

# 基于信号空间压缩感知算法的机械故障诊断

杜佳兵 唐 刚\* 王华庆

(北京化工大学 机电工程学院, 北京 100029)

**摘 要:** 为了解决压缩感知(CS)重构算法通过重构稀疏系数求解原始信号的重构精度不高的问题,提出一种基于信号空间的压缩采样匹配追踪算法。首先在冗余字典中求解原始信号的最优表示空间,然后在最优表示空间中利用迭代算法直接求解原始信号,最后以轴承故障振动信号为例进行实验验证。结果证明本文算法提高了信号的重构精度,可以为增强机械振动信号的故障检测能力提供依据。

**关键词:** 压缩感知(CS); 稀疏性; 信号空间; 故障检测

**中图分类号:** TP29 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2017.05.013

## 引 言

旋转机械作为工业生产设备的的重要组成部分,往往面临着复杂的工作环境,所以有必要对其运行情况进行在线监测和故障诊断。传统信号采样方法要求采样频率不低于信号中最高频率的两倍,使信号处理过程面临采样率高、储存数据量大及大数据分析处理压力大等问题。压缩感知理论利用信号的稀疏性,通过较低的采样率实现信号的重构。目前利用压缩感知理论实现信号采集与处理主要面临两个难题,一是压缩感知算法中的正交字典往往无法获得较稀疏的解,二是为了获得对信号更加稀疏的解,需要用到冗余字典,而字典的冗余性往往导致信号的重构精度难以得到保障<sup>[1-2]</sup>。

文献[3-5]将压缩感知算法用于信号重构并论证了压缩感知算法可以实现对稀疏信号的高精度重构,文献[6-12]将压缩感知算法应用于信号重构和信号检测,但是没有解决对于正交字典非稀疏性信号重构精度低的问题。

针对以上研究中存在的问题,本文以压缩采样匹配追踪算法(CoSaMP)为基础,通过对该算法进行改进,提出一种基于信号空间的压缩采样匹配追踪算法(SSCoSaMP),即首先在冗余字典中求解信号的

最优表示空间,然后在最优表示空间中直接计算出原始信号,提高了信号的重构精度,为增强机械振动信号的故障检测能力提供依据。

## 1 压缩感知(CS)理论

压缩感知理论指出,如果能够充分利用信号的稀疏性,有可能同时实现信号压缩和采集,这样不仅能够降低对传感器采集信号的要求,而且也能减小信号后处理的压力。

对于  $N$  维实际信号  $\mathbf{x}$ ,如果  $\mathbf{x}$  中只有少量非零系数,则称  $\mathbf{x}$  为稀疏信号。当  $\mathbf{x}$  本身不是稀疏信号时,可以将其表示为一组正交向量的线性组合

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k \quad (1)$$

如果  $\alpha_k$  中只有少数非零系数,则称信号  $\mathbf{x}$  在正交基上具有稀疏性。如果  $\mathbf{x}$  满足一定稀疏性,就可以通过  $m < n$  维观测信号高精度地重构原始信号  $\mathbf{x}$ 。观测信号  $\mathbf{y}$  可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  阶测量矩阵,  $\boldsymbol{\alpha}$  为稀疏系数,  $\mathbf{D}$  为正交字典。为了保证通过  $\mathbf{y}$  高精度地重构出原始信号,测量矩阵  $\mathbf{A}$  需要满足有限等于性质(RIP),即对于常数  $\delta_k \in (0, 1)$ ,需满足

$$\sqrt{1 - \delta_k} \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \sqrt{1 + \delta_k} \quad (3)$$

如果  $\mathbf{x}$  本身不是稀疏信号,但是在字典  $\mathbf{D}$  上具有稀疏性,则需要  $\mathbf{AD}$  满足 RIP 准则,即对于常数  $\delta_k \in (0, 1)$ ,需满足

$$\sqrt{1 - \delta_k} \leq \frac{\|\mathbf{AD}\boldsymbol{\alpha}\|_2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2} \leq \sqrt{1 + \delta_k} \quad (4)$$

收稿日期: 2017-01-22

基金项目: 国家自然科学基金(51405012)

