

一种有效求解厌恶设施选址问题的混合启发式算法

袁文燕¹ 闫白鹭¹ 吴军² 李健^{2*}

(北京化工大学 1. 理学院; 2. 经济管理学院, 北京 100029)

摘要: 由于 1-maximin 模型的目标函数在每条边上分段线性的凹函数, 基于 1-maximin 模型的这一特点, 将粒子群算法和黄金分割法有机结合起来, 提出了一种求解 1-maximin 模型的混合粒子群-黄金分割 (PSO-GS) 算法。数值实验表明, PSO-GS 算法求解 1-maximin 模型和 1-maxisum 模型较 UnCenter 和 Newalgorithm 算法效率高。

关键词: 厌恶设施选址; 启发式算法; 混合粒子群-黄金分割 (PSO-GS) 算法

中图分类号: O221 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2017.06.016

引言

选址问题是运筹学中的经典问题之一, 广泛应用于生产、物流等领域, 如利用一些特定的方法进行工厂、仓库、急救中心的选址等。现代网络选址理论最早由 Hakimi^[1] 提出, 利用该理论可以在网络中找到一个或多个设施的最佳位置, 并且在满足客户需求的前提下达到费用最小化、客户满意度最大化等目标。在众多选址目标中有一类设施, 如垃圾填埋场^[2]、沼气工厂^[3]、生物柴油厂^[4]、水泥制造厂^[5]等是不受欢迎的, 针对此类设施的选址问题称为厌恶设施选址问题。这类厌恶设施如选址不当, 不仅会造成环境污染, 还可能危害生命安全, 因此, 研究厌恶设施的选址问题有着非常重要的现实意义。

厌恶设施选址问题中主要有两大类模型: 1-maximin 模型和 1-maxisum 模型。二者的不同之处在于目标函数的设定。前者的选址目标是保证选址位置与所有客户权重距离中的最小权重距离达到最大; 后者的目标是让选址位置与所有客户的权重距离之和达到最大。

目前针对 1-maximin 模型的研究较多。Melachrinoudis 等^[6] 证明了 1-maximin 模型的目标

函数在每条边上分段线性凹函数。Tamir^[7] 用动态数据结构的方法, 给出了通路和星图等特殊结构的求解算法。Colebrook 等^[8] 在文献[6]的工作基础上, 基于去除无效边的思想提出了 UnCenter 算法, 数值实验表明该算法找到最优解所需的时间有所减少。Nadirlar 等^[9] 通过去除冗余的整数变量的方法简化了混合整数规划模型, 并用改进的分支定界法来求解 1-maximin 模型。

20 世纪 70 年代中期, Church 等^[10] 提出了 1-maxisum 模型, 并基于有限的易于生成的可行解区域内至少有一个最优解的思想给出了 1-maxisum 模型的求解算法。Colebrook 等^[11] 利用新的上界方法求解了 1-maxisum 模型, 并在数值实验部分给出了不同密度图下的计算结果。他们还对厌恶设施选址模型以及求解算法进行了总结^[12]。此外, Yamaguchi^[13] 通过集体谈判的方式来选取厌恶设施的位置。Song 等^[14] 提出两种替代的数学优化模型目标是减少厌恶设施选址对人们情绪的总体影响程度。

以上文献中的厌恶设施选址位置都是用精确解的方法给出, 但是其计算时间慢。近年来启发式算法(如蚁群算法、遗传算法和粒子群算法等等)逐渐成为求解优化问题的有效方法, 其应用已深入到各个领域。粒子群算法是由 Eberhart 等^[15] 提出的一种启发式算法, 在求解传感器网络定位、常压塔稳态操作、车辆路径问题、交通流预测、数据网络等许多问题时表现出良好的性能^[16-20]。1-maximin 模型的目标函数在每条边上单峰函数^[6], 而黄金分割法是求解单峰函数极值点的很好选择。基于此, 本

收稿日期: 2017-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(71571010/71372195); 北京化工大学学科建设项目(XK1522)

第一作者: 女, 1969 年生, 副教授

* 通讯联系人

E-mail: lijian@amss.ac.cn

文提出了粒子群与黄金分割法相结合的 PSO-GS 算法,用粒子群算法搜索最优解所在的边,再用黄金分割法在最优边上寻优,得到厌恶设施选址的最优位置,并将 PSO-GS 算法与 UnCenter, Newalgorithm 算法进行比较,以期为厌恶设施选址提供一种新的更高效的方法。

