

带有反比佣金率和保留价的拍卖模型研究

杨卫星

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘要:研究了带有反比佣金率和保留价的密闭式拍卖模型。给出了一般分布下的一级价格密封式拍卖和二级价格密封式拍卖的均衡投标策略;分别求出了在两种拍卖模式中投标人、卖方和拍卖行的预期收益;进一步考察了反比佣金率的系数以及保留价分别对均衡投标策略以及对卖方、投标人和拍卖行三方预期收益的影响。研究结果表明,卖者的预期收益与 k 及保留价 r 均成正相关;投标者的预期收益和 k 成正比,和 r 成反比。

关键词: 密闭式拍卖; 反比佣金率; 保留价; 预期收益

中图分类号: F724.59 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2017.06.017

引言

中华人民共和国拍卖法第四章第四节规定:委托人、买受人可以和拍卖人约定佣金比例;对拍卖佣金比例未作约定而拍卖成交的,拍卖人可以向买受人、委托人各收取不超过成交价5%的佣金;收取佣金的比例按照同成交价成反比的原则确定。

大部分经典的拍卖文献分析的都是买卖双方的策略。文献[1-3]提出了最优拍卖的概念并建立了收入等价原理;汪海等^[4]研究了如何在独立私人估价假设不成立时实现最优拍卖,并揭示了拍卖理论在中国的经济改革和发展中所具有的重要应用价值;敬辉蓉等^[5]研究了第一、第二密封价格拍卖的最优投标人数及拍卖机制配置效率问题,发现了拍卖作为具有单方市场垄断力的稀缺资源配置方式,其最优配置效率的实现在于投标者的充分竞争。但在具体的拍卖实践中,拍卖的进行必须要有第三方——拍卖行的参与。有关佣金率的研究近期才引起人们的重视。王彦等^[6]把常数佣金率引入到拍卖模型中,研究了常数佣金率对拍卖结果的影响;毕志伟等^[7]考察了关联价值拍卖模型,讨论了佣金率对拍卖参与者各方收益的影响;本文作者假设佣金率与成交价是线性关系,研究了两种密封式拍卖模型的投标策略^[8];并讨论了一类同时带有佣金率和

保留价的拍卖模型,提出了最优佣金率的存在性^[9]。

文献[6-9]虽然考虑了佣金率的存在性,但是只涉及到了常数佣金率和线性佣金率的情况。所以本文在假设佣金率与成交价呈反比函数关系的前提下,首次提出了带有反比佣金率和保留价的拍卖模型。先求出一般分布下的一级和二级价格密封式拍卖的均衡投标策略,再求出所有拍卖参与者的预期收益,最后通过一系列比较静态分析得出卖者的预期收益与 k 及保留价 r 均成正相关;投标者的预期收益和 k 成正比,和 r 成反比;拍卖行的预期收益与 k 成反比。

1 假设和记号

假设有 n 个投标者参加拍卖,第 i 个投标者对拍品的估价为 v_i ,所有投标者的估价独立,并服从相同的分布函数 $F(v)$, $v \in [\underline{v}, \bar{v}]$ 。

假设拍卖行设定一个与报价成反比的佣金率 $c = \frac{1}{kb}$,其中 $k > 0$, $b \geq 0$, b 表示报价。卖方设定保留价 r ,参与或不参与拍卖无差异的最低估价 v_* 满足 $b(v_*) = r$;又因为 v_* 满足 $\pi(v_*, b(v_*)) = 0$ ($\pi(v, b)$ 表示收益函数),即 $v_* - b(v_*) \left(1 + \frac{1}{kb(v_*)}\right) = 0$,所以得到 $v_* = r + \frac{1}{k}$;而且估价低于 v_* 的投标者将不参与拍卖,规定他们的报价为零,即当 $v < v_*$ 时, $b(v) = 0$ 。

本文假设佣金由投标人支付。投标人、卖方和拍卖行都是风险中性的,目标都是预期收益最大化。

收稿日期: 2017-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(71171052)

