上升。比较来看,M-V-S-L-SE 的累积收益率曲线处于其他两种模型曲线之上,说明其稳定性较好,累积收益率基本都高于其他两种模型。若按照 M-V-S-L-SE 计算出来的投资比例进行组合投资,可获得高达 66.88% 的收益,比改进前多出 3.65 个百分点。

4 结束语

本文通过引入可信性理论及偏度的概念,基于正弦熵风险测度构建了 M-V-S-SE,并考虑了证券投资中的流动性因素,建立了带有模糊流动性约束的 M-V-S-L-SE。实证研究表明,M-V-S-SE 和 M-V-S-L-

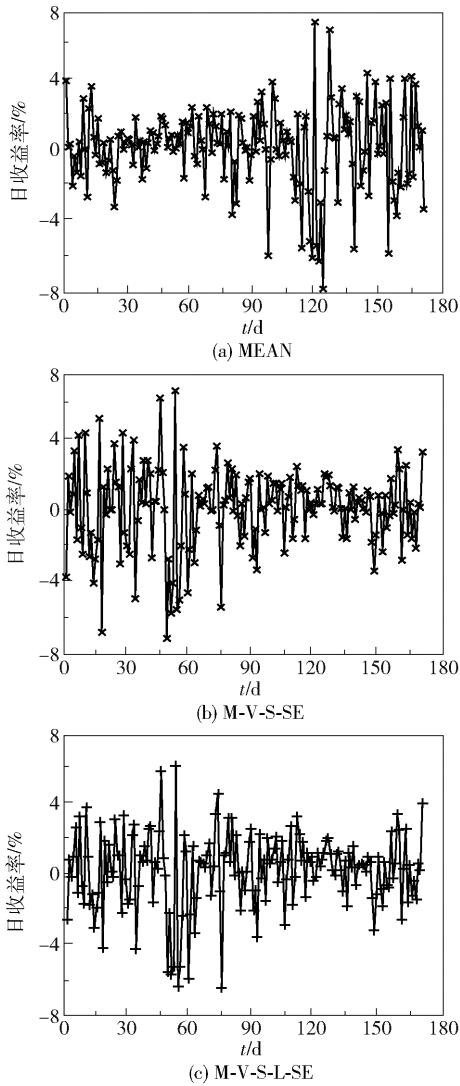


图 2 3 种模型的日收益率

Fig. 2 The daily rates of the three models

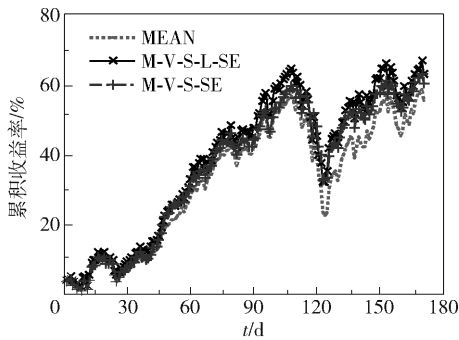


图 3 3 种模型的累积收益率

Fig. 3 The cumulative rates of the three models

SE 效果均优于 MEAN, 而 M-V-S-L-SE 因考虑了流动性因素更加稳定, 累积收益率比 M-V-S-SE 又有一定提升。

未来进一步的研究将考虑实际情形下的多期动

态的投资组合实证研究。

参考文献:

- [1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] Bawa V S. Optimal rules for ordering uncertain prospects [J]. Journal of Financial Economics, 1975, 2 (1): 95-121.
- [3] Konno H, Yamazaki H. Mean-absolute deviate on portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market[J]. Management Science, 1991, 37(5): 519-531.
- [4] Cai X Q, Teo K L, Yang X Q, et al. Portfolio optimization under a minimax rule [J]. Management Science, 2000, 46(7): 957-972.
- [5] 余湄, 周荣喜, 吴孟. 投资模型选择问题研究——理论模型及中国股票市场的投资实证研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2013(2): 98-110.
Yu M, Zhou R X, Wu M. Study on the model selection in portfolio management [J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2013(2): 98-110. (in Chinese)
- [6] Shannon C E. A mathematical theory of communication [J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27: 623-656.
- [7] Xu Y Y, Wu Z W, Jiang L, et al. A maximum entropy method for a robust portfolio problem [J]. Entropy, 2014, 16(6): 3401-3415.
- [8] 董雪瑶, 王秀国, 周荣喜, 等. 基于最小信息熵-最大增值熵的投资组合优化模型[J]. 北京化工大学学报: 自然科学版, 2011, 38(6): 120-124.
Dong X F, Wang X G, Zhou R X, et al. Portfolio optimization model based on the minimum comentropy and the maximum value-added entropy[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology: Natural Science, 2011, 38(6): 120-124. (in Chinese)
- [9] Huang X X. Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2008, 16(4): 1096-1101.
- [10] 李华, 李兴斯. 均值-叉熵证券投资组合优化模型[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(5): 65-70.
Li H, Li X S. Mean-cross-entropy model for portfolio optimization [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2005, 35(5): 65-70. (in Chinese)
- [11] Zhou R X, Zhan Y, Cai R, et al. A mean-variance hybrid-entropy model for portfolio selection with fuzzy returns [J]. Entropy, 2015, 17(5): 3319-3331.

- [12] Zhou R X, Liu X, Yu M, et al. Properties of risk measures of generalized entropy in portfolio selection [J]. Entropy, 2017, 19(12): 657.
- [13] Zhou R X, Cai R, Tong G Q. Applications of entropy in finance: a review [J]. Entropy, 2013, 15(11): 4909–4931.
- [14] Lippman S A, McCall J J. An operational measure of liquidity[J]. American Economic Review, 1984, 76(1): 43–55.
- [15] 隋云云, 马树才. 带有流动性约束的投资组合模型及其应用[J]. 统计与信息论, 2014, 29(12): 24–28.
- Sui Y Y, Ma S C. Portfolio selection model with liquidity constraint and its applications [J]. Statistics & Information Forum, 2014, 29(12): 24–28. (in Chinese)
- [16] Yao K. Sine entropy of uncertain set and its applications [J]. Applied Soft Computing, 2014, 22(5): 432–442.
- [17] Liu B D, Liu Y K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 445–450.

A mean-variance-skewness-sine entropy model with fuzzy liquidity constraints for portfolio selection

SONG YanLing¹ ZHOU RongXi² CAI XiaoLong¹ ZHAO QingLiang^{1*}

(1. School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029;

2. School of Finance and Banking, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China)

Abstract: By introducing the credibility theory and skewness, a mean-variance-skewness-sine entropy (M-V-S-SE) portfolio selection model considering random uncertainty and fuzzy uncertainty, and a mean-variance-skewness-liquidity-sine entropy (M-V-S-L-SE) portfolio selection model with fuzzy liquidity constraints have been established. We forecasted the fuzzy yields using the Markov method. Empirical research was conducted by employing the 2015 stock price data from the Shanghai stock exchange. The results reveal that the M-V-S-L-SE model which includes fuzzy liquidity constraints is more stable and advantageous in terms of improving the income and controlling the risk.

Key words: credibility theory; fuzzy liquidity; sine entropy; portfolio model

(责任编辑: 汪 琴)