带有 Yager 熵约束的方差-混合熵投资组合优化模型

李静怡[1]　周荣喜[2]　王　迪[1]　张　强[1*]
(1. 北京化工大学 经济管理学院, 北京　100029; 2. 对外经济贸易大学 金融学院, 北京　100029)

摘　要: 通过引入可信性方法和 Yager 熵约束,建立以方差-混合熵(VHE)为风险度量的投资组合优化模型,通过上海证券交易所数据对均值-方差-混合熵模型(MVHEM)、均值-方差模型(MVM)和均值-混合熵(MHEM)模型进行实证比较分析。结果表明,本文所构建的模型可以较好地均衡方差和混合熵在风险控制方面的作用,Yager 熵约束的引入可以进一步增强模型的稳定性,在控制风险水平的条件下实现了相对更高的累计收益。

关键词: 混合熵; Yager 熵; 投资组合优化模型; 遗传算法
中图分类号: F224; F830.9　　**DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2017.04.017

引　言

投资组合优化问题一直都是金融管理和金融数学领域的研究热点之一。自从 Markowitz 提出均值-方差模型(MVM)以来,投资组合理论与实践均获得长足发展。然而,均值-方差模型中的诸多弊端使其在风险测度方面不够完善且效率较低。Philippatos 等[1-2]另辟蹊径率先将信息熵作为风险测度工具构建了投资组合优化模型,研究结果凸显出信息熵在度量投资组合风险方面的优势。近年来,增值熵、模糊熵、Yager 熵、混合熵等广义熵概念被发掘并应用于投资组合等金融学领域[3-11]。其中,Xu 等[5]为了解决随机不确定和模糊不确定情形下的投资组合选择问题,采用混合熵度量证券风险,从而建立了 λ 均值-混合熵模型(MHEM),本课题组[10-11]基于混合熵和模糊熵研究了投资组合优化问题,但没有约束限制。因此本文在文献[10-11]工作的基础上引入 Yager 熵约束方法[12-14],构建基于方差和混合熵为风险测度指标的投资组合优化模型,并使用上海证券交易所数据将其与传统单一指标测度模型进行实证对比研究,以期通过引入 Yager 熵更好地发挥方差和混合熵在风险控制方面的作用,为寻找高效投资组合模型提供一种新的思路。

收稿日期: 2016-05-31
基金项目: 国家自然科学基金(71631005/71371024); 教育部人文社会科学研究规划基金(16YJA630078)
第一作者: 女,1991 年生,硕士生
* 通讯联系人
E-mail: zhangqiang@mail.buct.edu.cn

1　混合熵

混合熵同时具有随机不确定和模糊不确定性,是研究随机模糊不确定情形下投资组合风险度量的有效工具,其定义如下[5,10-11]。

假设存在集合 U,其有 n 个可能的状态 $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$,每种状态发生的概率为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$,又假定这 n 个可能的状态对某种特征的归属度为 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$,则定义混合熵为 $H_h = -\sum_{i=1}^{n}\{p_i Cr_i \lg p_i Cr_i + p_i(1-Cr_i)\lg p_i(1-Cr_i)\}$,其中,$Cr\{\xi \in A\} = \frac{1}{2}\left(\sup_{x\in A}\mu(q) + 1 - \sup_{x\in A^c}\mu(q)\right)$。

Yager[12]提出一种用于优化投资组合资金分配比例的熵来评价概率分布的不确定性;Wu 等[13]给出了基于 Yager 熵的线性规划模型,进一步拓展了 Yager 熵的应用,模型形式如下:

$$\min \sum_{i=1}^{n}(e_i^+ + e_i^-)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} w_i - \dfrac{1}{n} - e_i^+ + e_i^- = 0, e_i^+ \geqslant 0, e_i^- \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, i = 1,2,\cdots,n, w_i \in [0,1] \end{cases}$$

