一类具有强阻尼和强时滞的拟线性粘弹性波动方程解的衰减估计

刁 林[1] 常延贞[2]*
(1. 商丘学院 计算机工程学院, 河南 商丘 476000; 2. 北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要: 研究一类具有强阻尼和强时滞作用的拟线性粘弹性波动方程的初边值问题, 在满足一定条件下,通过构造合适的 Lyapunov 泛函得到能量的衰减估计。

关键词: 拟线性粘弹性波动方程; 衰减估计; 强阻尼和强时滞
中图分类号: O175. 2 **DOI**: 10. 13543/j. bhxbzr. 2017. 05. 020

引 言

时滞现象广泛存在于物理学、化学、力学、经济学等研究领域。一般来说,这些现象不仅依赖于当前的状态,而且依赖于过去的状态[1-3]。近几年来,具有时滞现象的二阶发展方程相关性质的研究引起了国内外许多数学同行们的广泛关注,并且成为研究热点。

文献[2]的研究结果表明,时滞作用是使得系统不稳定的一个重要因素,即使是一个比较小的时滞作用也可以使原来稳定的系统变得不稳定,必须添加一些额外的耗散条件才可使系统再稳定。Datko[3]考虑了一维时滞波动方程

$$u_{tt}=u_{xx}-2u_t(x,t-\tau),(x,t)\in(0,1)\times(0,+\infty)$$

的初边值问题,并得到时滞作用可破坏原本稳定波动方程的结论[2]。

对于如下的 n-维波动方程初边值问题

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)+\mu_1(x,t)+\mu_2(x,t-\tau)=0,\\ \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)\\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega\\ u(x,t)=0,(x,t)\in\Gamma_0\times(0,+\infty)\\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}(x,t)=0,(x,t)\in\Gamma_1\times(0,+\infty)\end{cases}$$

没有时滞项($\mu_2=0$)时,系统呈指数型稳定状态[4];有时滞项($\mu_2>0$)时,Nicaise 等[5]的研究结果表明,当 $\mu_2<\mu_1$ 时系统稳定,当 $\mu_2\geqslant\mu_1$ 时存在一列时滞使系统不稳定。

Cavalcanti 等[6]首次研究了如式(1)所示的拟线性粘弹性波动方程

$$|u_t|^\rho u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,\mathrm{d}s-\gamma\Delta u_t=F(x,u,u_t) \tag{1}$$

进一步,当 $F(x,u,u_t)=0$,并假设 $\rho>0$ 满足 $H_0^1(\Omega)\to L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ 时,得到了 $\gamma\geqslant0$ 时解的整体存在性及 $\gamma>0$ 时能量指数型稳定性的结果。

由于式(1)来源于式(2)

$$f(u_t)u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}=0 \tag{2}$$

当 $f(u_t)$ 为常数时,Δu_{tt} 项的存在使式(2)不同于 D'Alembert 型波动方程[7];当 $f(u_t)$ 不为常数时,式(2)表示材料的密度、浓度依赖于速率 u_t[8]。而当 $\rho=0$、$\mu_2=0$ 及去掉 Δu_{tt} 项时,式(1)变为经典的粘弹性波动方程[9-10]。

Kirane 等[11]研究了方程

$$u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,\mathrm{d}s+\mu_1 u_t(x,t)+\mu_2 u_t(x,t-\tau)=0$$

的初边值问题,当 $\mu_2\leqslant\mu_1$ 时,利用 Lyapunov 泛函法得到了能量的衰减估计,该方程在文献[12-14]中得到了进一步研究。

此外,Messaoudi 等[15]首次研究了如下具强时滞的波动方程问题

收稿日期: 2017-03-17
第一作者: 女,1982 年生,讲师
* 通讯联系人
E-mail: changyz@ mail. buct. edu. cn

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)-\mu_1\Delta u_t(x,t)+\mu_2\Delta u_t(x,t)=0, \\ \qquad \Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,t)=0, \\ \qquad \partial\Omega\times(0,+\infty) \\ u_t(x,t-\tau)=f_0(x,t), \\ \qquad t\in(0,\tau) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x), \\ \qquad x\in\Omega \end{cases}$$

