

任意二次曲线的双圆弧拟合成形法

邱 辉 张莉彦 张有忱

(北京化工大学机电工程学院, 北京 100029)

摘 要: 文中介绍的是用双圆弧拟合平面任意二次曲线, 首先利用几何知识对任意形式的平面二次曲线进行分类, 然后对分类后的各种二次曲线分别进行双圆弧拟合, 使拟合后的双圆弧曲线满足精度要求。对于数控加工具有实用意义, 扩大了数控加工的范围。

关键词: 双圆弧拟合; 法向误差; 型值点; 数控加工

中图分类号: TH164

引 言

二次曲线的加工是数控机床加工经常遇到的问题。由于目前绝大多数数控机床的数控装置只具备直线插补和圆弧插补的功能, 不能直接对二次曲线进行拟合、插补, 要对其进行加工只能先进行拟合然后插补才能够加工, 因此能作任意二次曲线的双圆弧拟合的编程输入软件是十分需要的。

由于工程应用不同, 对曲线拟合的要求也不同。有的只要求拟合曲线光滑, 有的要求光顺^[1]。本课题开发的软件要求是: 能输入任意二次曲线; 拟合曲线要求光滑; 拟合曲线与函数曲线间的误差应控制在允许的范围之内, 且拟合圆弧段数较少。

本文对任意二次曲线的双圆弧拟合, 建立在对平面任意二次曲线可以进行分类的基础上, 先将二次曲线分类, 然后对各类曲线分别进行双圆弧拟合。目前的数控系统还没有专门的二次曲线的加工方法, 故本文描述的方法具有实用价值。

1 二次曲线的一般理论^[2]

在平面直角坐标系中, 二元二次方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

在不同的坐标系下, 平面上一点的坐标、一条曲线的方程是不同的。通过利用坐标变换(坐标轴的平移和旋转), 将一般二次曲线方程化成最简形式,

借以确定曲线的形状和位置。适当选择坐标系, 二次曲线方程可简化成几种标准方程。由实际的工程应用可知, 在实际的加工中只有椭圆、双曲线、抛物线和直线具有工程价值。数控机床具有直线的插补功能, 所以这里只考虑椭圆、双曲线和抛物线的双圆弧拟合。

2 曲线的双圆弧拟合方法^[3~7]

按平面曲线给定一列有序型值点(节点), 每相邻节点之间有两条相切圆弧构成, 两圆弧通过一个节点, 且节点处的切线斜率与曲线在节点处的斜率相等, 叫做曲线的双圆弧拟合。双圆弧拟合有六个参数需要确定: 两节点 P_i, P_{i+1} ; 两节点 P_i, P_{i+1} 处的切线斜率; 双圆弧的切点 T ; 双圆弧切点处的公切线斜率。前四个参数可由曲线的参数方程按给定参数值求得。双圆弧拟合方法主要根据后两个参数的求法不同而不同, 但不难证明两圆弧相切点位置结论: 相切点位置有无穷多个; 相切点的轨迹是一个圆弧——轨迹弧。

为确保双圆弧的正确拟合, 要求:

(1) 两拟合圆弧应满足保凸要求, 即两相邻节点 P_i, P_{i+1} 处切线 $P_iM, P_{i+1}M$ 需有实交点(沿某切线方向前进时, 与另一切线的反向延长线的交点, 反之为虚交点);

(2) 拟合的圆弧段需要采用劣弧, 即两节点连线 P_iP_{i+1} 与两切线 $P_iM, P_{i+1}M$ 构成的三角形中 $\angle M < \angle 2$ 。

3 双圆弧拟合

图1, 设节点 A 和 B 为在第 $i+1$ 个区间 $[P_i,$

收稿日期: 2002-06-25

第一作者: 男, 1976年生, 硕士生

E-mail: qiuhiu-buct@yahoo.com.cn

$P_{i+1}]$ 上的相邻节点,有向直线^[6,7] g_A 和 g_B 为拟合曲线 j 在 A 和 B 上的有向切线。设 C 是直线 g_A 和 g_B 的交点, α 和 β 分别是 g_A 和 g_B 与横轴的夹角,逆时针方向为正; $-\pi < \alpha < \pi$, $-\pi < \beta < \pi$ 。当 $\alpha > 0$ (保凸) 时,双圆弧同向,为 C 形双圆弧。在局部坐标系下,双圆弧圆心和半径可以统一地给出。