1 厌恶设施选址模型

1.1 距离的定义

令 $N = (V, E)$ 是一个无向赋权简单联通图,其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是具有 n 个节点的节点集合,节点数表示客户数目; $E = \{e_j = (v_s, v_t) : v_s, v_t \in V, j = 1, 2, \dots, m\}$ 是具有 m 条边的边集合,边数表示在道路系统中可以连通的路径数目。每个节点的权重 w_i 和每条边 e_j 的长度 l_j 分别由公式(1)、(2)计算

$$v_i \in V \rightarrow w(v_i) = w_i > 0 \quad (1)$$

$$e_j = (v_s, v_t) \in E \rightarrow l(e_j) = l_j > 0 \quad (2)$$

图1为5个客户8条边的简单联通图。图中每个点上括号外的数字是点的标号,括号内的数字是客户的权重;每条边上括号中的数字表示该条边的长度。

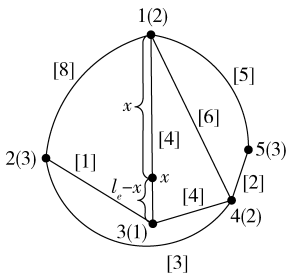


图1 5个客户8条边的网络

Fig. 1 The network with 5 customers and 8 edges

从图1中任意取两点 $v_s, v_t (v_s, v_t \in v_1 \dots v_5)$, 定义其距离为两点之间的最短距离,用 $d(v_s, v_t)$ 表示。边 $e = (v_s, v_t) \in E$ 上的任意一点 x 到 V 上的点 v_i 的距离定义为

$$d(x, v_i) = \min \{x + d(v_s, v_i), l_e - x + d(v_t, v_i)\} \quad (3)$$

1.2 1-maximin 和 1-maxisum 选址模型

对于图 N 中给定点 x , 定义

$$f_{\min}(x) = \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i) \quad (4)$$

$$f_{\text{sum}}(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(x, v_i) \quad (5)$$

其中 $f_{\min}(x)$ 表示设施位置到所有客户的最小权重距离, $f_{\text{sum}}(x)$ 表示设施位置到所有客户的权重距离

之和。

厌恶设施 1-maximin 模型为

$$\max_{x \in N} \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i) = \max_{x \in N} f_{\min}(x) \quad (6)$$

即找到设施所在的位置并使 $f_{\min}(x)$ 达到最大。

厌恶设施 1-maxisum 模型为

$$\max_{x \in N} \sum_{v_i \in V} w_i d(x, v_i) = \max_{x \in N} f_{\text{sum}}(x) \quad (7)$$

即找到设施所在的位置并使 $f_{\text{sum}}(x)$ 达到最大。

2 PSO-GS 算法

考虑到 1-maximin 和 1-maxisum 选址模型的特点,本文采用启发式算法对其进行求解。本文提出的 PSO-GS 算法包含了 3 个环节:首先采用粒子群算法快速搜索最优解的大致位置,然后用加步探索法在第一阶段搜索到的位置上找到一个单峰函数区间,最后利用黄金分割法在加步探索法得到的区间内搜索,从而求得模型的最优解。

2.1 粒子群算法

标准的粒子群算法中速度、位置和惯性权重的更新公式分别如式(8)、(9)、(10)所示^[21]

$$v_i^{k+1} = \omega v_i^k + c_1 \xi (p_i^k - x_i^k) + c_2 \eta (p_g^k - x_i^k) \quad (8)$$

其中, v_i^k 是第 i 个粒子第 k 次迭代的速度; x_i^k 是第 i 个粒子第 k 次迭代的位置; p_i^k 是第 i 个粒子第 k 次迭代时的个体最优值; p_g^k 是第 k 次迭代中所有粒子经过的最优位置; c_1, c_2 是学习因子,表示向个体最优和全局最优学习的能力; ξ, η 是 $[0, 1]$ 区间上均匀分布的随机数; ω 是惯性权重。

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \quad (9)$$

$$\omega = \omega_{\max} - \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{I_p} \times c \quad (10)$$

其中 $\omega_{\max}, \omega_{\min}$ 分别是最大、最小权重; I_p 为粒子群迭代的总次数; c 为当前的迭代次数。从公式(10)中可以看出惯性权重随着迭代次数的增大而逐渐减小。

2.2 加步探索法

加步探索法是一种区间试探法,其基本思路是从一个初始点出发,按照一定的步长进行探索找到一个区间,使函数在此区间呈现低—高一低的形态。

2.3 黄金分割法

黄金分割法是求解单峰或单谷函数最优解的有效方法,其区间更新公式如式(11)、(12)

$$x_{l(k+1)} = a_k + 0.382 \times (b_k - a_k) \quad (11)$$

$$x_{r(k+1)} = a_k + 0.618 \times (b_k - a_k) \quad (12)$$

其中 $x_{l(k+1)}$ 和 $x_{r(k+1)}$ 分别是第 $k+1$ 次迭代的左右分位点, a_k 和 b_k 分别是第 k 次迭代的左右端点。通过比较函数值的大小, 黄金分割法得到区间长度缩小为原来长度 0.618 倍的包含最优解的区间。