利用半群理论得到了该系统的整体适定性以及在一定条件下能量的衰减估计。

然而,同时具有强阻尼和强时滞性的粘弹性波动方程解的研究尚处于起步阶段,故本文在上述研究结果的基础上,考虑如下具有强阻尼与强时滞作用的拟线性粘弹性方程的初边值问题:

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s- \\ \qquad \mu_1\Delta u_t-\mu_2\Delta u_t(t-\tau)=0, \\ \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega \\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,t-\tau)=f_0(x,t-\tau),\ x\in\Omega,t\in(0,\tau) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界集,$\tau>0$ 代表时滞,μ_1、μ_2 为实数,(u_0,u_1,f_0) 为给定的合适初始数据。本文的目的是通过构造合适的 Lyapunov 泛函来研究式(1)解的能量衰减估计。

1 预备知识

对于式(3),假设 ρ 满足

$$0<\rho\leqslant\frac{2}{N-2}\ (N\geqslant3)\ ,\text{或}\rho>0(N=1,2) \tag{4}$$

对于记忆核 $g(t)$,假设满足条件(H)

(H):g: $R^+\to R^+$ 是一个连续可微函数,满足 $1-\int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s=l>0$,并且存在正的非增函数 $\xi(t)$,使得式(5)成立。

$$g'(t)\leqslant-\xi(t)g(t),\int_0^{+\infty}\xi(s)\mathrm{d}s=+\infty \tag{5}$$

引理 1 (Sobolev-Poincaré 不等式)

若 $2\leqslant p\leqslant\frac{2N}{N-2}$,$u\in H_0^1(\Omega)$,则存在 $c_s>0$,使得 $\|u\|_p\leqslant c_s\|\Delta u\|_2$。

引理 2 对任意的 $g\in C^1(R)$ 和 $\phi\in H^1(0,T)$ 有

$$-2\int_0^t\int_\Omega g(t-s)\phi\phi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((g\lhd\phi)(t)-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\|\phi\|_2^2\big)+g(t)\|\varphi\|_2^2-(g'\lhd\phi)(t)$$

其中 $(g\lhd\phi)(t)=\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\int_\Omega|\phi(s)-\phi(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$。

进一步,定义新的变量 z,满足

$$z(x,k,t)=u_t(t-\tau k),\ x\in\Omega,k\in(0,1)$$

则有

$\tau z_t(x,k,t)+z_k(x,k,t)=0,(x,k,t)\in\Omega\times(0,1)\times(0,+\infty)$。

因此式(3)可转化为式(6)

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s- \\ \qquad \mu_1\Delta u_t(x,t)-\mu_2\Delta z(x,1,t)=0, \\ \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty) \\ z_t(x,k,t)+z_k(x,k,t)=0, \\ \qquad x\in\Omega,k\in(0,1),t>0 \\ z(x,0,t)=u_t(x,t),x\in\Omega,t>0 \\ z(x,k,0)=f_0(x,-\tau k),x\in\Omega \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega \\ u(x,t)=0,x\in\Omega,t\geqslant0 \end{cases} \tag{6}$$

基于引理 1 和引理 2,结合文献[6]和[11],可以不加证明地给出解的整体存在性定理。

定理 1 假设 $|\mu_2|<\mu_1$,且式(4)和条件(H)成立,则当 $u_0,u_1\in H_0^1(\Omega)$, $f_0\in L^2((0,1),H_0^1(\Omega))$ 时,式(6)至少存在一弱解(u,z),且满足

$u,u_t\in C([0,T],H_0^1(\Omega)),z\in C([0,T],L^2((0,1),H_0^1(\Omega))),T>0$。

2 能量的衰减估计

能量泛函的定义如式(7)

$$E(t)=E(t,u,z)=\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\Big(1-\int_0^t g(t-s)\mathrm{d}s\Big)\|\nabla u(t)\|+\frac{1}{2}(g\lhd\nabla u)(t)+\frac{1}{2}\|\nabla\nabla u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1|\nabla z(x,k,t)|^2\mathrm{d}k\mathrm{d}x \tag{7}$$

