

Maxwell 方程组 Lorentz 表述四维张量形式的讨论

刘 辉 祁 欣*

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要: 在经典 Maxwell 方程组的基础上, 利用四维空间矢量和四维电磁场张量的变化规律, 将 Maxwell 方程组 Lorentz 表述的场方程组变换成四维张量形式, 证明了 Lorentz 表述四维张量形式的特点, 验证了 Maxwell 方程组的协变性以及 Lorentz 表述的四维张量形式的对称性, 从而更好地解释了电磁场的运动规律。通过列举实际算例验证了本文算法的实用性和有效性, 简化了运动介质相关的问题, 体现了在解决运动介质方面问题的优越性, 为运动问题的解决提供了一定的帮助。

关键词: Maxwell 方程组; Lorentz 表述; 四维张量

中图分类号: O412.3

引 言

Maxwell 在总结前人的一系列发现和实验成果的基础上, 结合自己提出的涡旋电场和位移电流的概念, 建立了第一个完整的电磁理论体系^[1-2]。他的推广有两个方面: 其一是假定变化的电场(位移电流)产生磁场, 从而把安培环路定理加以推广, 使之包括位移电流; 其二是假定变化的磁场产生电场, 从而把法拉第电磁感应定律由导体回路中产生感应电动势推广到一般情况。对于静止的, 不变形的物体来说, Maxwell 的处理方法再加上一些特定的附加条件同时进行相应的修改, 已经能够很完美地解决有关刚体的大部分问题了^[3-4]。但是, 对于运动着的, 可变形的物体来说, 一种新的表述方式提出了更好的解决办法。1892 年, Lorentz 提出了电子论, 这一理论把电磁现象归因于物质粒子中的电荷的存在和运动。Lorentz 表述使用电子来模拟物质的微观特性, 假设物体包含有大量极小的电子, 电子与充满物质的介质的场相互作用, 而这些场满足真空中的 Maxwell 方程。这是依据电子论的假设: 运动电子之间不直接发生作用, 而是借助浸没这些电以太介质相互作用^[5-6]。这些特点可以更好的解决

运动介质的相关问题。

本文在经典 Maxwell 方程组的基础上, 通过引入四维量的方法, 将 Maxwell 方程组的 Lorentz 表述进行四维形式的变化。体现了 Maxwell 方程组 Lorentz 表述的四维张量形式的对称性。同时通过算例验证了该算法在很大程度上方便了运动介质问题的求解, 并且提供了一种新的思路。

1 Maxwell 方程组的 Lorentz 表述

静止介质的 Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (1) \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 & (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma & (3) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} & (4) \end{cases}$$

本构方程为 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{J} = \nu \mathbf{E}$

式中, σ 为自由电荷密度, \mathbf{J} 为自由电流密度, ε 为介电常数, μ 为磁导率, ν 为电导率。

式(1)磁通连续性原理, 描述磁场的散度特性, 表明穿过任意闭合曲面的磁通量为零; 式(2)是安培环路定律的微分形式, 用于计算由于电流流动产生的磁; 式(3)为高斯通量定理的微分形式, 表明电场是有散场; 式(4)为法拉第定律; 本构方程分别描述电位移与电场强度间的关系, 铁磁介质的材料方程以及在磁场中运动的导体会产生感应电流。

将 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 看作真空中电磁场的基本变量, 引入极化密度 \mathbf{P} 和磁化密度 \mathbf{M} , 则

收稿日期: 2011-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(60971019)

第一作者: 男, 1986 年生, 硕士生

* 通讯联系人

E-mail: qixin@mail.buct.edu.cn

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

可以得到 Lorentz 表述的 Maxwell 方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma - \nabla \cdot \mathbf{P} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \nabla \times \mathbf{M} \end{array} \right. \quad (8)$$

式中, $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ 为极化电荷, $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v})$ 为极化电流, $\nabla \times \mathbf{M}$ 为磁化电流。

和经典 Maxwell 方程组相比可以看出, Lorentz 表述中式(6)表明电场的环量等于感应电场的面积分, 即变化的磁场能产生电场式, 式(7)表明闭合曲面的电通量等于闭合曲面所包围的体积内含有的电荷量的代数和, 式(8)表明沿着闭合曲线磁场的环量等于闭合曲线所包围的面积上流过的电流。

Maxwell 方程组的 Lorentz 表述是一组运动介质电动力学方程, 对于 Lorentz 表述, 在场中传递的电磁动量完全转化成运动学动量, 这个运动学动量影响物体的运动^[7-9]。