第一作者: 女, 1978年生, 讲师

E-mail: yangwx@mail.buct.edu.cn

在本文的讨论中, $b_1(v)$ 、 ER_1^S 、 ER_1^H 分别表示在一级价格拍卖中投标者的均衡投标策略、卖方的预期收益以及拍卖行的预期收益; $b_2(v)$ 、 ER_2^S 、 ER_2^H 表示二级价格拍卖中相关的量。

2 投标者的投标策略

2.1 一级价格密封式拍卖

设投标者的投标函数为 $b_1(v)$, 如果某个投标者的私人估价为 v 而报价为 A , 则该投标者的预期收益为

$$\pi(v, A) = \left[v - \left(1 + \frac{1}{kA} \right) A \right] F^{n-1}(b_1^{-1}(A)) \quad (1)$$

在对称的贝叶斯-纳什均衡中, 当 $A = b_1(v)$ 时投标者的预期收益最大, 所以有

$$\frac{\partial \pi(v, A)}{\partial A} \Big|_{A=b_1(v)} = 0 \quad (2)$$

由包络定理以及式(1)、(2)可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(v, A)}{\partial v} \Big|_{A=b_1(v)} &= \frac{\partial \pi(v, A)}{\partial v} \Big|_{A=b_1(v)} + \frac{\partial \pi(v, A)}{\partial A} \\ \frac{\partial A}{\partial v} \Big|_{A=b_1(v)} &= \frac{\partial \pi(v, A)}{\partial v} \Big|_{A=b_1(v)} = F^{n-1}(b_1^{-1}(A)) \Big|_{A=b_1(v)} = \\ F^{n-1}(v) \end{aligned} \quad (3)$$

对微分方程(3)两边同时积分得

$$\pi(v, b_1(v)) - \pi(v_*, b_1(v_*)) = \int_{v_*}^v F^{n-1}(x)$$

$dx, v \geq v_*$

又因为

$$\pi(v_*, b_1(v_*)) = 0, \pi(v, b_1(v)) = \left[v - \left(1 + \frac{1}{kb_1(v)} \right) b_1(v) \right] F^{n-1}(v)$$

令 $B(v) = \left(1 + \frac{1}{kb_1(v)} \right) b_1(v)$, 则由上面两式可解出

$$B(v) = v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} \quad (4)$$

其中 $B(v)$ 和 Riley 等^[2] 的均衡投标策略一致, 即和不考虑佣金只考虑保留价时的均衡投标策略一致。进而有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{kb_1(v)} \right) b_1(v) &= B(v) = v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} = \\ \frac{1}{G(v)} \int_{v_*}^v yg(y) dy \end{aligned} \quad (5)$$

从而得

$$b_1(v) = B(v) - \frac{1}{k} = v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} - \frac{1}{k} \quad (6)$$

结论 1 同时带有保留价 r 和佣金率 $c = \frac{1}{kb}$ 的一级价格密封式拍卖的均衡报价策略为

$$b_1(v) = B(v) - \frac{1}{k} = v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} - \frac{1}{k},$$

$v \geq v_*$

其中

$$B(v) = v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)}$$

$$G(v) = F^{n-1}(v)$$

$$v_* = r + \frac{1}{k}$$

从式(5)还可以算出

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1(v)}{\partial r} &= \frac{G(v_*)}{G(v)} > 0 \\ \frac{\partial b_1(v)}{\partial k} &= -\frac{1}{k^2} \frac{G(v_*)}{G(v)} + \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{G(v_*)}{G(v)} \right] > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

结论 2 在本节的模型中, 均衡报价策略与 k 成正比, 即 k 越大报价越高; 均衡报价与保留价 r 也成正比。

结论 2 与实际情况相符, 即当 k 变大时佣金率 c 变小, 因此投标人需要支付的佣金变少, 投标人报价会更加积极。

2.2 二级价格密封式拍卖

设投标者的投标函数为 $b_2(v)$, 如果某投标者的私人估价为 v 而报价为 $b_2(v)$, 则他的预期收益是

$$\pi = \int_{v_*}^v \left[v - \left(1 + \frac{1}{kb_2(y)} \right) b_2(y) \right] dF^{n-1}(y) \quad (8)$$

根据包络定理和一阶条件有

$$\left[v - \left(1 + \frac{1}{kb_2(v)} \right) b_2(v) \right] [F^{n-1}(v)]' = 0 \quad (9)$$