其中常数 ξ 满足

$$\tau|\mu_2|\leqslant\xi\leqslant\tau(2\mu_1-|\mu_2|) \tag{8}$$

下面基于能量泛函的定义, 进行相关的估计和证明。

引理 3 设 $E(t)$ 是$[0,T]$上的一个非增函数,且

$$E'(t)\leqslant -c_1\|\nabla u_t\|^2-c_2\int_\Omega|\nabla z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(g'\lhd\nabla u)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2\leqslant\frac{1}{2}(g'\lhd\nabla u)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|^2\leqslant 0,t\geqslant 0 \tag{9}$$

其中

$$c_1=\begin{cases}\mu_1-\dfrac{\xi}{2\tau}-\dfrac{|\mu_2|}{2}>0 & |\mu_2|<\mu_1\\ 0 & |\mu_2|=\mu_1\end{cases}$$

$$c_2=\begin{cases}\dfrac{\xi}{2\tau}-\dfrac{|\mu_2|}{2}>0 & |\mu_2|<\mu_1\\ 0 & |\mu_2|=\mu_1\end{cases}$$

证明　方程组(6)的第一个方程两边同乘以 u_t,利用引理 2 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\rho+2}\|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g\lhd\nabla u)(t)\right]+\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2-\frac{1}{2}(g'\lhd\nabla u)(t)+\mu_1\|\nabla u_t(t)\|_2^2+\mu_2\int_\Omega\nabla z(x,1,t)\cdot\nabla u_t(t)\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

方程组(6)的第二个方程两边同乘以 $\dfrac{\xi}{\tau}z$ 并积分得

$$\frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\int_0^1|\nabla z(x,k,t)|^2\mathrm{d}k\mathrm{d}x+\frac{\xi}{2\tau}\int_\Omega|\nabla z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x-\frac{\xi}{2\tau}\int_\Omega|\nabla z(x,0,t)|^2\mathrm{d}x=0 \tag{11}$$

联立式(10)、(11),并根据式(7)可得

$$E'(t)=-\left(\mu_1-\frac{\xi}{2\tau}\right)\|\nabla u_t(s)\|_2^2-\frac{\xi}{2\tau}\int_\Omega|\nabla z_n(x,1,s)|^2\mathrm{d}x-\mu_2\int_0^t\int_\Omega\nabla z(x,1,s)\cdot\nabla u_t(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g'\lhd\nabla u)(t) \tag{12}$$

进一步,对式(12)右端第三项利用杨不等式 $\left(ab\leqslant\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2\right)$进行估计,即可得式(9)。证毕。

注:由 $E(t)$ 的定义式(7)和引理 3 可知,能量是一致有界的,故式(6)的解是整体存在的。

为了本文主要结论证明的需要和便利,现给出如下几个公式的定义。

$$L(t)=ME(t)+\varepsilon_1\varphi(t)+\varepsilon_2 I(t)+\chi(t)$$

其中 M、ε_2、ε_1 是待定的正常数。

$$\varphi(t)=\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega|u_t|^\rho u_t u\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla u_t(t)\cdot\nabla u(t)\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$I(t)=\tau\int_0^1\int_\Omega \mathrm{e}^{-k\tau}|\nabla z(x,1,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}k \tag{14}$$

$$\chi(t)=\int_\Omega\left(\nabla u_t-\frac{1}{\rho+1}|u_t|^\rho u_t\right)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{15}$$