2.4 PSO-GS 算法

本文基于 1-maximin 选址模型的特点以及粒子群算法和黄金分割法的优势, 再结合加步探索法, 提出的 PSO-GS 算法流程图如图 2。

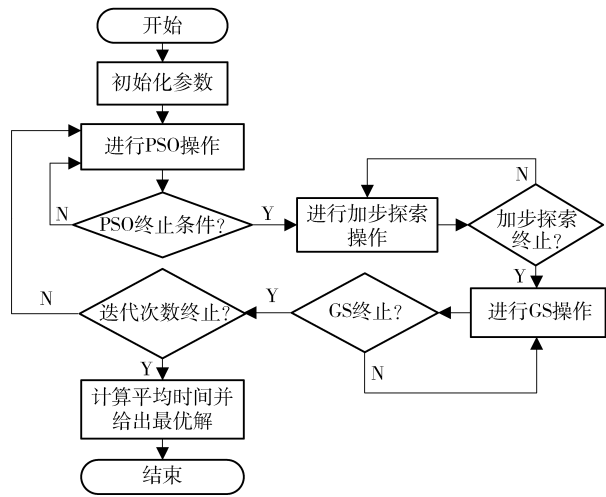


图 2 PSO-GS 算法流程图

Fig. 2 Flow chart of the PSO-GS algorithm

3 数值实验

3.1 实验设置

将本文 PSO-GS 算法与 UnCenter 和 Newalgorithm 算法^[8, 11-12]进行了比较。用 MATLAB2011 编写程序, 在联想 M8400t-N000 上运行, 所用机器的主频 3.4 GHz, 内存 4 G, 操作系统为 XP。算法中各参数设置如下: 学习因子 $c_1 = c_2 = 1.5$, 黄金分割法的精度 $\varepsilon = 10^{-6}$, 步长增加的倍数 $\alpha = 2$, 加步探索的初始步长 $h = 0.0001$, 最大最小权重分别为 $\omega_{\max} =$

0.9、 $\omega_{\min} = 0.4$, 粒子群的迭代次数为 $I_p = 5$, 总迭代次数为 $I_n = 50$ 。

3.2 PSO-GS 与 UnCenter, Newalgorithm 算法性能比较

将 PSO-GS 算法与 UnCenter 和 Newalgorithm 算法的运行时间进行比较, 统计的计算时间均不包括用弗洛伊德算法得到最短路的时间。

本文参照文献^[8]、^[11-12]生成数据给定客户数目后, 根据不同的密度 d (即点的数目 n 与边的数目 m 的比例关系) 得到边的数目, 其计算公式为 $m = d \times n \times (n - 1) / 2$ 。本文取密度分别为 1/2、1/4、1/8、1/16, 不同密度下客户数目取值如表 1。计算时所选取的参数为: 客户的权重范围 1 ~ 10, 边的长度范围 1 ~ 50。

表 1 客户数目取值表

Table 1 The number of customers

模型	d	开始客户数目	最终客户数目	间隔
1-maximin	1/2, 1/4	100	500	100
	1/8, 1/16	125	1000	125
1-maxisum	1/2, 1/4, 1/8	100	1000	50

1-maxisum 模型的计算结果如图 3 所示, 1-maximin 模型的计算结果如图 4 所示。

由图 3 可知, 不同密度的道路系统中, 随着客户数目的增多, PSO-GS 算法求解 1-maxisum 选址模型得到最优解的效率优于 Newalgorithm 算法。图 4 表明, 在低密度 (1/16 和 1/8) 系统中, 客户数目在 375 ~ 875 时, PSO-GS 算法的计算时间少于 UnCenter 算法, 当客户数目增大到 1000 时两者的计算时间比较接近; 在高密度 (1/4 和 1/2) 系统中, 客户数目大于 300 时, PSO-GS 算法的计算时间大约为