其中,e_i^+ 和 e_i^- 分别为模型引入的正负偏差变量,模型目标函数为资金分配权重与 $1/n$ 的正负偏差变量之和。

2　基于 Yager 熵的方差混合熵投资组合模型

在类似文献[10-11]中的假设条件下,可建立

带有 Yager 熵约束的均值-方差-混合熵模型(MVHEM-Y)

$$\max E[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\min V[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\min \sum_{i=1}^{N} x_iH_{hi}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i=1\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_i-\frac{1}{n}-e_i^+ +e_i^- =0, e_i^+\geqslant 0, e_i^-\geqslant 0\\ \sum_{i=1}^{n}(e_i^+ +e_i^-)\leqslant\theta\end{cases}$$

其中,$E[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$表示投资组合的期望收益率,$V[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$表示投资组合的方差风险度量,$H_{hi}$为投资组合中第 i 只证券的混合熵,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 n 只证券的资金分配比例,r_i 为第 i 只证券的投资收益率,θ 为正负偏差变量总和上限,其大小表示资金分配离散率的约束程度。

为了便于比较,本文给出文献[10-11]中的一些投资组合优化模型,分别为均值-方差-混合熵模型(MVHEM)、均值-方差模型(MVM)和均值-混合熵模型(MHEM),均可利用 Matlab 中的遗传算法工具箱进行最优化求解。

MVHEM 如式(1)所示

$$\max E[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\min V[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\min \sum_{i=1}^{n} x_iH_{hi}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i=1\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{1}$$

MVM 形式如式(2)

$$\max E[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\min V[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i=1\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{2}$$

MHEM 如式(3)

$$\max E[r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n]$$
$$\min \sum_{i=1}^{n} x_iH_{hi}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i=1\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{3}$$

3 数据来源及处理

本文随机选取 10 只上交所股票,收集从 2013 年 1 月 21 日至 2013 年 12 月 31 日的有效日交易数据,并计算得到该期间的日收益率。日交易数据主要包括:开盘价 P_{1t},收盘价 P_{2t},当日最高股价 P_{3t} 以及当日最低股价 P_{4t},t 表示时间,天。将每只股票的日收益率设定为一个三角模糊数 $r'=(r'_{lt},r'_{et},r'_{ht})$,其中 $r'_{lt}=\frac{P_{4t}-P_{1t}}{P_{1t}}$ 表示当日收益率下限,$r'_{et}=\frac{P_{2t}-P_{1t}}{P_{1t}}$表示当日平均收益率,$r'_{ht}=\frac{P_{3t}-P_{1t}}{P_{1t}}$表示当日收益率上限。

随后,以此 3 类收益率的极大、极小值为区间上、下限,将 3 个大区间各自均分为 10 个小区间,并分别设定每个小区间的中点 d_{lm}、d_{em}和 d_{hm}($m=1,2\cdots,10$)作为初始聚类点进行 K 均值聚类。在此基础上,建立一步转移矩阵 $\boldsymbol{P}$,通过求解 $x=\boldsymbol{P}x$ 得到马尔科夫链的稳定解 x,由此得到证券的模糊收益率 $r_e=\sum_{m=1}^{10}x_{em}d_{em}$。同理,可得到 r_l 和 r_h 的表达式,进而求得证券 i 的模糊收益率(r_{li},r_{ei},r_{hi})。最后,收集每个有效聚类点的 Cr_i 值和该聚类点内所聚合点数占所有有效数据的比例 p_i,并作为计算证券 i 混合熵 H_{hi}的基础。统计数据如表 1 所示。

表 1 上交所 10 只证券的期望收益率、方差和混合熵

Table 1 Expected yields, variance and hybrid entropy of ten securities in SSE

股票序号	股票代码	期望收益率	方差	混合熵
1	600150	0.00147	2.65×10^{-8}	0.7857
2	600998	0.00085	1.46×10^{-8}	1.0244
3	600195	-0.00038	3.05×10^{-8}	0.9303
4	601058	0.00197	2.95×10^{-8}	1.0060
5	600690	0.00177	3.85×10^{-8}	0.9133
6	600048	-0.00076	4.24×10^{-8}	0.9411
7	600226	0.00150	3.52×10^{-8}	0.9902
8	601866	0.00177	2.38×10^{-8}	0.8737
9	600684	0.00288	5.36×10^{-8}	0.9543
10	601398	0.00059	2.2×10^{-9}	0.8655