进一步,可以得到引理 4 的结论。

引理 4　若(u,z)为式(4)的解,则 $L(t)\sim E(t)$,即存在 α_1、$\alpha_2>0$,使得 M 足够大时,有

$\alpha_1 E(t)\leqslant L(t)\leqslant\alpha_2 E(t),\forall t\geqslant 0$。

证明　首先,由 $E(t)$ 的定义式(7)、引理 3 和条件(H),有

$$l\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2\leqslant 2E(t)\leqslant 2E(0),\forall t\geqslant 0 \tag{16}$$

$$\left|\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega|u_t|^\rho u_t u\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\rho+2}\|\nabla u_t\|_2^2+\frac{C_s^{\rho+2}}{(\rho+2)(\rho+1)}\left(\frac{2E(0)}{l}\right)^{\frac{\rho}{2}}\|\nabla u\|_2^2 \tag{17}$$

$$\left|\int_\Omega\nabla u_t(t)\cdot\nabla u(t)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 \tag{18}$$

$$|I(t)|\leqslant c_3\int_\Omega\int_0^1|\nabla z(x,k,t)|^2\mathrm{d}k\mathrm{d}x,c_3>0 \tag{19}$$

其次,利用杨不等式估计 $\chi(t)$,有

$$\left|-\int_\Omega\nabla u_t\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|_2^2+\frac{1-l}{2}(g\lhd\nabla u)(t) \tag{20}$$

$$\left|-\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega|u_t|^\rho u_t\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\rho+2}\left(\|\nabla u_t\|_2^2+\frac{(1-l)^{\rho+1}C_s^{\rho+2}}{\rho+1}\left(\frac{8E(0)}{l}\right)^{\frac{\rho}{2}}(g\lhd\nabla u)(t)\right) \tag{21}$$

进而,联立式(17)~(21),有

$$|L(t)-ME(t)|=\varepsilon_1\varphi(t)+\varepsilon_2 I(t)+\chi(t)\leqslant C\left(\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2+(g\lhd\nabla u)(t)+\int_0^1\int_\Omega|\nabla z(x,k,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}k\right)\leqslant c_4 E(t)$$。

最后,由式(7)知,取 M 足够大时,存在正数 α_1 和 α_2,使得

$\alpha_1 E(t)\leqslant L(t)\leqslant\alpha_2 E(t)$

成立。证毕。

基于上述所有引理和定理的结果,下面给出本

文的核心结论。

定理 2 设 $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $f_0 \in L^2((0,1), H_0^1(\Omega))$,并且条件(H)、式(4)、式(8)及 $|\mu_2| \leqslant \mu_1$ 成立,则对于 $\forall t_0 > 0$,存在正常数 K、ω,使得式(22)成立

$$E(t) \leqslant K e^{-\omega \int_{t_0}^{t} \xi(s) ds}, \ \forall t > t_0 \tag{22}$$

证明 第一步,证明 $L'(t)$ 的估计。分步证明如下。

1) 估计 $\varphi'(t)$ 由式(13)及式(6)得

$$\varphi'(t) = -\|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx - \mu_1 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t dx - \mu_2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla z(x,1,t) dx + \frac{1}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 \tag{23}$$

现估计式(23)中第 2、3、4 项,不妨分别记为 I_1、I_2、I_3,则有

$$|I_1| = \left| \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)) ds dx \right| \leqslant \eta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) |\nabla u(s) - \nabla u(t)| ds \right)^2 dx + \int_0^t g(t-s) ds \|\nabla u\|_2^2 \leqslant \eta \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}(1-l)(g \lhd \nabla u)(t) + (1-l)\|\nabla u\|_2^2;$$

$$|I_2| \leqslant \eta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\mu_1^2}{4\eta} \|\nabla u_t\|_2^2;$$

$$|I_3| \leqslant \eta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\mu_2^2}{4\eta} \|\nabla z(x,1,t)\|_2^2。$$

取 $\eta = \frac{l}{4}$,则可得

$$\varphi'(t) \leqslant -\frac{l}{4} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1-l}{l}(g \lhd \nabla u)(t) + \left(\frac{\mu_1^2}{l} + 1 \right) \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{\mu_2^2}{4} \|\nabla z(x,1,t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \tag{24}$$

2) 估计 $I'(t)$ 由式(14)和文献[16],容易得式(25)成立

$$I'(t) \leqslant \|\nabla u_t\|_2^2 - e^{-\tau} \|\nabla z(x,1,t)\|_2^2 - \tau e^{-\tau} \int_0^1 \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx dk \tag{25}$$

