非牛顿黏性非凸守恒律方程冲击波解的稳定性

颜世栋 陈 肖 陈亚洲*
(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要: 讨论了带有 Carreau 型黏性的非牛顿流体非凸守恒律方程 Cauchy 问题冲击波解的渐近稳定性。在小扰动情况下,运用单调算子理论以及加权能量估计方法,证明了该类黏性非凸守恒律方程的黏性冲击波解是渐近稳定的,这一结果对冲击波的强度没有限制条件。

关键词: 守恒律方程; 冲击波解; 加权能量估计; 非牛顿黏性; 非凸
中图分类号: O29 **DOI**: 10.13543/j.bhxbzr.2017.03.020

引 言

守恒律方程是偏微分方程和流体动力学的重要研究领域之一,其一维问题解的稳定性和大时间行为对方程理论的完善和工程实践的应用有着重大的意义,受到众多学者的关注。自从 Ilyin 等[1]提出守恒律方程以来,不断有学者进行相关研究[2-7]。其中 Shi 等[6]分析了当黏性为速度梯度的非线性函数时小强度、小扰动可压缩 Navier-Stokes 方程组稀疏波解的稳定性;Matsumura 等[7]证明了守恒律方程为非凸情形下,相应牛顿黏性守恒律方程 Cauchy 问题稀疏波和接触间断解的渐近稳定性,其理论结果可以适用于更广泛的范围。但文献[6-7]中只考虑了单一非牛顿流体或单一非凸方程的情形。

分析这一类问题的主要困难在于:首先,黏性是与速度梯度相关的非线性函数,这给所构造的近似解的收敛性带来了困难;其次,方程的非凸性使得运用通常的能量估计方法得不到解的基本能量不等式。但以上文献都没有解决这两个问题。因此本文在文献[6-7]的基础上,进一步讨论具有 Carreau 型非牛顿黏性的非凸守恒律方程的冲击波解的渐近稳定性,运用非线性单调算子理论并结合加权能量估计解决了上述困难。

1 冲击波解的构造及主要定理

考虑在欧拉坐标系下的一维 Carreau 型黏性非牛顿流体非线性守恒律方程的柯西问题:

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x(f(u))=\partial_x(\mu(u_x)u_x) & (t,x)\in\Omega\\ u(0,x)=u_0(x) & x\in R\end{cases}\tag{1}$$

其中,$\Omega=\{(t,x)\mid t>0,x\in R\}$;$u=u(t,x)$ 是 Ω 上的未知函数; Carreau 型黏性 $\mu=\mu(u_x)$ 关于速度梯度 u_x 是单调的,形如 $\mu(u_x)=\mu_\infty+(\mu_0-\mu_\infty)(1+u_x^2)^{\frac{\gamma}{2}}$,其中 $\mu_0>\mu_\infty\geqslant0$, $-1<\gamma\leqslant0$ 是给定的常数。

$f=f(u)$ 是关于 u 的完全非线性函数(f 为非凸函数),如图 1 所示。

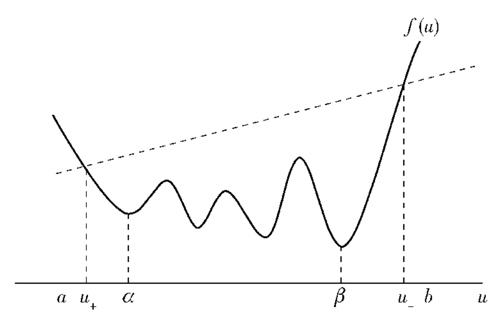

图 1 f 的函数图像

Fig. 1 Plot of the function f

对于 $(\alpha,\beta)\subset[u_+,u_-]\subset(a,b)$ 有

$$\begin{cases}f''(u)>0, & u\in(a,\alpha]\cup[\beta,b)\\ f(u)<f(u_+)+\dfrac{f(u_-)-f(u_+)}{u_--u_+}(u-u_+), & \\ u\in(\alpha,\beta) & \end{cases}\tag{2}$$