表 1 表明,如果分别以方差和混合熵作为风险度量标准,得出的风险排序是存在差异的。原因在于方差测度的是微观层面收益率偏离平均值的幅度,而熵测度的是宏观层面整体收益率分布偏离均值分布的程度。此外,方差风险测度是完全基于随机不确定性的,而混合熵测度是基于随机不确定性和模糊不确定性的一种综合不确定性风险度量指标。

4　基础模型及实证检验

为了方便使用 Matlab 中的多目标遗传算法工具箱求解,对原目标函数进行等价变换。令

$$X = \left\{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n\right\};$$

$$E^+ = \max_{x \in X} E(x), E^- = \min_{x \in X} E(x);$$

$$V^+ = \max_{x \in X} V(x), V^- = \min_{x \in X} V(x);$$

$$H^+ = \max_{x \in X} H(x), H^- = \min_{x \in X} H(x)。$$

进而构造新的多目标函数

$$\max \frac{M(x) - M^-}{M^+ - M^-}$$

$$\max \frac{V(x) - V^+}{V^- - V^+}$$

$$\max \frac{H(x) - H^+}{H^- - H^+}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{4}$$

通过求解得到多个帕累托最优解,将其按照收益导向型(MVHEM-Y)和风险导向型(MVHEM-R)进行分类,并在每种类型中分别选取最优投资组合作为代表进行比较。其中风险导向型的特征是以低风险指标为关注焦点,而收益导向型则以高收益率为主要求解方向。同时,为了更好地验证 MVM 的实证效果,加入简单平均策略(1/N strategy)进行对比,表 2 给出了不同模型的最优投资组合资金分配情况。

从表 2 中不难看出,对于模型 MVHEM-Y 和 MVHEM-R,后者的资金分配比例相对更为分散,前者偏重于关注高收益,从而使资金分配过于集中;而 MVM 求解得到的最优组合更倾向于平均分配资金比例,这与部分学者“角点解”的研究结论相悖,原因可能在于样本中不存在一只或多只在收益或风险方面表现显著优越的股票;MHEM 求解得出的最优投资组合同样出现了资金配比过度集中的现象,如对股票 600150 的资金分配达到了 61.09%。单纯从资金分配角度来看,MVHEM-R 与 MVM 最优投资组合比较相似,原因是 MVHEM-R 在涉及微观层面风险测度时方差起到了较强作用。

表 2　不同模型的最优投资组合资金分配比例

Table 2　The funds allocation of optimal portfolio based on different models

股票序号	资金比例				
	MVHEM-Y	MVHEM-R	MHEM	MVM	1/N 策略
1	0.3029	0.0005	0.6109	0.0005	0.1
2	0.0096	0.0874	0.0479	0.1108	0.1
3	0.0051	0.0799	0.0507	0.1121	0.1
4	0.0034	0.0637	0.0501	0.1073	0.1
5	0.0784	0.09	0.084	0.1142	0.1
6	0.5867	0.2973	0.0402	0.1518	0.1
7	0.0068	0.1036	0.0518	0.1142	0.1
8	0.0001	0.0996	0.0002	0.0704	0.1
9	0.0035	0.0984	0.0137	0.1111	0.1
10	0.0035	0.0796	0.0505	0.1076	0.1

以表 2 中不同模型的最优投资组合为基础,再利用 2014 年 1 月 9 日至 2015 年 1 月 19 日的有效交易数据进行实证检验,检验结果如图 1 所示。