3) 估计 $\chi'(t)$ 由方程(6)得

$$\chi'(t) = \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx - \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds \right) \cdot \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds \right) dx + \mu_1 \int_\Omega \nabla u_t(t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx + \mu_2 \int_\Omega \nabla z(x,1,t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx - \int_\Omega \nabla u_t \cdot \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx - \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{\rho+1} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \tag{26}$$

式(26)等号右边共有 7 项,下面对前 6 项分别进行估计如下:

第 1 项

$$\left| \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \right| \leqslant \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1-l}{4\delta}(g \lhd \nabla u)(t);$$

第 2 项

$$\left| \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds \right) \cdot \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds \right) dx \right| \leqslant 2\delta(1-l) \|\nabla u\|_2^2 + \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} \right)(1-l)(g \lhd \nabla u)(t), \delta > 0;$$

第 3 项

$$\left| \mu_1 \int_\Omega \nabla u_t(t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \right| \leqslant \delta_1 \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{\mu_1^2(1-l)}{4\delta_1}(g \lhd \nabla u)(t), \delta_1 > 0;$$

第 4 项

$$\left| \mu_2 \int_\Omega \nabla z(x,1,t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \right| \leqslant \delta_2 \|\nabla z(x,1,t)\|_2^2 + \frac{\mu_1^2(1-l)}{4\delta_2}(g \lhd \nabla u)(t), \delta_2 > 0;$$

第 5 项

$$\left| \int_\Omega \nabla u_t \cdot \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \right| \leqslant \delta_3 \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_3} \int_\Omega \left(\int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds \right)^2 dx \leqslant \delta_3 \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{g(0)}{4\delta_3}(g' \lhd \nabla u)(t), \delta_3 > 0;$$

第 6 项

$$\left| \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \right| \leqslant \frac{1}{\rho+1} \left(\delta_4 \|u_t\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} + \frac{1}{4\delta_4} \int_\Omega \left(\int_0^t g'(t-s) \right. \right.$$

$(\nabla u(t)-\nabla u(s))^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s\Big)\leqslant\frac{\delta_4 c_s^{2(\rho+1)}}{\rho+1}(2E(0))^{\rho}$

$\|\nabla u_t\|_2^2-\frac{g(0)c_s^2}{4\delta_4(\rho+1)}(g'\lhd\nabla u)(t)\ ,\delta_4>0$。

第二步，分别估计式(26)等号右边的每一项。将第 1 ~6 项的估计式代入 $\chi'(t)$ 得

$$\chi'(t)\leqslant\delta c_4\|\nabla u\|_2^2+c_5(g\lhd\nabla u)(t)-c_6(g'\lhd\nabla u)(t)+\left(c_7-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u_t\|_2^2+\delta_2\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2-\frac{1}{\rho+1}\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|u_t\|_2^2 \tag{27}$$

其中

$$c_4=1+2(1-l)^2,$$

$$c_5=\left(2\delta+\frac{1}{2\delta}+\frac{\mu_1^2}{4\delta_1}+\frac{\mu_2^2}{4\delta_2}\right)(1-l),$$

$$c_6=\frac{g(0)c_s^2}{4\delta_4(\rho+1)}+\frac{g(0)}{4\delta_3},$$

$$c_7=\delta_1+\delta_3+\frac{\delta_4 c_s^{2(\rho+1)}}{\rho+1}(2E(0))^{\rho}。$$

由 $g(0)>0$ 以及条件(H)得，$\forall t_0>0$，

$$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\geqslant\int_0^{t_0}g(s)\mathrm{d}s=g_0,\ \forall t\geqslant t_0。$$

根据引理 3，将式(24) ~(27)代入 $L'(t)$ 得

$$L'(t)=ME'(t)+\varepsilon_1\varphi'(t)+\varepsilon_2 I'(t)+\chi'(t)\leqslant\left(\frac{M}{2}-c_6\right)(g'\lhd\nabla u)(t)\ -\frac{g_0-\varepsilon_1}{\rho+1}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}-\left(\frac{l}{4}\varepsilon_1-\delta c_4\right)\|\nabla u\|_2^2-\left(g_0-c_7-\varepsilon_2-\left(\frac{\mu_1^2}{l}+1\right)\varepsilon_1\right)\|\nabla u\|-\left(\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\tau}-\varepsilon_1\frac{\mu_2^2}{4}-\delta_2\right)\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2-\tau\mathrm{e}^{-\tau}\int_0^1\int_\Omega|\nabla z(x,k,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\left(\frac{(1-l)\varepsilon_1}{l}+c_5\right)(g\lhd\nabla u)(t)。$$