第一作者: 男,1989年生,硕士生

\* 通讯联系人

E-mail: tanggang@mail.buct.edu.cn

$A$  可选择高斯随机矩阵,因为高斯随机矩阵不仅构造简单,而且能较高概率地满足 RIP 准则。

## 2 基于信号空间的重构算法

由于大多数实际信号  $x$  很难在正交字典上满足稀疏性要求,而在冗余字典上表现出较好的稀疏性,因此选择冗余字典有利于信号的高精度重构。然而信号重构过程往往是通过观测信号  $y$  首先重构稀疏系数  $\hat{\alpha}$ ,然后再通过  $\hat{\alpha}$  计算出重构信号  $\hat{x} = D\hat{\alpha}$ 。这种间接计算原始信号  $x$  的方法导致应用冗余字典重构信号时精度难以得到保障。原因如下:(1)应用冗余字典  $D$  时,信号  $x$  在  $D$  上的稀疏表示不是唯一的,这意味着  $x$  在  $D$  上同样存在许多其他的稀疏表示结果;(2)当测量矩阵  $A$  满足 RIP 准则时,很难保证  $A$  与  $D$  的乘积满足 RIP 准则,也就无法保证信号的重构精度;(3)重构信号  $\hat{x}$  是通过字典与稀疏系数的乘积  $D \times \hat{\alpha}$  得到的,采用冗余字典时, $\alpha$  的重构精度  $\|\alpha - \hat{\alpha}\|$  与  $x$  的重构精度  $\|x - \hat{x}\|$  并不一致,这表明即使可以保证  $\alpha$  的精度,也无法确保原始信号  $x$  的重构精度。

以上的所有问题都是由信号重构过程中重构稀疏系数引起的,本文提出的 SSCoSaMP 算法无需重构稀疏系数,而是直接重构原始信号。该算法采用冗余字典重构原始信号,矩阵  $A$  需要满足一个 D-RIP 准则,即对于常数  $\delta_k \in (0, 1)$ ,需满足

$$\sqrt{1 - \delta_k} \leq \frac{\|AD\alpha\|_2}{\|D\alpha\|_2} \leq \sqrt{1 + \delta_k} \quad (5)$$

式(5)与式(3)虽然形式相似,但是有本质的区别。式(3)中 RIP 准则要求  $x$  中包含少量的非零系数,而式(5)中 D-RIP 准则要求  $x$  在字典  $D$  中包含少量稀疏系数,条件更加容易满足。

满足 D-RIP 准则的情况下,需首先由式(6)计算出  $D$  中信号  $x$  的最优表示空间

$$\Lambda_{\text{opt}}(x, k) = \arg \min_{|\Lambda| = k} \|x - P_{\Lambda} x\| \quad (6)$$

其中,  $\Lambda \in \{1, 2, \dots, d\}$  表示索引集,  $R(D_{\Lambda})$  表示  $D_{\Lambda}$  中的列向量组成的列空间,  $P_{\Lambda} x$  表示信号  $x$  在空间  $R(D_{\Lambda})$  中正交投影,  $\Lambda_{\text{opt}}(x, k)$  为最优表示空间,即为可以最优表示信号  $x$  的  $k$  个向量所组成的空间。计算出  $\Lambda_{\text{opt}}(x, k)$  后,就可以在  $\Lambda_{\text{opt}}(x, k)$  中运用迭代算法直接重构信号  $x$ 。SSCoSaMP 运算具体过程如下:

输入:测量矩阵  $A \in R^{m \times n}$ , 冗余字典  $D \in R^{n \times d}$ , 观测向量  $y \in R^m$ , 稀疏度  $k$

输出:重构信号  $X^l \in R^n$

(1) 初始化各参数 令残差  $r_0 = y$  带求信号空间  $T = \emptyset$ , 迭代次数  $l = 1$ ;

(2) 求取  $v = A^* r_0$ ;

(3) 求取  $v$  的最优表示空间  $\Omega = \Lambda_{\text{opt}}(v, k)$ ;

(4) 合并索引集  $T = \Omega \cup T$ ;