下面考虑式(1)的黏性冲击波解。假设速度 u 在正负无穷远的状态分别为 u_+, u_-,且满足 $u_->u_+$,由此可以得到冲击波解的波速为 s;由 Rankine-Hugoniot(R-H)条件决定,即满足 $s(u_+-u_-)=f(u_+)-f(u_-)$,引入新变量 $\xi=x-st$,可以推出式(1)的冲击波解 $U(\xi)$ 满足式(3)

收稿日期: 2016-10-26
基金项目: 国家自然科学基金(10971215)
第一作者: 男,1991 年生,硕士生
*通讯联系人
E-mail: chenyz@mail.buct.edu.cn

$$\begin{cases} -sU_\xi + \partial_\xi f(U) = \partial_\xi(\mu(U_\xi)U_\xi), \quad \xi \in R \\ \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} U(\xi) = u_\pm \end{cases} \tag{3}$$

式(3)中的第一式两边同时对 ξ 积分可得

$$\mu(U_\xi)U_\xi = -s(U-u_+) + f(U) - f(u_+) \tag{4}$$

由黏性 $\mu(u_x)$ 的单调有界性 $\mu_\infty \leqslant |\mu| \leqslant \mu_0$ 易得到 $U(\xi)$ 的存在性。

假设式(1)的初值 u_0 满足相容性条件

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} u_0(x) \to u_\pm, \qquad x \to \pm\infty \\ \int_{-\infty}^{0} (u_0(x) - u_-)\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} (u_0(x) - u_+)\mathrm{d}x < \infty \end{cases} \tag{5}$$

并且初值 u_0 满足

$$\begin{cases} u_0 - U \in H^2 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(y) - U(y + x_0))\mathrm{d}y = 0 \end{cases} \tag{6}$$

其中 $x_0 = \dfrac{1}{u_+ - u_-}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 - U)(y)\mathrm{d}y$。

定理 1 假设初值 u_0 满足式(5)、(6),则存在一个正常数 ε_0,使得当 $\| u_0 - U \|_{H^2} \leqslant \varepsilon_0$ 时,柯西问题(1)存在唯一的全局解 $u(t,x)$,满足 $u - U \in C^0(0,+\infty;H^2) \cap L^2(0,+\infty;H^3)$ 并且有 $\sup\limits_{x\in R}|u(t,x) - U(x-st)| \xrightarrow{t\to+\infty} 0$。

2 问题的重构

通过变量替换 $(t,x) \to (t,\xi)$,$\xi = x - st$,可以将式(1)转化为如式(7)的形式

$$\begin{cases} \partial_t u - s\,\partial_\xi u + \partial_\xi(f(u)) = \partial_\xi(\mu(u_\xi)u_\xi) \\ u(0,\xi) = u_0(\xi) \in H^2 \end{cases} \tag{7}$$

为了处理非凸函数 $f(u)$,引入函数

$$h(u) = f(u) - f(u_+) - \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(u - u_+)$$

函数 $h(u)$ 图像如图 2 所示。

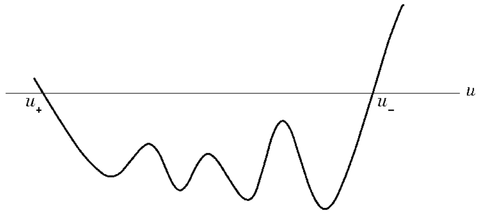

图 2 $h(u)$ 的函数图像

Fig. 2 Plot of the function $h(u)$

同时构造新的未知函数

$$\psi(t,\xi) = \int_{-\infty}^{x} (u(t,\xi) - U(\xi + x_0))\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

将式(8)与式(3)相减并积分可得

$$\psi_t - s\psi_\xi + f(U + \psi_\xi) - f(U) = [\mu'(U_\xi)U_\xi + \mu(U_\xi)]\psi_{\xi\xi} + O(\psi_{\xi\xi}^2)$$