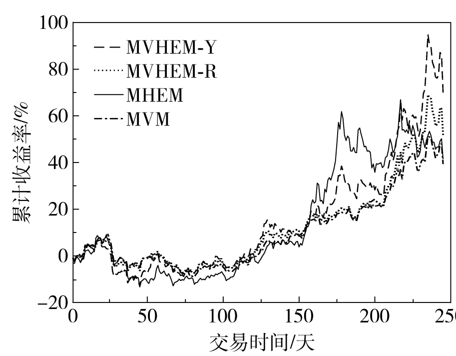

图 1　不同模型最优投资组合累计收益率

Fig. 1　Accumulative yield performance of the optimal portfolio based on different models

从图 1 可以看到,表现最佳的两个投资组合是 MVHEM-Y 和 MVHEM-R 模型,前者的累计收益率更高,这符合收益导向的设定,但是波动也更大。整个实证期间基本可以分为前 100 天、100 ~ 220 天以及最后 30 天 3 个阶段。前 100 天中,MVM 以及 MVHEM-R 表现更好一些,MVHEM-Y 和 MHEM 表现相对弱势;在 100 ~ 220 天内,情况完全反转,MVM 以及 MVHEM-R 的走势比较接近,而 MVHEM-

Y 和 MHEM 走势比较类似,尤其是第 180 天左右的急速拉升,使二者之间除了拉升幅度不同之外,走势基本吻合。值得注意的是,前期以方差为风险指标的 MVM 表现优秀,后期以混合熵为险度量的 MHEM 表现出色,MVHEM-Y 和 MVHEM-R 的走势大部分时间段内是夹在中间的,原因可能方差和混合熵同时作为风险指标起到了一定的平衡作用。

以 MVM 模型与 1/N 策略的最优投资组合为基础,利用 2014 年 1 月 9 日至 2015 年 1 月 19 日的有效交易数据进行实证检验,检验结果如图 2 所示。

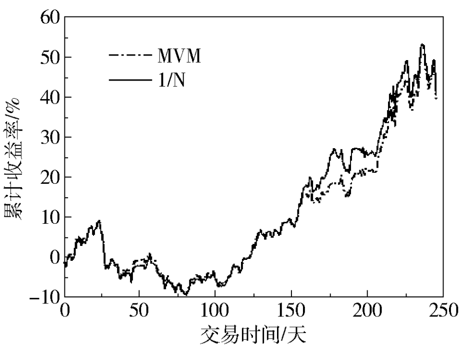

图 2　MVM 模型与 1/N 策略最优投资组合累计收益率

Fig. 2　Accumulative yield performance of the optimal portfolio based on MVM and 1/N strategy

从图 2 可以看到,MVM 在前 100 天的累计收益率表现与平均分配策略几乎一致,但是之后的表现并不理想。值得注意的是,从长远的角度来看(以实证研究为观察区间),MVM 最优投资组合的投资收益率甚至要低于简单的平均分配策略。

5　Yager 熵约束下模型及实证检验

尽管第 4 章中以方差-混合熵(VHE)为风险度量的模型 MVHEM-Y 和 MVHEM-R 实证表现优于其他传统模型,但从图 3 来看,其资金分配出现了过于集中的现象,这有悖于分散投资风险的理念。为此,本文通过加入 Yager 熵约束对 MVHEM-Y 和 MVHEM-R 资金比例进行控制,求解得到加入 Yager 熵约束后的 MVHEM-Y-Y 与 MVHEM-R-Y 的资金比例分配情况,如图 4 所示。

从图 4 可以看到,加入 Yager 熵约束后的均值-方差-混合熵模型(MVHEM-Y-Y)最优投资组合的资金分配比例有了显著的改善,特别是 MVHEM-Y-Y,其权重集中的现象改善尤其明显,使得模型更加符合分散投资风险的理念。

同样利用 2014 年 1 月 9 日至 2015 年 1 月 19 日的有效交易数据进行检验,结果如图 5 所示。从图 5 可以看出,MVHEM-Y-Y 整体走势更加平稳,且在市场回调时仍能保持不错的抗风险能力,特别是在 100 ~ 200 天区间内,MVHEM-Y 累计收益率曲线刚好围绕 MVHEM-Y-Y 进行波动;在后期,MVHEM-Y-Y 走势基本与 MVHEM-Y 一致,只是波动幅度有所减小。