从而得到 $v - b_2(v) - \frac{1}{k} = 0, b_2(v) = v - \frac{1}{k}$ 。

结论 3 同时带有保留价 r 和佣金率 $c = \frac{1}{kb}$ 的二级价格密封式拍卖的均衡报价策略为

$$b_2(v) = v - \frac{1}{k}, v \geq v_* \quad (10)$$

从式(10)可以看出,二级价格密封式拍卖的报价策略与 k 成正比;与不带佣金率的传统拍卖模型相比,带有反比佣金率 $c = \frac{1}{kb}$ 的拍卖模型的报价降低。

3 收益比较

3.1 卖者的收益比较

一级价格密封式拍卖中,卖者的预期收益为

$$ER_1^S = E[b_1(v_{[1,n]})] = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} b_1(v) f_{1,n}(v) dv = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \left[B(v) - \frac{1}{k} \right] n F^{n-1}(v) f(v) dv \quad (11)$$

其中 $v_{[1,n]}$ 表示 v_1, v_2, \dots, v_n 中的最高统计量, $f_{1,n}(v)$ 表示 $v_{[1,n]}$ 的密度函数。

二级价格密封式拍卖中,卖者的预期收益为

$$ER_2^S = E[b_2(v_{[2,n]})] = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} b_2(v) f_{2,n}(v) dv = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \left[v - \frac{1}{k} \right] f_{2,n}(v) dv \quad (12)$$

其中 $v_{[2,n]}$ 表示 v_1, v_2, \dots, v_n 中的次高统计量, $f_{2,n}(v)$ 表示 $v_{[2,n]}$ 的密度函数。此时收益等价原理不再成立。

再对二者的大小比较如下。

$$\text{由于 } B(v) = v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} < v, \text{ 所以有 } b_1(v) < b_2(v); \text{ 同时因为}$$

$$\begin{aligned} f_{2,n}(v) &= n(n-1)F^{n-2}(v)(1-F(v))f(v) = \\ &= n^2 F^{n-2}(v)f(v) - n^2 F^{n-1}(v)f(v) - n F^{n-2}(v)f(v) + \\ &= n F^{n-1}(v)f(v) = n F^{n-2}(v)f(v)[n(1-F(v)) - 1] + \\ &= n F^{n-1}(v)f(v) \end{aligned} \quad (13)$$

当 n 比较大时,有 $n(1-F(v)) > 1$, 从而得出 $f_{2,n}(v) > n F^{n-1}(v)f(v) = f_{1,n}(v)$, 进一步得出 $ER_1^S < ER_2^S$ 。

结论 4 当同时带有保留价 r 和佣金率 $c = \frac{1}{kb}$

时,收益等价定理不成立;如果投标人数较多,卖者采取第二价格拍卖比较有利。

下面考察佣金率的系数 k 以及保留价 r 分别对卖者预期收益的影响。由结论 2 和结论 3 已知

$$\frac{\partial b_1(v)}{\partial k} > 0, \frac{\partial b_2(v)}{\partial k} > 0, \frac{\partial b_1(v)}{\partial r} > 0, \text{ 从而得出}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial ER_1^S}{\partial k} = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{\partial b_1(v)}{\partial k} f_{1,n}(v) dv > 0 \\ \frac{\partial ER_2^S}{\partial k} = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{\partial b_2(v)}{\partial k} f_{2,n}(v) dv > 0 \\ \frac{\partial ER_1^S}{\partial r} = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{\partial b_1(v)}{\partial r} f_{1,n}(v) dv > 0 \end{cases} \quad (14)$$

结论 5 在一级和二级价格密封式拍卖中,卖者的预期收益均与 k 正相关,和保留价 r 也正相关。

结论 5 很好地解释了实际情况,即当 k 变大时佣金率 c 变小,这时投标人报价会提高,卖者的收益也得到了相应的提高。

3.2 拍卖行的收益比较

一级价格密封式拍卖中,拍卖行的预期收益为

$$ER_1^H = E\left[\frac{1}{kb_1(v)} b_1(v_{[1,n]})\right] = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{1}{kb_1(v)} b_1(v) f_{1,n}(v) dv = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{1}{k} f_{1,n}(v) dv = \frac{1}{k} \quad (15)$$