结合 $\mu(u_x)$ 的表达式、式(4)以及函数 $h(u)$ 的表达式,可将式(1)重构为

$$\begin{cases} \psi_t + h'(U)\psi_\xi - G(U_\xi)\psi_{\xi\xi} = F(\psi_\xi^2, \psi_{\xi\xi}^2) \\ \psi(0,\xi) = \psi_0(\xi) \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$F(\psi_\xi^2,\psi_{\xi\xi}^2) = -(f(U+\psi_\xi) - f(U) - f'(U)\psi_\xi) + O(\psi_{\xi\xi}^2) = O(\psi_\xi^2) + O(\psi_{\xi\xi}^2)$$

$$G(U_\xi) = \mu'_{U_\xi}(U_\xi)U_\xi + \mu(U_\xi)$$

为了克服方程的完全非线性(非凸性)给能量估计带来的困难,构造加权函数

$$w(U) = \frac{(U-u_+)(U-u_-)}{h(U)} \tag{10}$$

经过计算可知加权函数满足条件

$(wh)''(U) = 2 > 0$,$C^{-1} < w(U) < C$

定义加权函数空间

$$L_w^2 = \left\{ \psi \in L^2 \,\middle|\, |\psi|_{L^2,w} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w\psi^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

定义式(9)的解函数空间

$$X(I) = \begin{Bmatrix} \psi \in C^0(I;H^3 \cap L_w^2) \cap L^2(I;H^4 \cap L_w^2) \\ \sup\limits_{t\in I} \| \psi \|_{H^3} \leqslant \varepsilon_0 \end{Bmatrix}$$

其中 $I = (t_0, t_1)$,$0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant +\infty$。

定理 2(全局存在性定理) 假设初值 $\psi_0(\xi) \in H^3$,则存在正常数 ε_0,C_0,使得 $\| \psi_0 \|_{H^3} \leqslant \varepsilon_0$ 时,式(9)存在唯一的全局解 $\psi \in X(0,+\infty)$,且满足

$$\| \psi(t) \|_{H^3}^2 + |\psi(t)|_{L^2,w}^2 + \int_0^{+\infty} (\| \psi_\xi(\tau) \|_{H^3}^2 + |\psi(\tau)|_{L^2,w}^2)\mathrm{d}\tau \leqslant C_0(\| \psi_0 \|_{H^3}^2 + |\psi_0|_{L^2,w}^2) \tag{11}$$

由式(11)和解的惟一性,定理 1 可由定理 2 直接推出。而根据单调算子理论和不动点定理[8],容易推出式(11)局部解的存在性。因此为了证明定理 2,只需证明先验估计即可。

命题 1(先验估计) 假设 $\psi \in X(0,T)$ 为式(9)的解,则存在与 T 无关的正常数 ε_1 和 C_1,使得当 $\sup\limits_{t\in[0,T]} \| \psi \|_{H^3} \leqslant \varepsilon_1$ 时,对任意的 $t \in [0,T]$,有

$$\| \psi(t) \|_{H^3}^2 + |\psi(t)|_{L^2,w}^2 + \int_0^{t} (\| \psi_\xi(\tau) \|_{H^3}^2 + |\psi|_{L^2,w}^2)\mathrm{d}\tau \leqslant C(\| \psi_0 \|_{H^3}^2 + |\psi_0|_{L^2,w}^2) \tag{12}$$

3 主要定理的证明

首先考虑冲击波解 $U(\xi)$ 的性质。由式(7)与函数 $h(u)$ 的构造可得

$\mu(U_\xi)U_\xi = h(U) \simeq -c(U-u_+) + o(|U-u_+|)$

其中，$c=s-f'(u_+)$ 是大于零的常数。

因此可知$\dfrac{\mathrm{d}U}{U-u_+} \sim \dfrac{-c}{\mu(U_\xi)}\mathrm{d}\xi$ 。

由 $\mu(U_\xi)$ 的有界性直接可以推出引理 1。

引理 1 假设 $u_- > u_+$，当 $U \to u_+$ 时，$h(U) = O(|U-u_+|)$，则式(1)的冲击波解 $U(\xi)$ 满足：$|U(\xi)-u_+| = O(\mathrm{e}^{-c|\xi|})$，$U_\xi = O(\mathrm{e}^{-c|\xi|})$，$U_{\xi\xi} = O(\mathrm{e}^{-c|\xi|})$ 。