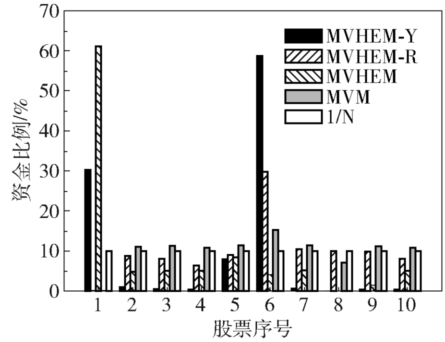

图 3　不同模型最优投资组资金分配比例

Fig. 3　Funds allocation of optimal portfolio based on different models

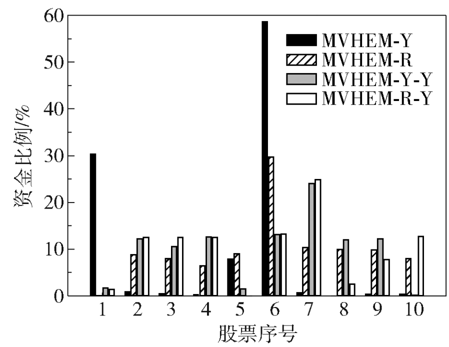

图 4　加入 Yager 熵约束后不同模型最优投资组合下的证券资金分配比例

Fig. 4　Funds allocation of optimal portfolio based on different models with Yager's entropy

图 6 为加入 Yager 熵前后风险导向型均值-方差-混合熵模型(MVHEM-R-Y)的累计收益率实证表现。值得关注的是,尽管资金分配比例有了巨大的变化,但二者的走势在前 150 天的实证区间内几乎是重合的,中后期 MVHEM-R-Y 较 MVHEM-R 走势也更加平稳;但是鉴于 MVHEM-R 最优投资组合本身的资金分配并没有过于集中,模型结果更加偏重于风险控制,因此,加入 Yager 熵后的效果没有收益导向模型显著,在最后的拉升中二者之间的走势基本相似,且 MVHEM-R-Y 在控制波动风险方面表现更佳。

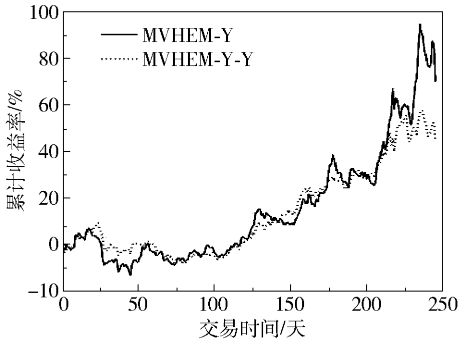

图 5　加入资金比例约束的收益导向混合熵模型累计收益率

Fig. 5　Accumulative yield performance of the optimal portfolio based on MVHEM-Y and MVHEM-Y-Y

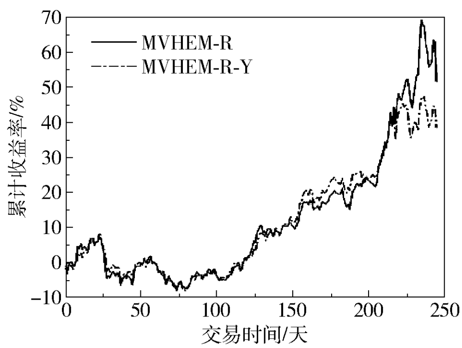

图 6　加入资金比例约束的风险导向混合熵模型累计收益率

Fig. 6　Accumulative yield performance of the optimal portfolio based on MVHEM-R and MVHEM-R-Y

6　结束语

本文以方差和混合熵作为风险测度指标,引入可信性方法和 Yager 熵约束,同时对随机不确定性和模糊不确定性进行综合考量,并与其他模型进行实证比较。结果表明,相较其他传统模型,以方差-混合熵为风险度量的投资组合优化模型可以较好地均衡方差和混合熵在风险控制方面的作用,进一步增强模型的稳定性,在控制风险的情况下实现良好的累计收益率。对于当前金融环境复杂、多空力量交错、投机氛围浓厚环境下的证券投资行为,本文模型具有一定的指导作用和实用价值。

参考文献:

[1]　Philippatos G C, Wilson C J. Entropy, market risk and the selection of efficient portfolios:comment[J]. Applied Economics, 1972, 4(3): 209-220.

