

对正弦交流电路中无功功率几个疑问的探讨

梁 征¹ 王 云^{2*} 张 滢³ 周玉宏¹ 贾 辉¹ 卜建东⁴

(1. 公安海警学院 基础部, 浙江 宁波 315801; 2. 北京化工大学 理学院, 北京 100029;
3. 海纳国际集团, 费城 PA19004, 美国; 4. 中材地质工程勘察研究院有限公司, 北京 100102)

摘 要: 在理想化的线性时不变集总参数正弦稳态电路中探讨无功功率, 梳理出了无功功率定义的两等价的两种方法; 从阻抗的瞬时功率入手, 将瞬时功率分解为有功分量和无功分量, 给出阻抗串联模型、并联模型时有功分量和无功分量的准确表达式。通过计算分析典型电路的无功分量表明: 理想线性电容电感元件的串联或并联、电阻电感电容串联(RLC)或三者并联以及阻抗串联的单口网络中感性负载与容性负载的无功能量吞吐反相, 而感性阻抗和容性阻抗并联, 三相电路的无功能量吞吐不可能反相; 无功能量既可能在电源与负载之间流动, 也可能在各负载之间流动; 负载侧网络的总吞吐幅度不一定等于网络中各负载无功功率的代数和。

关键词: 正弦交流电路; 无功功率; 概念辨析

中图分类号: O441.5 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2017.06.020

引 言

无功功率一直是学界讨论的一个复杂话题。瞬时功率、有功功率、无功功率、视在功率和功率因数等概念是正弦交流电路理论中能量问题的基本内容, 有功功率和无功功率也是电磁理论和电气工程领域中必不可少的两个重要物理量^[1-2]。在理论界, 对有功功率概念的阐述清晰周密严谨, 而无功功率概念却未被阐明说透^[3-6]。因此, 有必要溯本追源, 对能量发生的机理细节进行梳理计算分析, 以期更全面准确地理解无功功率概念。

由于正弦激励的频变与畸变、非正弦周期激励、非线性负载(尤其是冲击性负载)以及谐波成分的存在, 使该问题变得愈加复杂。因此, 本文仅限于在线性单频正弦交流电源激励、线性时不变负载元件的集总参数正弦交流电路理想条件下讨论无功功率问题。

1 原始概念辨析

1.1 无功功率的理想定义

无功功率概念源自对理想线性电感、电容消耗电能的分析, 多见从耗电功率 $p = ui$ (关联时) 入手。

两类元件的正弦电压与正弦电流均有 90° 的相位差(正交), 导致其在四分之一交流电变化周期内从电源吸收电能, 在随后四分之一周期内又将吸收的能量返给电源, 如此周而复始, 而在完整周期内没有电能耗散; 但它们与电源之间又真实存在着二倍频的能量交换。于是定义无功功率 Q 来描述此特性, 取其值为交换电功率的幅值^[3-4]。也可以从储能特性

入手, 通过对理想线性电容的瞬时储能公式 $w_C = \frac{1}{2}$

Cu_C^2 以及理想线性电感的瞬时储能公式 $w_L = \frac{1}{2} Li_L^2$

(u_C 为电容上的稳态激励电压, i 为响应电流, C 为电容, L 为电感), 在时域求一阶导数来定义 Q ^[4]。考虑到理想线性电感电容串联、并联时的功率吞吐反相互抵, 修正理想线性电感的无功功率定义为 $Q_L = U_L I_L$ 、理想线性电容的无功功率为 $Q_C = -U_C I_C$, 进而导出阻抗无功功率的通用定义 $Q = UI \sin \varphi$, 其中 U 是阻抗上所加正弦电压的有效值, I 是阻抗中所流正弦电流的有效值, φ 是阻抗在该正弦激励条件下的阻抗角。

看待无功功率应当一分为二, 而不能绝对地认为“无功功率是无用功率、有害功率”。一方面, 无功功率在电网中会产生消极影响, 是影响功率因数的主要因素, 同时还直接影响电网电压的稳定性和电网内电能输送的效率效益; 另一方面, 无功功率在一些电气设备内建立和维持着作用重大的交变电场或交变磁场, 保证了电气设备的正常

收稿日期: 2017-03-24

第一作者: 男, 1969年生, 副教授

* 通讯联系人

E-mail: wyun@mail.buct.edu.cn

运行。

1.2 有功分量与无功分量的正确表述

考察阻抗 $Z = |Z| \angle \varphi$, 设外加稳态激励电压为 $u_s = \sqrt{2}U \sin \omega t$, 则响应电流 $i = \sqrt{2}U \sin(\omega t - \varphi)$, 于是瞬时功率为

$$p = u_s i = 2UI \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \quad (1)$$