由引理 1 并经过简单计算，可以得到以下估计：

$|U| \leqslant C;\mu_\infty \leqslant |G| \leqslant C;\dfrac{m}{2} \leqslant |U_\xi| \leqslant m;|U_{\xi\xi}| \leqslant m$

$|\mu'(U_\xi)| \leqslant m;|\mu''(U_\xi)| \leqslant C;|G'| \leqslant m$

其中，$0<m\ll 1$ 是一个正常数。

引理 2 若 $\psi \in X(0,T)$ 为式(9)的解，则存在一个正常数 C，使得对任意的 $t\in[0,T]$，有

$$|\psi(t)|_{L^2,w}^2 + \int_0^t (\|\psi_\xi(\tau)\|_{L^2}^2 + |\psi(\tau)|_{L^2,w}^2)\mathrm{d}\tau \leqslant C\int_0^t \|\psi_{\xi\xi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau + |\psi_0|_{L^2,w}^2 \tag{13}$$

证明 将式(9)中的第一式乘以 $2w\psi$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w\psi^2) + (-(wh)_U''U_\xi\psi^2) + 2wG\psi_\xi^2 - w_U'h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\psi^2 + 2w_U'GU_\xi\psi\psi_\xi + 2w\psi G_{U_\xi}'U_{\xi\xi}\psi_\xi = 2w\psi F(\psi_\xi^2,\psi_{\xi\xi}^2)$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(w\psi^2)\mathrm{d}\xi + \int(-2U_\xi)\psi^2\mathrm{d}\xi + \int 2wG\psi_\xi^2\mathrm{d}\xi = -\int 2(wG_{U_\xi}'U_{\xi\xi}\psi\psi_\xi + w'\mu'U_\xi^2)\psi\psi_\xi\mathrm{d}\xi + \int 2w\psi F(\psi_\xi^2,\psi_{\xi\xi}^2)\mathrm{d}\xi$$

结合式(9)及 Sobolev 不等式

$$\begin{cases} \|\psi_\xi\|_{L^\infty} \leqslant C\|\psi_\xi\|_{L^2}^{1/2}\|\psi_{\xi\xi}\|_{L^2}^{1/2} \\ \|\psi_{\xi\xi}\|_{L^\infty} \leqslant C\|\psi_{\xi\xi}\|_{L^2}^{1/2}\|\psi_{\xi\xi\xi}\|_{L^2}^{1/2} \end{cases}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(w\psi^2)\mathrm{d}\xi + \left(\frac{m}{2}-2\varepsilon_0\right)\int\psi^2\mathrm{d}\xi + (2\mu_\infty - \varepsilon_0 - 2m(m+m^2)^2)\int w\psi_\xi^2\mathrm{d}\xi \leqslant \varepsilon_0\int w\psi_{\xi\xi}^2\mathrm{d}\xi \tag{14}$$

将式(14)对 t 积分得

$$|\psi(t)|_{L^2,w}^2 + \left(\frac{m}{2}-2\varepsilon_0\right)\int_0^t\|\psi(\tau)\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau + \int_0^t(2\mu_\infty-\varepsilon_0-2m(m+m^2)^2)|\psi_\xi(\tau)|_{L^2,w}^2\mathrm{d}\tau \leqslant \varepsilon_0\int_0^t\|\psi_{\xi\xi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau + |\psi_0|_{L^2,w}^2 \tag{15}$$