二级价格密封式拍卖中,拍卖行的预期收益为

$$ER_2^H = E\left[\frac{1}{kb_2(v)} b_2(v_{[2,n]})\right] = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{1}{kb_2(v)} b_2(v) f_{2,n}(v) dv = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \frac{1}{k} f_{2,n}(v) dv = \frac{1}{k} \quad (16)$$

结合 3.1 节中卖者的收益可知

$$ER_1^S + ER_1^H = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} B(v) f_{1,n}(v) dv \quad (17)$$

等式(17)的右边恰好是一级价格拍卖中不带佣金时卖者的预期收益^[2]。

同理有

$$ER_2^S + ER_2^H = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} v f_{2,n}(v) dv \quad (18)$$

等式(18)的右边恰好是二级价格拍卖中不带佣金时卖者的预期收益。

结论 6 当同时带有保留价 r 和佣金率 $c = \frac{1}{kb}$ 时,一级和二级密封式拍卖中卖者的预期收益均减少,减少的部分正好是拍卖行获得的收益。

结论 7 在本文的两种拍卖方式中,拍卖行的预期收益相等,且与 k 成反比。

结论 7 和实际情况是一致的,即当 k 变大时,佣金率 c 变小,拍卖行的收益因此而变少。

3.3 投标者的收益比较

一级价格密封式拍卖中,投标人的预期收益为

$$\pi_1 = \left[v - \left(1 + \frac{1}{kb_1(v)} \right) b_1(v) \right] F^{n-1}(v) =$$

$$\begin{aligned} \left[v - b_1(v) - \frac{1}{k} \right] F^{n-1}(v) &= \left[v - \left(v - \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right] F^{n-1}(v) = \frac{\int_{v_*}^v G(y) dy}{G(v)} F^{n-1}(v) = \int_{v_*}^v \\ &F^{n-1}(y) dy \end{aligned} \tag{19}$$

二级价格密封式拍卖中, 投标人的预期收益为

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \int_{v_*}^v \left[v - \left(1 + \frac{1}{kb_2(y)} \right) b_2(y) \right] dF^{n-1}(y) = \\ &\int_{v_*}^v \left[v - b_2(y) - \frac{1}{k} \right] dF^{n-1}(y) = \int_{v_*}^v \left[v - \left(y - \frac{1}{k} \right) - \right. \\ &\left. \frac{1}{k} \right] dF^{n-1}(y) = \int_{v_*}^v (v - y) dF^{n-1}(y) = \int_{v_*}^v F^{n-1}(y) \\ &dy + F^{n-1}(v_*)(v_* - v) \leq \pi_1 \end{aligned} \tag{20}$$

可以看出, π_1 与 v_* 成反比, 而由于 $v_* = r + \frac{1}{k}$, v_* 与 k 成反比, 与 r 成正比, 所以 π_1 与 k 成正比, 与 r 成反比。

同理, 由于

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial v_*} = (n-1)F^{n-2}(v_*)f(v_*)(v_* - v) \leq 0$$

所以 π_2 与 v_* 成反比, 从而与 k 成正比, 与 r 成反比。

结论 8 在本文的模型中, 投标人在一级价格拍卖中获得的预期收益大于二级价格拍卖, 因此, 投标者更愿意选择一级价格拍卖, 两者均和 k 成正比, 和 r 成反比。

结论 8 也与实际情况符合。从投标者的角度看, 无论是佣金的收取还是保留价的设定都是不利信息, 因此, 投标者的预期收益会相应降低。

对结论 1~8 的正确性作如下实例验证。假设只有两个投标者 ($n=2$), 私人估价 v 服从区间 $[0, 1]$ 上的同一均匀分布, 分布函数和密度函数分别为 $F(v)=v, f(v)=1, v \in [0, 1]$ 。计算结果如表 1 所示。

表 1 实例计算结果

Table 1 Calculation results of the example

指标	一级价格拍卖	二级价格拍卖
投标策略	$\frac{v}{2} + \frac{v_*^2}{2v} - \frac{1}{k}$	$v - \frac{1}{k}$
卖方收益	$\frac{1}{3} + v_*^2 - \frac{1}{k}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{k}$
拍卖行收益	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$
投标者收益	$\frac{1}{2}(v^2 - v_*^2)$	$\frac{1}{2}(v^2 + v_*^2) - v_*v$