或者

$$p = u_s i = 2UI \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = 2UI \sin(\omega t) (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = 2UI \cos \varphi \sin^2(\omega t) - UI \sin \varphi \sin(2\omega t) \quad (2)$$

或者

$$p = u_s i = 2UI \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = 2UI \sin[(\omega t - \varphi) + \varphi] \sin(\omega t - \varphi) = 2UI \cos \varphi \sin^2(\omega t - \varphi) - UI \sin \varphi \sin(2\omega t - 2\varphi) \quad (3)$$

其中 ω 为圆频率, t 为时间。

式(1)~(3)3种表述均可获得有功功率 $P = UI \cos \varphi$ 。由引起能量耗散的电压、电流的相位相同这一特性可知,式(2)和式(3)才是瞬时功率中有功分量与无功分量的正确表述,式(2)对应电导电纳并联模型,式(3)对应电阻电抗串联模型。式(2)、(3)的最终形式均为两个乘积项的代数和,两式中第一项为代表能量耗散的瞬时有功分量,第二项为非耗散吞吐的瞬时无功分量^[7-9]。所以针对不同的模型应该构建不同的有功分量和无功分量表达式才更合理。

2 正弦稳态电路中无功功率计算分析

2.1 感性负载与容性负载无功分量的相位关系

就RLC(R为电阻元件,C为电容元件,L为电感元件,下同)串联或者三者并联、阻抗串联以及理想线性LC元件的串联或并联的单口网络而言,经简单计算可知感性与容性两类元件的二倍频功率吞吐是反相的。

以常见的RL串联后又与C并联的单端口电路为例,电路模型如图1所示。

在C支路中,正弦电流为

$$i_c = \sqrt{2} \frac{U}{X_C} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

瞬时功率为

$$p_c = u_c i_c = u_s i_c = \frac{U^2}{X_C} \sin(2\omega t)$$

其中 X_C 为容性阻抗。

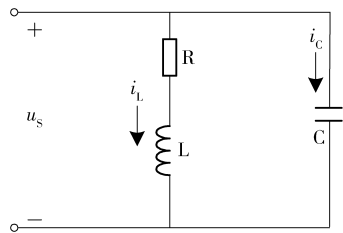


图1 RL与C并联的电路模型

Fig.1 Single port circuit of RL parallel with C

因RL支路的电流为

$$i_L = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

则电感上的电压为

$$u_L = \sqrt{2} \frac{UX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin(\omega t - \varphi + 90^\circ)$$

其中 $\varphi = \arctan \frac{X_L}{R}$, X_L 为感性阻抗。

则电感上的瞬时功率

$$p_L = u_L i_L = \frac{U^2 X_L}{R^2 + X_L^2} \sin(2\omega t - 2\varphi)$$

显然,RL与C并联电路中 p_L 比 p_C 滞后 2φ ,二者不可能反相互补。

再以感性阻抗 $Z_1 = R_1 + jX_1 = |Z_1| \angle \varphi_1$ 和容性阻抗 $Z_2 = R_2 - jX_2 = |Z_2| \angle \varphi_2$ 并联为例分析(j 为虚数单位),并设激励电压 $u_s = \sqrt{2}U \sin \omega t$,则 Z_1 的非耗散吞吐功率为

$$p_{X1} = u_{X1} i_{X1} = \frac{2U^2 X_1}{R_1^2 + X_1^2} \sin(\omega t - \varphi_1 + 90^\circ) \sin(\omega t - \varphi_1) = \frac{U^2 X_1}{R_1^2 + X_1^2} \sin(2\omega t - 2\varphi_1) \quad (4)$$

Z_2 的非耗散吞吐功率为

$$p_{X2} = u_{X2} i_{X2} = \frac{2U^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(\omega t - \varphi_2 - 90^\circ) \sin(\omega t - \varphi_2) = \frac{U^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(2\omega t - 2\varphi_2 - \pi) \quad (5)$$

因为式(4)中 Z_1 的阻抗角 $\varphi_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$,式(5)中 Z_2 的阻抗角 $\varphi_2 \in (-90^\circ, 0^\circ)$,所以并联感性、容性阻抗的无功吞吐一般不可能反相;同理,同性阻抗的无功吞吐一般也不可能同相,除非它们的阻抗角相等。