(5) 利用迭代运算求取重构信号  $X^l$

$$x = \arg \min_z \|y - Az\| \text{ s. t. } z \in R(D_T)$$

$$T = \Lambda_{\text{opt}}(x, k)$$

$$X^l = P_T x$$

$$r_0 = y - AX^l$$

$$l = l + 1$$

(6) 判定残差  $r_0$  是否满足迭代停止条件,如果满足,输出重构信号  $X^l$ ;如果不满足,返回步骤(2)。

## 3 实例验证及结果分析

本文以滚动轴承内圈故障信号为实验对象进行故障检测效果验证。实验方案为:首先绘制原始轴承故障振动信号的包络频谱图,提取故障特征频率;然后分别以压缩采样率 25% 和 50% 对原始信号进行压缩采样,利用压缩感知重构算法重构出原始信号,绘制重构信号的包络频谱图;最后,通过对比重构信号的包络频谱图进而比较重构算法的性能。实验采用转速 1300 r/min 的轴承内圈故障信号,采样频率 2000 Hz,故障特征频率 145.84 Hz,故障尺寸 0.7 mm × 0.05 mm。

### 3.1 原始信号

得到原始信号点及其包络频谱图如图 1 所示。

由图 1 看出,包络频谱图得到了内圈故障特征频率的 1 倍频、2 倍频、3 倍频。

### 3.2 压缩采样率 25%

对原始信号进行压缩采样得到压缩信号  $y$ , 压缩率为 25%, 得到压缩采样信号如图 2(a) 所示。

压缩率 25% 下,首先应用 CoSaMP 算法重构原始信号,分别采用正交字典和冗余字典进行实验以比较二者的信号重构精度,再应用本文提出的 SSCoSaMP 算法重构原始信号。3 种方法得出的重构信号包络频谱图如图 2(b)、(c)、(d) 所示。