现选取合适的 $\varepsilon_i(i=1,2)$ 和 $\delta_j(j=1,2,3,4)$，使得存在正常数 β_1 和 β_2 满足式(28)

$$L'(t)\leqslant-\beta_1 E(t)+\beta_2(g\lhd\nabla u)(t),\ \forall t\geqslant t_0 \tag{28}$$

取 $\delta_1=\delta_3=\delta_4$ 足够小，使得

$$c_7=\delta_1\left(2+\frac{c_s^{2(\rho+1)}}{\rho+1}(2E(0))^{\rho}\right)\leqslant\frac{g_0}{2};$$

然后取 $\varepsilon_2>0$ 足够小，使得 $\varepsilon_2\leqslant\frac{g_0}{8}$，则 $g_0-c_7-\varepsilon_2\geqslant\frac{3}{8}g_0$ 成立；ε 取定后，选取 $\delta_2\leqslant\frac{\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\tau}}{2}$。进一步选取 ε 足够小，使得

$$\varepsilon_1<\min\left\{g_0,\frac{\frac{g_0}{8}}{\frac{\mu_1^2}{l}+1},\frac{\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\tau}}{\mu_2^2}\right\};$$

当 ε 固定后，选取 $\delta>0$ 足够小，使得 $\delta<\frac{l\varepsilon_1}{8c_4}$；最后选取 M 足够大，使得 $M>4c_6$。最后由式(7)可得式(28)成立。

第三步，用 $\xi(t)$ 同乘以式(27)的两边，进而可得

$$\xi(t)L'(t)\leqslant-\beta_1\xi(t)E(t)+\beta_2\xi(t)(g\lhd\nabla u)(t)$$

由引理 3 及 $g'(t)\leqslant-\xi(t)g(t)$，易得 $-(g\lhd\nabla u)(t)\leqslant-2E'(t)$，进而可有

$$\xi(t)L'(t)\leqslant-\beta_1\xi(t)E(t)-\beta_2(g\lhd\nabla u)(t)\leqslant-\beta_1\xi(t)E(t)-2\beta_2E'(t),\ \forall t\geqslant t_0。$$

现定义 $H(t)=\xi(t)L(t)+2\beta_2E(t)$，易证 $H(t)$ 等价于 $E(t)$。由式(26)可知

$$H'(t)=\xi'(t)L(t)-\beta_1\xi(t)E(t)\leqslant-\beta_1\xi(t)E(t)\leqslant-\beta_3\xi(t)H(t),\ \forall t\geqslant t_0 \tag{29}$$

将式(29)在(t_0,t)上积分，得

$$H(t)\leqslant H(0)\mathrm{e}^{-\beta_3\int_{t_0}^t\xi(s)\mathrm{d}s},\ \forall t\geqslant t_0。$$

故由关系式 $H(t)$ 等价于 $E(t)$ 得

$$E(t)\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega\int_{t_0}^t\xi(s)\mathrm{d}s},\ \forall t\geqslant t_0。$$

其中 K 和 ω 为正常数。证毕。

3　举例说明

1) 当 $g(t)=a(1+t)^{-\nu}(\ a>0,\nu>1)$ 时，$\xi(t)=\frac{\nu}{1+t}$满足式(5)，则由式(22)可知

$$E(t)\leqslant K(1+t)^{-\omega};$$

2) 当 $g(t)=a\mathrm{e}^{-b(1+t)^{\nu}}$，且 a、$b>0$，$0<\nu\leqslant1$ 时，$\xi(t)=b\gamma(1+t)^{\nu-1}$满足式(5)，由式(22)可知

$$E(t)\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega(1+t)^{\nu}};$$

3) 当 $g(t)=a\mathrm{e}^{-b\ln^{\nu}(1+t)}$，且 a、$b>0,\nu>1$ 时，$\xi(t)=\frac{b\nu\ln^{\nu-1}(1+t)}{1+t}$满足式(5)，由式(22)可知

$$E(t)\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega\ln^{\nu}(1+t)};$$