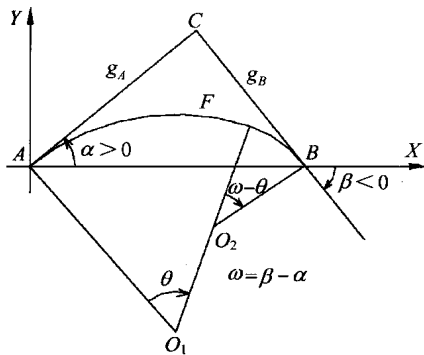


图1 双圆弧曲线

Fig. 1 Biarc curve

左圆半径

$$R_1 = L \sin \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right] / \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right), \quad (2)$$

圆心坐标

$$x_A = -R_1 \sin \alpha, \quad y_A = R_1 \cos \alpha. \quad (3)$$

右圆半径

$$R_2 = -L \sin \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right] / \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right), \quad (4)$$

圆心坐标

$$x_B = L - R_2 \sin \beta, \quad y_B = R_2 \cos \beta. \quad (5)$$

共切点的坐标

$$x_F = L \sin \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right] \cos \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right] / \sin \frac{\alpha}{2} \quad (6)$$

$$y_F = L \sin \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right] \sin \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right] / \sin \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

其中, $L = |AB|$; α 是左圆弧的圆心角, β 是右圆弧的圆心角;逆时针方向为正;正圆对应正圆心角,负圆对应负圆心角, $-\pi < \alpha < \pi$, $-\pi < \beta < \pi$, L 是 AB 的长度。

对于该区间,当切线 g_A 和 g_B 确定之后,选取不同的 (即选取不同的公切点) 决定了双圆弧的参数。本文中选取 $\alpha = \beta$, 亦即选取三角形的内心作为公切点。

4 误差判断

1) 计算二次曲线在节点 P_i, P_{i+1} 间 n 等分的各分点坐标。

1.1) 对于抛物线 $y = Ax^2 + Bx + C$, 在节点

P_i, P_{i+1} 间将横轴值 x 等分为 n 份: $x_i = x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_{n-1}} < x_{i_n} = x_{i+1}$, 计算出抛物线上各对应分点坐标, $P_{i_r}(x_{i_r}, y(x_{i_r}))$ $r = 1, 2, \dots, n-1$

1.2) 对于椭圆 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ 、双曲线 $\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases}$, 在节点 P_i, P_{i+1} 间将参数 θ 等分为 n 份: $\theta_i = \theta_{i_0} < \theta_{i_1} < \dots < \theta_{i_{n-1}} < \theta_{i_n} = \theta_{i+1}$, 计算出椭圆或双曲线上各对应分点坐标: $P_{i_r}(x(\theta_{i_r}), y(\theta_{i_r}))$ $r = 1, 2, \dots, n-1$

2) 判断分点 P_{i_r} 所对应的圆弧, 过两圆心 $O_1(x_1, y_1), O_2(x_2, y_2)$ 的直线 (必过公切点) 方程

$$F(x, y) = Ax + By + C = 0 \quad (8)$$

其中, $A = y_2 - y_1$; $B = x_1 - x_2$; $C = x_2 y_1 - x_1 y_2$ 。

将节点 $P_{i_r}(x_{i_r}, y_{i_r})$ 坐标代入式 (8) 左边, 将有

$$F(x_{i_r}, y_{i_r}) > 0 \text{ (或 } F(x_{i_r}, y_{i_r}) < 0) \quad (9)$$

将二次曲线上分点 P_{i_r} 坐标 x_{i_r}, y_{i_r} 代入式 (8) 左边计算值, 如符合式 (9) 不等式方向, P_{i_r} 点对应第一段圆弧, 否则对应第二段圆弧。

3) 计算法向误差, 对应第一段圆弧的误差公式是

$$e_{i_r}^{(1)} = \left| \sqrt{(x_{i_r} - x_1)^2 + (y_{i_r} - y_1)^2} - R_1 \right|, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (m = n-1) \quad (10)$$

其中, m 是对应第一段圆弧的最后一个分点号。

对应第二段圆弧的误差公式是

$$e_{i_r}^{(2)} = \left| \sqrt{(x_{i_r} - x_2)^2 + (y_{i_r} - y_2)^2} - R_2 \right|, \quad r = m+1, m+2, \dots, n-1 \quad (11)$$

4) 判断最大误差: 设 $e_i = (e_{i_r}^{(1)}, e_{i_r}^{(2)})_{\max}, i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