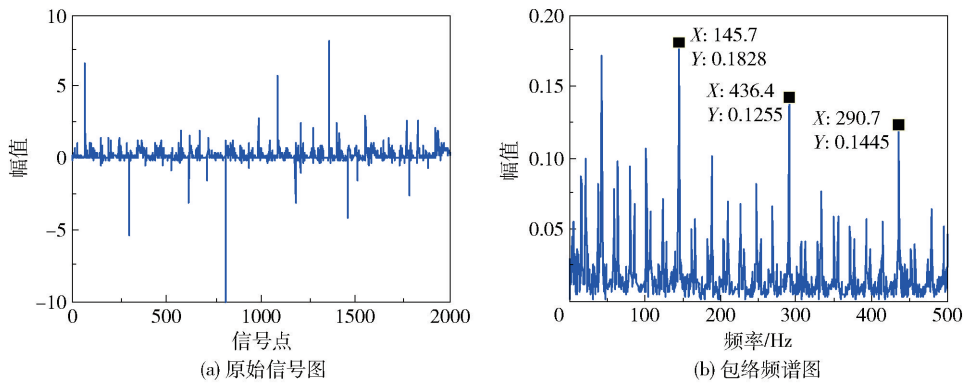


图 1 轴承内圈故障信号  
Fig.1 Bearing inner race fault signal

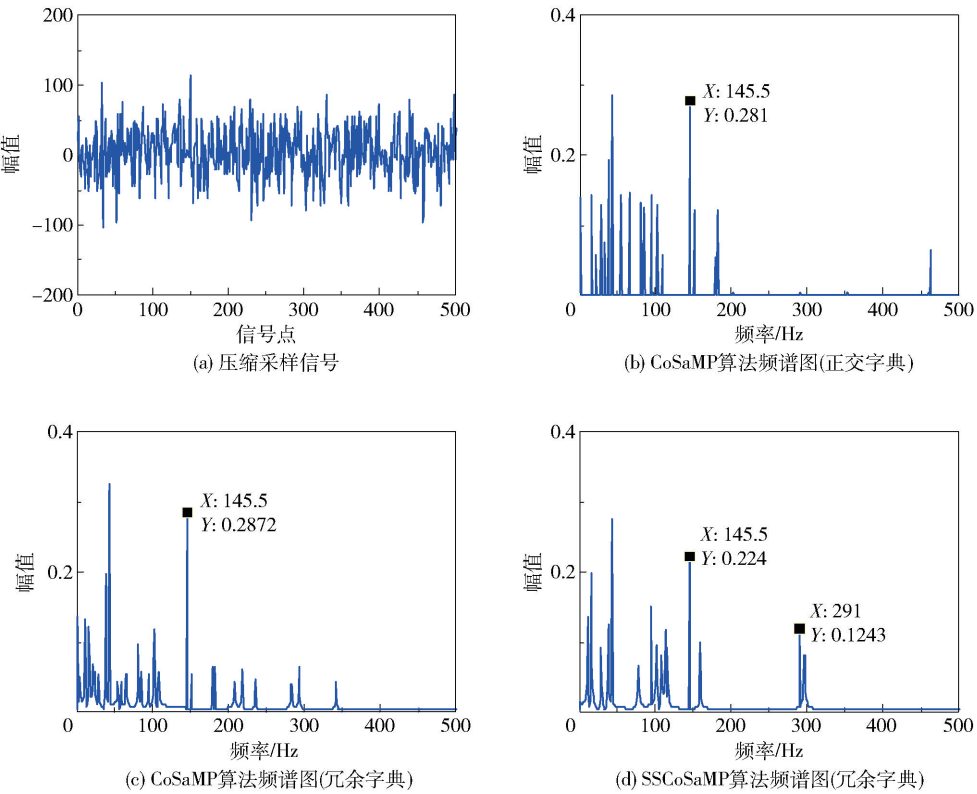


图 2 采样率 25% 下压缩采样信号及重构信号频谱图

Fig.2 Compressed sampling signal and envelope spectrum of the reconstructed signal ( sampling rate 25% )

由图 2 看出,采用正交字典和冗余字典的 CoSaMP 算法得到的重构信号只提取出了 1 倍故障特征频率,而采用本文算法得到的重构信号提取出了 1 倍、2 倍故障特征频率,证明本文方法提高了信号的重构精度。

3.3 压缩采样率 50%

对内圈故障信号的压缩率为 25% 时,重构信号的包络频谱图效果不理想,所以将采样率提高至 50% 再进行实验,方法与压缩率 25% 时相同。得到压缩采样信号及 3 种方法的重构信号包络频谱图如

图 3 所示。

由图 3 看出,采用正交字典的 CoSaMP 算法得到的重构信号提取出了 1 倍故障特征频率,采用冗余字典的 CoSaMP 算法得到的重构信号提取出了 1 倍、2 倍故障特征频率;而采用本文算法得到的重构信号提取出了 1 倍、2 倍、3 倍故障特征频率,同样证明本文方法的信号重构精度更高。

4 结论

本文提出的基于信号空间的压缩感知算法改变

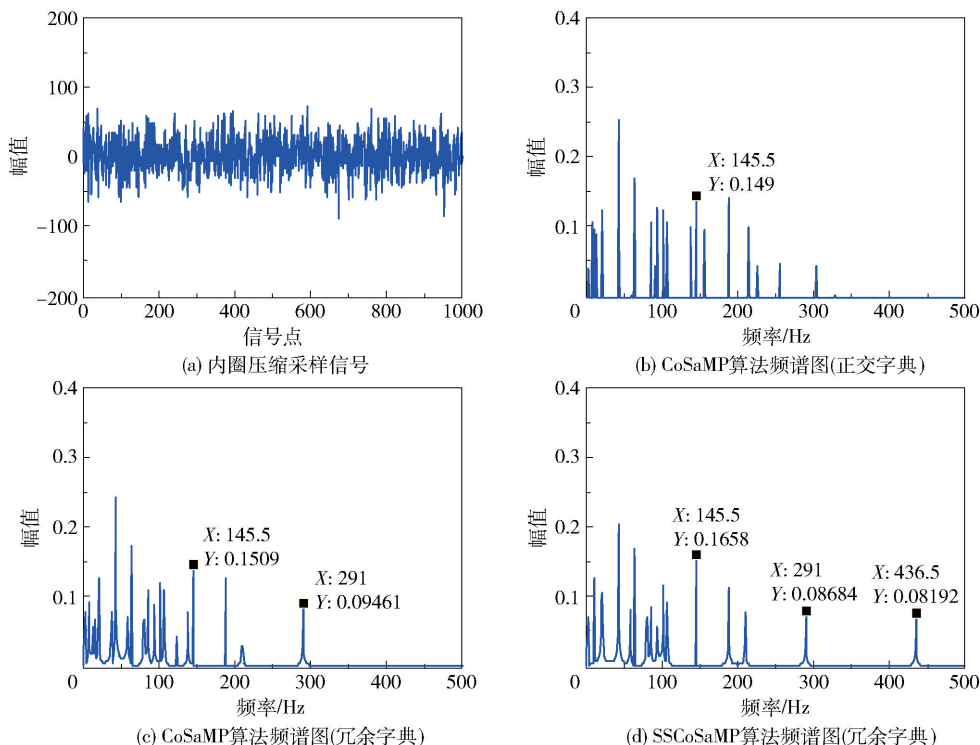


图3 采样率 50% 下压缩采样信号及重构信号频谱图

Fig.3 Compressed sampling signal and envelope spectrum of the reconstructed signal (sampling rate 50%)