只要当 $\varepsilon_0 \leqslant \min\left\{\dfrac{m}{4},2\mu_\infty-2m(m+m^2)^2\right\}$，即可得式(13)成立，即引理 2 得证。

引理 3 若 $\psi\in X(0,T)$ 为式(9)的解，则存在一个正常数 C，使得对任意的 $t\in[0,T]$，有

$$\|\psi_\xi(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t\|\psi_{\xi\xi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \leqslant C(\|(\psi_0)_\xi\|_{L^2}^2 + \|\psi_0\|_{L^2}^2) \tag{16}$$

证明 式(9)中第一式乘以 $\psi_{\xi\xi}$，并对 ξ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_\xi^2\mathrm{d}\xi + (\mu_\infty - 2\varepsilon_0)\int\psi_{\xi\xi}^2\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{2+2\varepsilon_0^2}{\mu_\infty}\int\psi_\xi^2\mathrm{d}\xi$$

对 t 积分，并应用式(15)以及 $C^{-1}\|\psi\| \leqslant |\psi|_{L^2,w} \leqslant C\|\psi\|$ 可得

$$\|\psi_\xi(t)\|_{L^2}^2 + C_0\int_0^t\|\psi_{\xi\xi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \leqslant C_1(\|(\psi_0)_\xi\|_{L^2}^2 + \|\psi_0\|_{L^2}^2) \tag{17}$$

其中

$$C_0 = \mu_\infty - 2\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0(2+2\varepsilon_0^2)}{\mu_\infty(2\mu_\infty-\varepsilon_0-2m(m+m^2)^2)}$$

由 $m\ll 1$，$\varepsilon_0 \ll 1$，可知 $C_0>0$，则由式(17)可推出式(16)成立，因此引理 3 得证。

引理 4 若 $\psi\in X(0,T)$ 为式(9)的解，则存在一个正常数 C，使得对任意 $t\in[0,T]$，$k=2,3$ 有

$$\|\partial_\xi^k\psi(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t\|\partial_\xi^{k+1}\psi\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \leqslant C(\|\partial_\xi^k\psi_0\|_{L^2}^2 + \|\psi_0\|_{H^{k-1}}^2) \tag{18}$$

证明 考虑高阶导估计，将式(9)中的第一式对 ξ 求导，得

$$\psi_{t\xi} + (h'(U)\psi_\xi)_\xi - (G(U_\xi)\psi_{\xi\xi})_\xi = F(\psi_\xi,\psi_{\xi\xi})_\xi \tag{19}$$

式(19)乘以 $-\psi_{\xi\xi\xi}$ 并对 ξ 积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_{\xi\xi}^2\mathrm{d}\xi + (\mu_\infty - 6\varepsilon_0)\int\psi_{\xi\xi\xi}^2\mathrm{d}\xi \leqslant \left(\frac{2(m^2+1)^2}{\mu_\infty} + \frac{2\varepsilon_0}{\mu_\infty(2\mu_\infty-\varepsilon_0-2m(m+m^2)^2)} + 2\varepsilon_0\right)\int\psi_{\xi\xi}^2\mathrm{d}\xi \tag{20}$$

式(20)对 t 积分并应用式(17)可得

$$\|\psi_{\xi\xi}(t)\|_{L^2}^2 + (\mu_\infty - 2\varepsilon_0)\int_0^t\|\psi_{\xi\xi\xi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \leqslant C_2(\|(\psi_0)_{\xi\xi}\|_{L^2}^2 + \|(\psi_0)_{\xi\xi}\|_{L^2}^2 + \|\psi_0\|_{L^2}^2) \tag{21}$$

将方程(9)中的第一式对 ξ 求两阶导，得

$$\psi_{t\xi\xi} + (h'(U)\psi_\xi)_{\xi\xi} - (G(U_\xi)\psi_{\xi\xi})_{\xi\xi} = F(\psi_\xi,$$

$\psi_{\xi\xi})_{\xi\xi}$ (22)