如果 $e_i > \epsilon$ (ϵ 为指定的最大的允许误差), 则对节点 P_{i+1}, P_{i+2} 间进行双圆弧拟合。如果 $e_i \leq \epsilon$, 则对节点 P_i, P_{i+1} 间用 0.618 法缩小区间, 重新进行双圆弧拟合, 直到满足误差要求。

5 计算实例及结论

运用上述方法拟合, 可以得到满足误差要求的双圆弧曲线, 且拟合的段数较少, 拟合的曲线光滑。拟合的速度较快, 可以很好的解决平面任意二次曲线的拟合问题。例如对于椭圆 $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{400} = 1$ 双圆弧拟合结果如表 1, 2 所示。

表 1 条件 1 下的椭圆双圆弧拟合的结果
Table 1 Result of biarc fitting ellipse under condition 1

圆弧段数	圆心坐标		圆半径/mm	起始点坐标		结束点坐标	
1	- 0. 000 002	24. 991 419	- 44. 991 419	0. 000 000	- 20. 000 000	- 5. 194 454	- 19. 609 557
2	- 0. 483 313	21. 346 764	- 41. 314 858	- 5. 914 454	- 19. 609 557	- 11. 480 503	- 18. 477 591
3	- 1. 156 859	18. 907 641	- 38. 784 445	- 11. 480 503	18. 477 591	- 14. 175 482	- 17. 626 571
4	- 2. 435 704	15. 318 812	- 34. 974 571	- 14. 175 482	17. 626 571	- 16. 667 106	- 16. 629 392
5	- 3. 280 880	13. 421 468	- 32. 897 497	- 16. 667 106	16. 629 392	- 19. 070 926	15. 438 881
6	- 5. 310 185	9. 712 395	- 28. 669 578	- 19. 070 926	15. 438 881	- 21. 213 203	14. 142 136
7	- 6. 475 641	7. 964 210	- 26. 568 520	- 21. 213 203	14. 142 136	- 23. 227 510	- 12. 657 651
8	- 8. 946 806	4. 922 161	- 22. 649 245	- 23. 227 510	- 12. 657 651	- 24. 944 088	- 11. 111 405
9	- 10. 214 732	3. 651 359	- 20. 854 091	- 24. 944 088	- 11. 111 405	- 26. 485 008	- 9. 393 611
10	- 12. 602 655	1. 736 801	- 17. 793 420	- 26. 485 008	- 9. 393 611	- 27. 716 386	- 7. 653 669
...	
26	- 1. 156 872	- 18. 907 584	- 38. 784 386	- 14. 175 483	17. 626 570	- 11. 480 506	18. 477 590
27	- 0. 483 303	- 21. 346 794	- 41. 314 889	- 11. 480 506	18. 477 590	- 5. 914 454	19. 609 556
28	- 0. 000 000	- 24. 991 383	- 44. 991 383	- 5. 914 454	19. 609 556	0. 000 000	20. 000 000

注:起点(0, - 20), 终点为(0, 20), 顺时针方向, 最大允许误差为 0. 005。

表 2 条件 2 下的椭圆双圆弧拟合的结果
Table 2 Result of biarc fitting ellipse under condition 2

圆弧段数	圆心坐标		圆半径/mm	起始点坐标		结束点坐标	
1	- 0. 000 002	24. 843 981	- 44. 843 981	0. 000 000	- 20. 000 000	- 11. 936 572	- 18. 382 179
2	- 3. 378 232	12. 610 323	- 32. 152 455	- 11. 936 572	- 18. 382 179	- 21. 213 203	- 14. 142 136
3	- 7. 089 065	7. 044 074	- 25. 462 654	- 21. 213 203	- 14. 142 136	- 25. 073 473	- 10. 981 126
4	- 12. 028 239	2. 093 697	- 18. 469 682	- 25. 073 473	- 10. 981 126	- 27. 716 386	- 7. 653 669
5	- 14. 248 339	0. 714 304	- 15. 855 953	- 27. 716 386	- 7. 653 669	- 29. 442 392	- 3. 819 127
...	
11	- 3. 378 225	- 12. 610 331	- 32. 152 464	- 21. 213 205	14. 142 134	- 11. 936 571	18. 382 178
12	- 0. 000 000	- 24. 843 965	- 44. 843 965	- 11. 936 571	18. 382 178	0. 000 000	20. 000 000