2.2 无源网络总吞吐幅度与各元件无功功率代数和

在理想线性电容电感元件的串联或并联、RLC串联或三者并联、阻抗串联的单口网络中,因为感性无功吞吐与容性无功吞吐反相互补,所以负载

侧网络总无功吞吐幅度等于各元件无功功率的代数和。

图 1 中 RL 与 C 并联网络的总吞吐功率为

$$p_{\text{total}} = p_C + p_L = \frac{U^2}{X_C} \sin(2\omega t) + \frac{U^2 X_L}{R^2 + X_L^2} \sin(2\omega t - 2\varphi) = M \sin(2\omega t) + N \sin(2\omega t - 2\varphi) \quad (6)$$

式(6)中 M 、 N 分别代表两项系数,将式(6)进行数学变换后得

$$p_{\text{total}} = M \sin(2\omega t) + N \cos(2\varphi) \sin(2\omega t) - N \sin(2\varphi) \cos(2\omega t) = [M + N \cos(2\varphi)] \sin(2\omega t) - [N \sin(2\varphi)] \cos(2\omega t) \quad (7)$$

将式(7)整理成标准正弦形式,提取幅值并整理后可得网络的无功吞吐的振幅

$$A_1 = \sqrt{M^2 + N^2 + 2MN \cos(2\varphi)} \quad (8)$$

式(8)中 $\varphi \in (0^\circ, 90^\circ)$, 其取值决定了功率幅度并不等于两元件无功功率的代数和($N - M$)。

同理,通过分析 RC 串联后又与 L 并联的电路也可得出网络无功吞吐幅度并非元件无功功率代数和的结论。

再考察 2.1 节中感性阻抗 Z_1 和容性阻抗 Z_2 并联时的非耗散能量吞吐情况。网络的总非耗散吞吐功率为

$$p_{X1} + p_{X2} = \frac{U^2 X_1}{R_1^2 + X_1^2} \sin(2\omega t - 2\varphi_1) + \frac{U^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(2\omega t - 2\varphi_2 - \pi) \quad (9)$$

设 $J = \frac{U^2 X_1}{R_1^2 + X_1^2}$, $K = \frac{U^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2}$, 则式(9)可以简化为

$$p_{X1} + p_{X2} = J \sin(2\omega t - 2\varphi_1) + K \sin(2\omega t - 2\varphi_2 - \pi) \quad (10)$$

利用正弦函数和差化积公式将式(10)整理成标准正弦时域函数,该函数的幅值即为网络非耗散吞吐功率的振幅。由此可得到网络非耗散吞吐功率的振幅为

$$A_2 = \sqrt{J^2 + K^2 - 2JK \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2)} \quad (11)$$

显然,式(11)代表两并联阻抗的总吞吐幅度,其值也不等于两个阻抗无功功率的代数和($J - K$)。

研究表明,只有在简单的理想 LC 元件串联或并联、RLC 串联或三者并联、阻抗串联情况下,网络与外部能量交换的最大规模等于各元件无功功率的代数和,其他情况则不等于。所以线性二端网络作为整体来考虑,其与外部能量交换的最大规模不一定等于各元件无功功率的代数和。换言之,网络的

总无耗散吞吐功率幅度绝对不等同于网络中各负载无功功率之代数和。

2.3 三相电路中的无功功率分析

三相电路中负载的典型联接包括 Δ 型联接和 Y 型联接。以负载 Y 型联接电路为例,电路模型如图 2 所示。考虑到两种联接方式中负载外加电压的相似性,所得定性结论在 Δ 型联接中也成立^[10]。

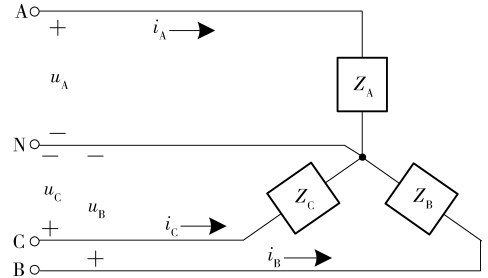


图 2 三相负载 Y 型联接电路模型

Fig. 2 Three-phase load circuit of type Y connection

设三相阻抗分别为 $Z_A = |Z_A| \angle \varphi_A$, $Z_B = |Z_B| \angle \varphi_B$, $Z_C = |Z_C| \angle \varphi_C$, 并设三相激励分别为 $u_A = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$, $u_B = \sqrt{2}U \sin(\omega t - 120^\circ)$, $u_C = \sqrt{2}U \sin(\omega t + 120^\circ)$ 。