了以往重构稀疏系数的思路,通过直接重构信号提高了信号的重构精度,能更准确地提取出轴承故障振动信号的故障特征频率。通过轴承内圈故障信号实验,证明了本文方法得到的包络频谱图更接近原始信号的包络频谱图,信号的重构精度更高。

## 参考文献:

- [1] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [2] Candes E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985.
- [3] Rauhut H. Compressive sensing and structured random matrices[J]. Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery, 2010, 28(5): 68-92.
- [4] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 301-321.
- [5] Davenport M A, Needell D, Wakin M B. Signal space CoSaMP for sparse recovery with redundant dictionaries[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(10): 6820-6829.
- [6] 刘冰,付平,孟升卫. 基于正交匹配追踪的压缩感知

信号检测算法[J]. 仪器仪表学报, 2010,31(9): 1959-1964.

Liu B, Fu P, Meng S W. Compressive sensing signal detection algorithm based on orthogonal matching pursuit[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010,31(9): 1959-1964. (in Chinese)

- [7] 刘亚新,赵瑞珍,胡绍海,等. 用于压缩感知信号重建的正则化自适应匹配追踪算法[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(11): 2713-2717.

Liu Y X, Zhao R Z, Hu S H, et al. Regularized adaptive matching pursuit algorithm for signal reconstruction based on compressive sensing[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2010, 32(11): 2713-2717. (in Chinese)

- [8] 刘冰,付平,孟升卫. 基于采样值数字特征的压缩感知信号检测方法[J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(3): 577-582.

Liu B, Fu P, Meng S W. Compressive sensing signal detection method based on numerical characteristics of sampling values[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2011, 32(3): 577-582. (in Chinese)

- [9] 苏维均,王红红,于重重,等. 基于小波树模型的 CoSaMP 压缩感知算法[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(12): 4530-4533.

Su W J, Wang H H, Yu C C, et al. CoSaMP algorithm

- of compressive sensing based on wavelet tree model[J]. Application Research of Computer, 2012, 29(12): 4530–4533. (in Chinese)
- [10] 白凌云, 梁志毅, 徐志军. 基于压缩感知信号重建的自适应正交多匹配追踪算法[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(11): 887–893.
- Bai L Y, Liang Z Y, Xu Z J. Adaptive orthogonal multi matching pursuit algorithm for signal reconstruction based on compressive sensing[J]. Application Research of Computer, 2011, 28(11): 887–893. (in Chinese)
- [11] 李志林, 陈后金, 李居朋, 等. 一种有效的压缩感知图像重建算法[J]. 电子学报, 2011, 39(12): 2796–2800.
- Li Z L, Chen H J, Li J P, et al. An efficient algorithm for compressive sensing image reconstruction[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2796–2800. (in Chinese)
- [12] 刘哲, 杨扬. 一种新的基于压缩感知理论的稀疏信号重构算法[J]. 光电子·激光, 2011, 22(2): 292–296.
- Liu Z, Yang Y. Novel sparse signal reconstruction algorithm based on compressive sensing theory[J]. Journal of Optoelectronics·Laser, 2011, 22(2): 292–296. (in Chinese)

## Mechanical fault diagnosis based on a signal space compressed sensing algorithm

DU JiaBing TANG Gang\* WANG HuaQing

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** Compressive sensing (CS) theory makes use of sparse characteristics that allow a signal with a low sampling rate to be reconstructed. However, because compressive sensing algorithms solve the original signal by reconstructing the sparse coefficients, the precision of the reconstructed signal is difficult to guarantee. In order to solve this problem, this paper presents a new signal space compressive sensing algorithm. The algorithm solves the optimal representation space of the primary signal and then reconstructs the original signal directly by means of an iterative algorithm. The optimal representation space is composed of vectors which are optimal linear representations of the original signal. It has been verified by experiment that the method improves the precision of the signal and enhances the fault detection capability.

**Key words:** compressive sensing (CS); sparse characteristics; signal space; fault diagnosis

(责任编辑: 汪 琴)