[2]　Philippatos G C, Gressis N. Conditions of equivalence among E-V, SSD, and E-H portfolio selection criteria: the case for uniform, Normal and lognormal distributions[J]. Management Science, 1975, 21(6): 617-625.

[3]　Ou J S. Theory of portfolio and risk based on incremental entropy[J]. Journal of Risk Finance, 2005, 6(1): 31-39.

[4]　Huang X X. Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2008, 16(4): 1096-1101.

[5]　Xu J P, Zhou X Y, Wu D D. Portfolio selection using λ mean and hybrid entropy[J]. Annals of Operations Research, 2011, 185(1): 213-229.

[6]　Zhang W G, Liu Y J, Xu W J. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 222(2): 341-349.

[7]　Zhou R X, Cai R, Tong G Q. Applications of entropy in finance: a review[J]. Entropy, 2013, 15(11): 4909-4931.

[8]　Backus D, Chernov M, Zin S. Sources of entropy in representative agent models [J]. Journal of Finance, 2014, 69(1): 51-99.

[9]　Zhou R X, Yang Z B, Yu M, et al. A portfolio optimization model based on information entropy and fuzzy time series[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2015, 14(4): 381-397 .

[10]　Zhou R X, Zhan Y, Cai R, et al. A mean-variance hybrid-entropy model for portfolio selection with fuzzy returns[J]. Entropy, 2015, 17(5): 3319-3331.

[11]　周荣喜,王迪,展宇,等. 基于模糊熵和 Yager 熵的投资组合优化模型[J]. 北京化工大学学报:自然科学版, 2015, 42(5): 124-128.
Zhou R X, Wang D, Zhan Y, et. al. Portfolio optimization model based on fuzzy entropy and Yager's entropy [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology:Natural Science,2015, 42(5): 124-128. (in Chinese)

[12]　Yager R R. Measures of entropy and fuzziness related to aggregation operators[J]. Information Sciences, 1995, 82(3/4): 147-166.

[13]　Wu J, Sun B L, Liang C Y, et al. A linear programming model for determining ordered weighted averaging operator weights with maximum Yager's entropy[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 57(3): 742-747.

[14] 董雪璠,王秀国,周荣喜,等. 基于最小信息熵–最大增值熵的投资组合优化模型[J]. 北京化工大学学报:自然科学版, 2011, 38(6): 120–124.
Dong X F, Wang X G, Zhou R X, et. al. Portfolio optimization model based on the minimum comentropy and the maximum value-added entropy[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology: Natural Science, 2011, 38(6): 120–124. (in Chinese)

A variance-hybrid entropy portfolio model study based on Yager's entropy

LI JingYi[1] ZHOU RongXi[2] WANG Di[1] ZHANG Qiang[1*]

(1. School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029;
2. School of Finance and Banking, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China)

Abstract: By introducing the concept of credibility measure and Yager's entropy constraint, this paper proposes a novel portfolio model with risk measured by variance-hybrid entropy (VHE). Empirical comparisons are made with the mean-variance-hybrid entropy model (MVHEM), the mean-variance model (MVM) and the mean-hybrid entropy model (MHEM) based on data from Shanghai stock exchange from 2013 to 2015. The results show that the model can effectively balance the effect of variance and hybrid entropy and that Yager's entropy constraint can enhance the stability of the model and succeed in maximizing the accumulative yield under controlled risk.

Key words: hybrid entropy; Yager's entropy; portfolio optimization model; genetic algorithm

(责任编辑:汪 琴)