则 A 相负载中的电流为

$$i_A = \sqrt{2} \frac{U}{|Z_A|} \sin(\omega t - \varphi_A) = \sqrt{2} I_A \sin(\omega t - \varphi_A)$$

同理, B 相、C 相负载中的电流分别为

$$i_B = \sqrt{2} I_B \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi_B)$$

$$i_C = \sqrt{2} I_C \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi_C)$$

于是,各相的瞬时功率分别为

$$p_A = u_A i_A = 2UI_A \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi_A) = 2UI_A \sin[(\omega t - \varphi_A) + \varphi_A] \sin(\omega t - \varphi_A) = 2P_A \sin^2(\omega t - \varphi_A) + Q_A \sin(2\omega t - 2\varphi_A) \quad (12)$$

$$p_B = u_B i_B = 2UI_B \sin(\omega t - 120^\circ) \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi_B) = 2UI_B \sin[(\omega t - 120^\circ - \varphi_B) + \varphi_B] \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi_B) = 2P_B \sin^2(\omega t - 120^\circ - \varphi_B) + Q_B \sin(2\omega t - 2\varphi_B + 120^\circ) \quad (13)$$

$$p_C = u_C i_C = 2UI_C \sin(\omega t + 120^\circ) \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi_C) = 2P_C \sin^2(\omega t + 120^\circ - \varphi_C) + Q_C \sin(2\omega t - 2\varphi_C - 120^\circ) \quad (14)$$

式(12) ~ (14)的最终形式均为两项之和,其中第一项是耗散功率,第二项是吞吐功率。单独考虑总非耗散吞吐情况,有总非耗散功率

$$q_{\text{总}} = q_A + q_B + q_C = Q_A \sin(2\omega t - 2\varphi_A) + Q_B \sin$$

$$(2\omega t - 2\varphi_B + 120^\circ) + Q_C \sin(2\omega t - 2\varphi_C - 120^\circ) = [Q_A \cos(2\varphi_A) + Q_B \cos(120^\circ - 2\varphi_B) + Q_C \cos(120^\circ + 2\varphi_C)] \sin(2\omega t) + [Q_B \sin(120^\circ - 2\varphi_B) - Q_C \sin(120^\circ + 2\varphi_C) - Q_A \sin(2\varphi_A)] \cos(2\omega t)$$

$$A_3 = \sqrt{Q_A^2 + Q_B^2 + Q_C^2 + 2Q_A Q_B \cos(2\varphi_A - 2\varphi_B + 120^\circ) + 2Q_B Q_C \cos(2\varphi_B - 2\varphi_C + 120^\circ) + 2Q_C Q_A \cos(2\varphi_C - 2\varphi_A + 120^\circ)} \quad (15)$$

由式(12)~(14)看出,三相网络中3个负载的无功能量吞吐的相位受制于各自阻抗角;式(13)表明总无功吞吐规模不能等于3个负载的无功功率之和。

当三相负载对称时,有

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$$

$$Q_A = Q_B = Q_C$$

设

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = Q$$

则有

$$A_3 =$$

$$\sqrt{Q^2 + Q^2 + Q^2 + 2Q^2 \cos 120^\circ + 2Q^2 \cos 120^\circ + 2Q^2 \cos 120^\circ} = 0$$

$A_3 = 0$ 说明此种工况下电源与负载间没有无功能量的流动,无功能量只在负载间流动,故任一瞬时三相电源输出的总功率总是等于各相有功功率之和;同理,通过计算式(12)~(14)中第一项之和可知三相总有功分量在任一瞬时为常数(即三相电源的总功率为常数)。文献[11]佐证了这一结论。

3 结论

(1)仅就单频正弦稳态电路而言,元件的电压、电流之间存在的正交分量导致了无功功率,对应不同元件模型的瞬时功率可分解为不同形式的有功分量和无功分量。

(2)对典型电路的无功分量计算分析表明:感性负载和容性负载的能量吞吐不一定反相互补,无功能量既可能在电源与负载间流动、也可能只在负载间流动,或二者兼而有之,即电源与负载间存在功率交换不是无功功率产生的必要条件;无源网络的总吞吐幅度不一定等于网络中各负载无功功率的代数和;经典无功功率定义是有局限性的。

参考文献:

- [1] 秦文萍,王鹏,韩肖清,等. 电力系统有功和无功功率充裕度评估[J]. 电力系统自动化, 2014, 38(1): 28-33.

$$2\varphi_C) - Q_A \sin(2\varphi_A)] \cos(2\omega t)$$

将 $q_{\text{总}}$ 整理成标准正弦时域函数形式,可得总非耗散功率的幅值:

Qin W P, Wang P, Han X Q, et al. Adequacy evaluation of active and reactive power in power system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(1): 28-33. (in Chinese)

- [2] 董大伟. 浅谈无功功率的产生和补偿技术[J]. 中国电力教育, 2011(27): 104-105.