4) 当 $g(t)=\frac{a}{(1+t)\ln^{\nu}(1+t)}$，且 $a>0,\nu>1$ 时，$\xi(t)=\frac{\nu+\ln(1+t)}{(1+t)\ln^{\nu}(1+t)}$满足式(5)，由式(22)可知

$$E(t)\leqslant K((1+t)\ln^{\nu}(1+t))^{-\omega}。$$

4 结束语

本文通过构造合适的 Lyapunov 泛函,研究了一类具有强阻尼和强时滞作用的粘弹性方程的初边值问题,得到了该系统能量的衰减估计。

参考文献:

[1] Abdallah C, Dorato P, Benitez-Read J, et al. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory system [J]. ACC San Francisco, 1993, 16(2): 3106-3107.

[2] Xu G Q, Yung S P, Li L K. Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control [J]. ESAIM Control Optim Calc Var, 2006, 12: 770-785.

[3] Datko R. Representation of solutions and stability of linear differential-difference equations in Banach space [J]. J Differ Equations, 1978, 29(1): 105-166.

[4] Zuazua Enrike I. Exponential decay for the semi-linear wave equation with locally distributed damping [J]. Commun Partial Differ Equations, 1990, 15(2): 205-235.

[5] Nicaise S, Pignotti C. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks [J]. SIAM J Control Optim, 2006, 45(5): 1561-1585.

[6] Cavalcanti M M, Cavalcanti V N D, Ferreira J. Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping [J]. Math Methods Appl Sci, 2001, 24(14): 1043-1053.

[7] Love A E H. Treatise on the mathematical theory of elasticity [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1892.

[8] Araújo R D O, Ma T F, Qin Y M. Long-time behavior of a quasilinear viscoelastic equation with past history [J]. J Differ Equations, 2013, 254(10): 4066-4087.

[9] Guesmia A, Messaoudi S A. A general decay result for a viscoelastic equation in the presence of past and finite history memories [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2012, 13(1): 476-485.

[10] Aassila M, Cavalcanti M M, Soriano J A. Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain [J]. SIAM J Control Optim, 2000, 38(5): 1581-1602.

[11] Kirane M, Said-Houari B. Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay [J]. Z Angew Math Phys, 2011, 62: 1065-1082.

[12] Dai Q Y, Yang Z F. Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay [J]. Z Angew Math Phys, 2014, 65(5): 885-903.

[13] Liu G W, Zhang H W. Well-posedness for a class of wave equation with past history and a delay [J]. Z Angew Math Phys, 2016, 67(1): 1-14.

[14] Feng B W. Well-posedness and exponential stability for a plate equation with time-varying delay and past history [J]. Z Angew Math Phys, 2017, 68(1): 6.

[15] Messaoudi S A, Fareh A, Doudi N. Well posedness and exponential stability in a wave equation with a strong damping and a strong delay [J]. J Math Phys, 2016, 57(11): 103-121.

[16] Wu S T. Asymptotic behavior for a viscoelastic wave equation with a delay term [J]. Taiwan J Math, 2013, 17(3): 765-784.

Uniform decay of the solution for a class of quasilinear viscoelastic wave equations with strong damping and strong delay

DIAO Lin[1] CHANG YanZhen[2*]

(1. College of Computer Science and Technology, Shangqiu University, Shangqiu, Henan 476000;
2. Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this paper, we investigate the initial boundary value problem of a quasilinear viscoelastic wave equation with strong damping and strong delay. Under a set of assumptions, we give the energy decay estimates using a special Lyapunov function.

Key words: quasilinear viscoelastic wave equation; decay estimate; strong damping and strong delay

(责任编辑:汪 琴)