2 Maxwell 方程组引入四维量的算法

在恒定磁场中, 引入矢势 \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9)$$

引入库伦规范, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

引入标势 φ ,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t \quad (10)$$

引入四维空间矢量

$$\mathbf{X}_\mu = (\mathbf{x}, ict),$$

$$\mathbf{J}_\mu = (\mathbf{J}, icp),$$

$$\mathbf{A}_\mu = \left(\mathbf{A}, \frac{i}{c}\varphi \right),$$

引入反对称四维张量

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial X_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\beta}$$

$$\text{即 } \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}_3 & -\mathbf{B}_2 & -\frac{i}{c}\mathbf{E}_1 \\ -\mathbf{B}_3 & 0 & \mathbf{B}_1 & -\frac{i}{c}\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}_2 & -\mathbf{B}_1 & 0 & -\frac{i}{c}\mathbf{E}_3 \\ \frac{i}{c}\mathbf{E}_1 & \frac{i}{c}\mathbf{E}_2 & \frac{i}{c}\mathbf{E}_3 & 0 \end{pmatrix}$$

步骤 1

将式(9)代入到式(4), 则

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

将其展开得

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2} = 0$$

写成反对称张量形式

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} = 0 \quad (11)$$

步骤 2

将式(9)代入式(6), 则

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

根据四维空间矢量

$$\nabla \times \left(\nabla A_4 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_4} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

将其展开得

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_3} = 0$$

写成反对称四维张量形式

$$\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} = 0 \quad (12)$$

同理可得

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} = 0 \quad (14)$$

根据式(7)~(10), 整理得

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (15)$$

步骤 3

将式(10)代入式(7), 则

$$(1 + \chi_e) \left(-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_4} \right) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (16)$$

将式(16)展开得

$$(1 + \chi_e) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) \right] = \mu_0 J_4$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) = \mu_0 J_4$$

写成反对称四维张量形式

$$\frac{\partial F_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\mu J_4}{(1 + \chi_e)} \quad (17)$$

步骤 4

将式(9)和式(10)代入式(8),则

$$\mu^{-1} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}_f + \chi_e \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \nabla \times \mathbf{M} \quad (18)$$

$$\left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \right] = \frac{\partial}{\partial x_4} \left(-\nabla A_4 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_4} \right) + \frac{(\mu \mathbf{J}_f + \mu \mathbf{J}_p + \mu \mathbf{J}_m)}{1 + \chi_e} \quad (19)$$

式(18)~(19)中, \mathbf{J}_f 为自由电荷, \mathbf{J}_p 为极化电荷, \mathbf{J}_m 为磁化电荷。

$$(1 + \chi_e) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) \right] = \mu_0 J_1$$

$$(1 + \chi_e) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \right] = \mu_0 J_2$$

$$(1 + \chi_e) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \right] = \mu_0 J_3$$

写成反对称四维张量形式

$$\frac{\partial F_{1\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\mu J_1}{(1 + \chi_e)} \quad (20)$$

$$\frac{\partial F_{2\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\mu J_2}{(1 + \chi_e)} \quad (21)$$

$$\frac{\partial F_{3\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\mu J_3}{(1 + \chi_e)} \quad (22)$$

根据式(12)~(15)整理得

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\mu J_\beta}{(1 + \chi_e)} \quad (23)$$

综上所述, 式(15)和式(23)就构成了 Lorentz 表述的四维张量形式, 即

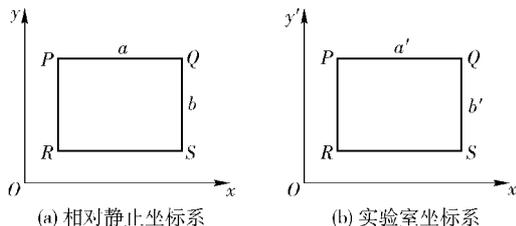
$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0 \\ \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\mu J_\beta}{(1 + \chi_e)} \end{cases}$$

对称性是物理学的整体属性, 对称性原理在物理学中是一个重要而且得到普遍应用的规律。Maxwell 方程组的 Lorentz 表述的四维张量形式除了

有形象对称和抽象对称之外, 更不乏数学对称性, 这种数学对称性也可称之为变换不变性。

3 相对运动问题算例

算例: 一个电流为 I 的不带电金属线圈, 以速度 \mathbf{v} 平行于 PQ 边作匀速运动。



解法(1): 设导线的截面积为 S , PQ 边长为 a , RS 边长为 b , 在与线圈相对静止的坐标系中, 线圈电流为 I , 其密度 $\mathbf{J} = I/S$, 电流密度 $\boldsymbol{\rho} = 0$ 。利用四维矢量 $\mathbf{J}_\mu = (\mathbf{J}, ic\rho)$, 可得实验室坐标系中的电荷分布

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ ic\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\theta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\theta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\therefore \boldsymbol{\rho}' = \gamma \frac{v}{c^2} \mathbf{J}'_1,$$

在实验室坐标系观察到 PQ 边电荷密度

$$\boldsymbol{\rho}'_{PQ} = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{I}{S},$$