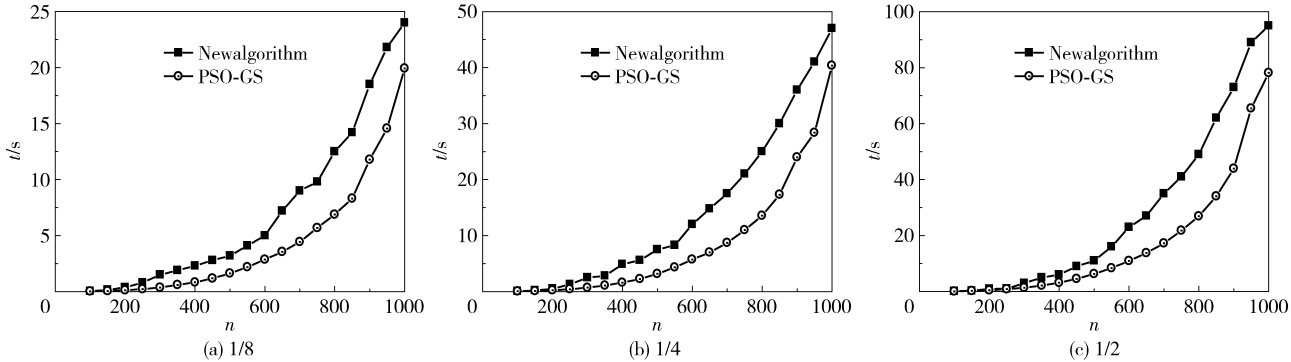


图 3 不同网络密度下求解 1-maxisum 选址模型的算法性能比较图

Fig. 3 Performances of the different algorithms in a solving 1-maxisum model with different densities

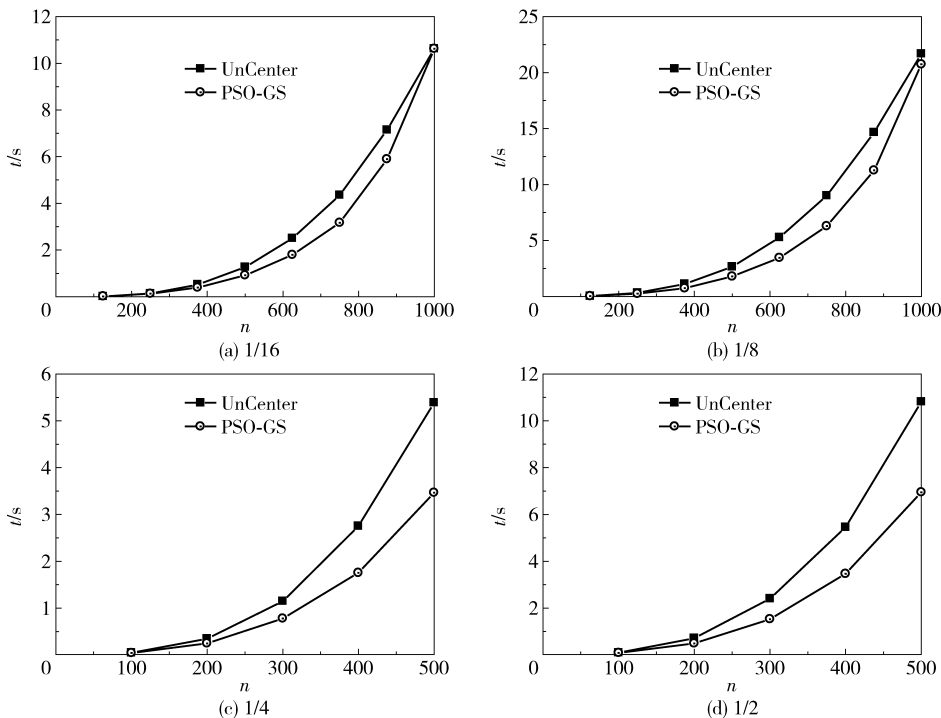


图4 不同网络密度下求解1-maximin 选址模型的算法性能比较

Fig.4 Performances of the different algorithms in a solving 1-maximin model with different densities

UnCenter 算法的一半,这表明 PSO-GS 算法更适用于求解高密度问题。在现实中,道路往往是错综复杂的,高密度系统较低密度系统更常见,因此,PSO-GS 算法有广泛的应用。

4 结束语

本文提出了求解厌恶设施 1-maximin 和 1-maximum 选址模型的混合启发式算法:PSO-GS 算法。数值实验结果表明该方法的计算时间优于 UnCenter 和 Newalgorithm 算法,是求解 1-maximin 和 1-maximum 选址模型的有效算法。

参考文献:

- [1] Hakimi S L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph[J]. Oper Res, 1964, 12(3): 450-459.
- [2] 李安宇, 杨丰梅. 垃圾填埋场选址问题的模糊数学模型研究[J]. 运筹与管理, 2007, 16(5): 35-42.
Li A Y, Yang F M. A fuzzy multiobjective model for locating landfills[J]. Operations Research and Management Science, 2007, 16(5): 35-42. (in Chinese)
- [3] Silva S, Alçada-Almeida L, Dias L C. Multiobjective programming for sizing and locating biogas plants: a model and an application in a region of Portugal[J].