式(22)乘以 $-\psi_{\xi\xi\xi\xi}$ 并对 ξ 积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_{\xi\xi\xi}^{2}\mathrm{d}\xi+(\mu_{\infty}-2\varepsilon_{0})\int\psi_{\xi\xi\xi\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\leqslant C_{3}\int\psi_{\xi\xi\xi}^{2}\mathrm{d}\xi \tag{23}$$

式(23)中对 t 积分并应用式(21)可得

$$\|\psi_{\xi\xi\xi}(t)\|_{L^2}^{2}+(\mu_{\infty}-2\varepsilon_{0})\int_{0}^{t}\|\psi_{\xi\xi\xi\xi}\|_{L^2}^{2}\mathrm{d}\tau\leqslant C_{4}(\|(\psi_{0})_{\xi\xi}\|_{L^2}^{2}+\|(\psi_{0})_{\xi\xi}\|_{L^2}^{2}+\|(\psi_{0})_{\xi\xi}\|_{L^2}^{2}+\|\psi_{0}\|_{L^2}^{2})\leqslant C\|\psi_{0}\|_{H^3}^{2} \tag{24}$$

只要当 $\varepsilon_{0}\leqslant\frac{\mu_{\infty}}{2}$,由式(21)、(24)即可推出式(18)成立,即引理 4 得证。

因此,由引理 2 ~4,当 ε_0 满足

$\varepsilon_{0}\leqslant\min\left\{\frac{m}{4},\frac{\mu_{\infty}}{6},2\mu_{\infty}-2m(m+m^{2})^{2}\right\}$ 时,可推出命题 1 成立。

4　结束语

本文通过构造权函数,对方程进行加权能量估计,解决了方程本身的非凸性问题,得到了解的全局估计。需要强调的是,本文对冲击波的强度并没有限制条件。

参考文献:

[1] Ilyin A M, Kalasnikov A S, Oleinik O A. Second-order linear equations of parabolic type[J]. Uspehi Mat Nauk, 1962,17(3):3 -146.

[2] Kawashima S, Matsumura A. Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion[J]. Communications in Mathematical Physics, 1985, 101(1): 97 -127.

[3] Matsumura A, Nishihara K. On the stability of travelling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas[J]. Japan Journal of Applied Mathematics, 1985, 2(1): 17 -25.

[4] Huang F M, Matsumura A, Shi X D. On the stability of contact discontinuity for compressible Navier-Stokes equations with free boundary[J]. Osaka Journal of Mathematics, 2004, 41(1): 193 -210.

[5] Matsumura A, Mei M. Nonlinear stability of viscous shock profile for a non-convex system of viscoelasticity[J]. Osaka Journal of Mathematics, 1997, 34(3): 589 -603.

[6] Shi X D, Wang T, Zhang Z. Asymptotic stability for one dimensional montion of non-Newtonian compressible fluid [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2014, 30(1): 99 -110.

[7] Matsumura A, Yoshida N. Asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for the scalar viscous conservation law with partially linearly degenerate flux[J]. Siam Journal on Mathematical Analysis, 2012, 44(4): 2526 -2544.

[8] Wolf J. Existence of weak solutions to the equations of non-stationary motion of non-Newtonian fluids with shear rate dependent viscosity[J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2007, 9(1):104 -138.

Stability of shock wave solutions for non-Newtonian viscous non-convex conservation laws

YAN ShiDong　CHEN Xiao　CHEN YaZhou *

(Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The asymptotic stability of the shock wave solutions to the Cauchy problem for viscosity non-convex conservation laws of the Carreau type is discussed. In the case of small perturbations, the monotone operator theory and the weighted energy estimation method are used to prove that the viscous shock wave solutions of this kind of viscous non-convex conservation law equation are asymptotically stable, and this result is not affected by the strength of the shock wave.

Key words: equation of viscosity conservation law; shock wave solution; weighted energy estimation; non-Newtonian viscosity; non-convex

(责任编辑:汪　琴)