Dong D W. Discussion on reactive power generation and compensation technology[J]. China Electric Power Education, 2011(27): 104-105. (in Chinese)

- [3] 秦曾煌. 电工学(上册)[M]. 7版. 北京: 高等教育出版社, 2009: 108-181.

Qin Z H. Electro technician (the first volume)[M]. 7th ed. Beijing: Higher Education Press, 2009: 108-181. (in Chinese)

- [4] 李翰荪. 简明电路分析基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 457-462.

Li H S. Fundamentals of concise circuit analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014: 457-462. (in Chinese)

- [5] 燕庆明. 电路分析基础[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 173-220.

Yan Q M. Electric circuit analysis[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2012: 173-220. (in Chinese)

- [6] Alexander C K, Sadiku M N O. Fundamentals of electric circuits[M]. Beijing: China Machine Press, 2013: 457-488.

- [7] 包国荣. 论正确理解无功功率概念[J]. 咸宁师专学报, 1993(2): 43-47.

Bao G R. On correctly understanding the concept of reactive power[J]. Journal of Xianning Teachers College, 1993(2): 43-47. (in Chinese)

- [8] 田社平,陈洪亮. 关于无功功率的讨论[J]. 电气电子教学学报, 2012, 34(1): 23-35.

Tian S P, Chen H L. Discussion on reactive power[J]. Journal of Electrical & Electronic Engineering Education, 2012, 34(1): 23-35. (in Chinese)

- [9] 汪小娜,单潮龙,何坊,等. 对无功功率物理意义的讨论[J]. 物理与工程, 2014, 24(2): 34-36.

Wang X N, Shan C L, He F, et al. Discussion on physical significance of reactive power[J]. Physics and Engineering, 2014, 24(2): 34-36. (in Chinese)

- [10] 王茂海,孙元章. 三相电路中功率现象的解释及无功

功率的分类[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(10): 63-66.
Wang M H, Sun Y Z. Analysis of power phenomenon and classification of reactive power in three-phase circuit[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(10): 63-66. (in

Chinese)

[11] Alok Kumar. Reactive power control in electrical power transmission system[J]. International Journal of Engineering Trends and Technology, 2013, 4(5): 1707-1709.

Research on some queries of reactive power in sinusoidal AC circuits

LIANG Zheng¹ WANG Yun^{2*} ZHANG Ying³ ZHOU YuHong¹ JIA Hui¹ BU JianDong⁴

(1. Department of Basic Courses, China Maritime Police Academy, Ningbo, Zhejiang 315801, China;

2. Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;

3. Susquehanna International Group, Philadelphia PA19004, USA;

4. CNBM Geological Engineering Exploration Academy Co. Ltd., Beijing 100102, China)

Abstract: Reactive power is one of important physical quantities in physics and engineering. In this paper, the concept of reactive power is classified in linear, time invariant, or lumped parameter circuits with ideal sinusoidal steady-state excitation. Two equivalent methods for the definition of reactive power are presented first. The instantaneous power of impedance is decomposed into active power and reactive power. Accurate expressions of active and reactive components of the instantaneous power are given for both series models and parallel models of impedance. Results based on our calculations and analysis of the reactive component of typical circuits give the conclusions. The reactive energy of inductive and capacitive load throughput can be reversed in one-port circuits of ideal linear capacitors and inductors in series or parallel, RLC in series or parallel, and impedance series. In contrast, reactive energy cannot be reversed in circuits of inductive impedance and capacitive impedance in parallel, or in circuits with three-phase loads. In addition, reactive energy can flow between the power supply and each load, and also flow between each load. Finally, the throughput amplitude of the whole load-side network is not necessarily equal to the algebraic sum of the reactive power of each of the loads in the network.

Key words: sinusoidal AC circuit; reactive power; concept discrimination

(责任编辑:汪 琴)