注:起点(0, - 20), 终点为(0, 20), 顺时针方向, 最大允许误差为 :0. 05。

由图 2、3, 表 1、2 可以看出, 用双圆弧拟合后的二次曲线比较光滑, 满足了拟合后的二次曲线的光顺性要求。随着最大允许误差的不同, 曲线的段数也会不同, 在实际的加工过程中可以根据加工需要设定不同的误差值, 或者采用较大的允许误差使得圆弧段数减少, 提高加工的速度, 或者采用较小的允许误差提高加工的精度。由于采用的是双圆弧的内心法拟合, 各段圆弧在连接点处可以达到一阶连续, 所以拟合后的曲线比较光滑, 不会产生尖点等特殊情况, 有利于在实际的数控加工的进一步的插值, 所以具有很好的实用价值。

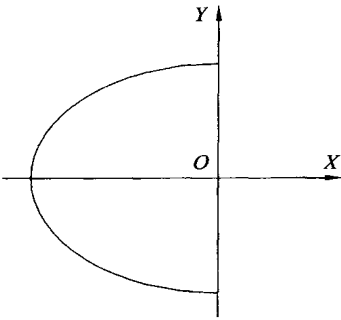


图 2 双圆弧拟合后的椭圆图形
Fig. 2 Ellipse of biarc fitting

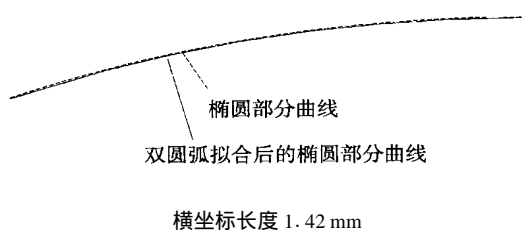


图 3 双圆弧拟合后的椭圆部分曲线与 cad 椭圆对应圆弧段的放大比较

Fig. 3 Comparison of part curve of biarc fitting ellipse with part curve of AUTOCAD ellipse

参 考 文 献

- [1] 苏步青, 刘鼎元. 计算几何[M]. 上海: 科学技术出版社, 1981. 195 - 204

- [2] 王向东, 韩普宪, 马合成. 解析几何常用方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1994. 130 - 179
- [3] 李 英, 代西武, 范振书. 函数曲线的双圆弧拟合[J]. 北京联合大学学报, 1995, 9(1): 31 - 36
- [4] 王 琦. 平面列表点曲线的最优双圆弧拟合[J]. 小型微型机算机系统, 1997, 18(8): 38 - 42
- [5] 阎 童, 王 琦. 双圆弧拟合在轮廓仿真加工中的应用[J]. 小型微型机算机系统, 1998, 19(10): 57 - 60
- [6] 汪国平, 孙家广. 椭圆型 Offset 曲线及其应用[J]. 计算机学报, 2000, 23(5): 531 - 536.
- [7] 雍俊海, 胡事民. A note on approximation of discrete data by GI arc splines[J]. Computer Aided Design, 1999, 31(14): 911 - 915

An approach for approximation of arbitrary conic by biarcs

QIU Hui ZHANG Li-yan ZHANG You-cheng

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: An approach for approximation of planar arbitrary conic by biarcs was introduced. First, the basic knowledge of geometry was used to classify the planar arbitrary conic. Then biarc was used to fit the different kinds of curves, which must satisfy the precision requirement. This approach can be applied in CNC machining.

Key words: biarc fitting; normal error; discrete data; CNC machining

(责任编辑 云志学)

(上接第 73 页)

参 考 文 献

- [1] 胡广书. 数字信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997. 22 - 27, 223 - 235
- [2] 唐贤远, 刘歧山. 传感器原理与应用[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 2000. 29 - 60
- [3] 王家桢, 王俊杰. 传感器与变送器[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996. 259 - 262

- [4] 程耀东. 机械震动学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1994. 19 - 61
- [5] Cowan CFN, Grant P M. 自适应滤波器[M]. 邵祥义译. 上海: 复旦大学出版社, 1990. 30 - 96
- [6] 孙才新, 罗 兵, 顾乐观. 自适应数字滤波在局部放电在线监测信号处理中应用的研究[J]. 变压器, 1997, 34(7): 19 - 24

A new filtering method for improving weighting precision

LU Xin-ming WANG Wei-ming

(Institute of Plastics Machinery and Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: A method using adaptive digital filtering for improving weighting precision was presented. The adaptive filtering has a good real-time quality and ideal filtering properties. In order to apply the filtering to a scaling process, a weighting device was designed, whose feasibility was proved theoretically. After testing, it is concluded that the adaptive filtering is efficient in eliminating large noise and improving weighting precision.

Key words: weighting sensor; noise; adaptive filtering

(责任编辑 云志学)