由表 1 可以看出, 结论 1~8 都是正确的。

4 结论

(1) 假设佣金率与成交价是反比关系, 本文通过研究一个同时带有保留价和反比佣金率的拍卖模型, 给出了一般分布下的一级价格密封式拍卖和二级价格密封式拍卖的均衡投标策略, 并且发现二者均与 k 成正比, 与保留价 r 也成正比。

(2) 通过计算卖方、拍卖行、投标者三方的预期收益, 发现在本文的模型中, 收益等价定理不再成立; 但是当投标人数较多时, 卖者采取第二价格拍卖比较有利; 卖者的预期收益与 k 及保留价 r 均成正相关。

(3) 投标者在一级价格密封式拍卖中获得的预期收益大于二级价格密封式拍卖, 二者均和 k 成正比, 和 r 成反比。

参考文献:

[1] McAfee R P, McMillan J. Bidding rings[J]. American Economic Review, 1992, 82(3): 579-599.

[2] Riley J G, Samuelson W F. Optimal auctions[J]. American Economic Review, 1981, 71(3): 381-392.

[3] McAfee R P, McMillan J. Auctions and bidding[J]. Journal of Economic Literature, 1987, 25(2): 699-738.

[4] 汪海, 张卫东, 王晶晶. 最优拍卖理论及其实践述评[J]. 经济问题探索, 2007(10): 172-176.

Wang H, Zhang W D, Wang J J. Optimal auction and it's application[J]. Inquiry into Economic Issues, 2007 (10): 172-176. (in Chinese)

[5] 敬辉蓉, 李传沼. 第一、第二密封价格拍卖的最优投标人数研究[J]. 生产力研究, 2007, 151(14): 55-56.

Jing H R, Li C Z. Optimal bidding number of first and second sealed-bidding auctions [J]. Productivity Research, 2007, 151(14): 55-56. (in Chinese)

[6] 王彦, 毕志伟, 李楚霖. 佣金收取对拍卖结果的影响[J]. 管理科学学报, 2004, 7(4): 44-48.

Wang Y, Bi Z W, Li C L. Impact on the outcome of the auction commission charged [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(4): 44-48. (in Chinese)

[7] 毕志伟, 王彦. 考虑佣金的关联价值拍卖模型[J]. 管理科学学报, 2005, 8(3): 24-27.

Bi Z W, Wang Y. Associated value auction model with a commission rate [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(3): 24-27. (in Chinese)

- [8] 杨卫星, 刘树林. 带有线性佣金率的密闭式拍卖模型研究[J]. 统计与决策, 2011(13): 35–38.
Yang W X, Liu S L. Study on the auction model with a linear commission rate[J]. Statistics and Decision, 2011(13): 35–38. (in Chinese)
- [9] 刘树林, 杨卫星. 第一价格密封拍卖中的最优保留价

和最优佣金率研究[J]. 经济研究, 2011, 46(11): 145–156.
Liu S L, Yang W X. Study on optimal reserve price and optimal commission rate of a first-price sealed-bid auction model[J]. Economic Research, 2011, 46(11): 145–156. (in Chinese)

Study of an auction model with both a reserve price and an inverse commission rate

YANG WeiXing

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In order to reflect the actual situation, this paper reports a study of a sealed-bid auction model with both a reserve price and an inverse commission rate. Firstly, we find the equilibrium bidding strategy in both first-price and second-price sealed-bid auctions. Secondly, we obtain the expected revenue of the bidder, seller and auction house, then these results are compared using two models—one with a fixed commission rate and the other without a commission rate. Thirdly, we study the influence of the reserve price and the coefficient in the inverse commission rate on the equilibrium bidding strategy, and on the expected revenues of the bidder, seller and auction house. The results indicate that the expected revenue of the seller has a positive correlation with both r and k , whereas the expected revenue of the bidder has a positive correlation with k but a negative correlation with r .

Key words: sealed-bid auction; inverse commission rate; reserve price; expected revenue

(责任编辑:汪 琴)