- Computers & Operations Research, 2017, 83: 189-198.
- [4] Costa Y, Duarte A, Sarache W. A decisional simulation-optimization framework for sustainable facility location of a biodiesel plant in Colombia[J]. Journal of Cleaner Production, 2017, 167: 174-191.
- [5] Ozkan N F, Ulutas B H. Efficiency analysis of cement manufacturing facilities in Turkey considering undesirable outputs[J]. Journal of Cleaner Production, 2017, 156: 932-938.
- [6] Melachrinoudis E, Zhang F G. An $O(mn)$ algorithm for the 1-maximin problem on a network[J]. Comput Oper Res, 1999, 26(9): 849-869.
- [7] Tamir A. Improved complexity bounds for center location problems on networks by using dynamic data structures[J]. SIAM J Discrete Math, 1988, 1(3): 377-396.
- [8] Colebrook M, Gutiérrez J, Alonso S, et al. A new algorithm for the undesirable 1-center problem on networks[J]. Journal of the Operational Research Society, 2002, 53(12): 1357-1366.
- [9] Nadirler D, Karasak E. Mixed integer programming-based solution procedure for single-facility location with maximin of rectilinear distance[J]. Journal of the Operational Research Society, 2008, 59(4): 563-570.
- [10] Church R L, Garfinkel R S. Locating an obnoxious facility on a network[J]. Transport Sci, 1978, 12(2): 107-118.

- [11] Colebrook M, Gutiérrez J, Sicilia J. A new bound and an $O(mn)$ algorithm for the undesirable 1-median problem (maxian) on networks[J]. *Comput Oper Res*, 2005, 32(2): 309–325.
- [12] Colebrook M, Sicilia J. Hazardous facility location models on networks[M] // *Handbook of OR/MS Models in Hazardous Materials Transportation*. New York, USA: Springer, 2013: 155–186.
- [13] Yamaguchi K. Location of an undesirable facility on a network: a bargaining approach [J]. *Mathematical Social Sciences*, 2011, 62(2): 104–108.
- [14] Song B D, Morrison J R, Dae Ko Y. Efficient location and allocation strategies for undesirable facilities considering their fundamental properties[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 65(3): 475–484.
- [15] Eberhart R, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory [C] // *International Symposium on Micro Machine and Human Science*. Piscataway, USA: IEEE, 2002: 39–43.
- [16] Yu Z J, Wei J M, Liu H T. Force-directed hybrid PSO-SNTO algorithm for acoustic source localization in sensor networks[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(8): 1671–1677.
- [17] 杨雪飞, 楚纪正. 基于局部扰动粒子群算法的常压塔稳态操作优化[J]. *北京化工大学学报: 自然科学版*, 2014, 41(5): 89–95.
- [18] Moghaddam B F, Ruiz R, Sadjadi S J. Vehicle routing problem with uncertain demands: an advanced particle swarm algorithm[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 62(1): 306–317.
- [19] 李松, 刘力军, 翟曼. 改进粒子群算法优化 BP 神经网络的短时交通流预测[J]. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(9): 2045–2049.
- [20] Li S, Liu L J, Zhai M. Prediction for short-term traffic flow based on modified PSO optimized BP neural network [J]. *System Engineering Theory and Practice*, 2012, 32(9): 2045–2049. (in Chinese)
- [21] Karami A, Guerrero-Zapata M. A hybrid multiobjective RBF-PSO method for mitigating DoS attacks in named data networking[J]. *Neurocomputing*, 2015, 151: 1262–1282.
- [22] Jensi R, Jiji G W. An enhanced particle swarm optimization with levy flight for global optimization[J]. *Applied Soft Computing*, 2016, 43: 248–261.

An effective hybrid heuristic algorithm for solving undesirable facility location problems

YUAN WenYan¹ YAN BaiLu¹ WU Jun² LI Jian^{2*}

(1. Faculty of Science; 2. School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The objective function of the 1-maximin model is piecewise linear and concave. Based on the characteristics of the 1-maximin model, this paper proposes a hybrid particle swarm optimization-golden section (PSO-GS) algorithm to solve the 1-maximin model effectively. Numerical experiments show that the PSO-GS algorithm solves the 1-maximin model and the 1-maxisum model more efficiently than either the UnCenter or Newalgorithm algorithms.

Key words: undesirable facility location; heuristic algorithm; particle swarm optimization-golden section (PSO-GS) algorithm

(责任编辑: 汪 琴)