在实验室坐标系观察到 RS 边电荷密度

$$\boldsymbol{\rho}'_{RS} = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{I}{S},$$

在实验室坐标系观察, 边的长度缩短了

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1} a,$$

所以 PQ 和 RS 边上各有电荷

$$q_{PQ} = \frac{v}{c^2} I a, q_{RS} = -\frac{v}{c^2} I a,$$

因此, 在实验室坐标系中, 线圈具有 y 方向的电偶

$$\text{极矩 } \mathbf{P}_y = q b' = \frac{v}{c^2} I a b.$$

解法(2): 设导线的截面积为 S , 在与线圈相对静止的坐标系中, 线圈电流为 I , 其密度 $\mathbf{J} = I/S$, 电流密度 $\boldsymbol{\rho} = 0$ 。

将 x, y, z, τ 看作四度空间内的一个矢量的 4 个分量, 根据

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = \tau = ict$$

当从一个参考系变换到另一个参考系时, 遵循四度矢量变换公式

$$A_1 = \frac{A'_1 - i \frac{v}{c} A'_4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A_2 = A'_2, A_3 = A'_3, A_4 =$$

$$\frac{A'_4 + i \frac{v}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

带入已知条件得到实验室坐标系中的电荷密度

$$\rho = \frac{ic\rho' + i \frac{v}{c} J'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

$$\text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \rho' = \gamma \frac{v}{c^2} J'_1,$$

因为与 x 轴平行的两条边, PQ 中有电流密度 $J = I/S$, RS 中有电流密度 $J = -I/S$ 。所以得到在实验室坐标系观察到 PQ 边电荷密度

$$\rho'_{PQ} = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{I}{S},$$

在实验室坐标系观察到 RS 边电荷密度

$$\rho'_{RS} = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{I}{S},$$

在实验室坐标系观察, 截面积不变, 但边长缩短了

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1} a,$$

所以 PQ 边上的电荷为 $q_{PQ} = \frac{v}{c^2} I a$,

RS 边上的电荷为 $q_{RS} = -\frac{v}{c^2} I a$,

因此, 在实验室坐标系中, 线圈具有 y 方向的电偶

极矩 $P_y = qb' = \frac{v}{c^2} I ab$ 。

从算例可以看出本算法的适用范围为问题要有两个以上的参考系统, 同时参考系统之间要有相对运动, 与解法(2)的一般算法对比可以看出, 本文的算法通过引用四维矢量和张量, 将运动介质的问题

变换为四维坐标下的问题, 不需要进行大量的坐标变换计算, 很大程度上减少了问题的复杂性, 本文给出的算法很好地体现了在解决运动介质方面问题的优越性。

4 结论

(1) 本文通过引入四维坐标矢量以及四维电磁场张量, 推导出 Maxwell 方程组 Lorentz 表述的四维形式。

(2) 利用矢量和张量的变化规律, 验证了 Maxwell 方程组的协变性以及 Lorentz 表述的四维张量形式的对称性。

(3) 通过实际算例的列举, 说明了本文的算法不需要进行大量的坐标变换计算, 简化了运动介质相关的问题, 为运动问题的解决提供了一定的帮助。

参考文献:

- [1] 肖志俊. 对麦克斯韦方程组的探讨[J]. 通信技术, 2008, 41(9): 81-83.
Xiao Z J. The discussion of Maxwell's equations [J]. Communications Technology, 2008, 41(9): 81-83. (in Chinese)
- [2] 陈俊华. 关于麦克斯韦方程组的讨论[J]. 物理与工程, 2002, 12(4): 18-20.
Chen J H. The argumentation about Maxwell's equations [J]. Physics and Engineering, 2002, 12(4): 18-20. (in Chinese)
- [3] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 2 版. 北京: 人民教育出版社, 1997.
Guo S H. Electrodynamics [M]. 2nd Ed. Beijing: People's Education Press, 1997. (in Chinese)
- [4] 鲍亦兴. 变形连续介质中的电磁力[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
Bao Y X. The electromagnetic force of deformation and continuum [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [5] 李廉林, 李芳. 基于 Laguerre 多项式及 PML 边界的时域 Maxwell 方程解[J]. 信息科学, 2008, 38(8): 1331-1338.
Li L L, Li F. The time-domain Maxwell equations based on Laguerre polynomial and PML boundary [J]. Information Sciences, 2008, 38(8): 1331-1338. (in Chinese)
- [6] Sun Y, Tse P S P. Symplectic and multisymplectic numerical methods for Maxwell's equations [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230: 2076-2094.

- [7] Kou Y L, Ding S J. Partial compactness for Landau-Lifshitz Maxwell equation in two-dimension[J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31B(2): 727-748.
- [8] 张祥雪, 程艳霞, 范秀华, 等. 洛伦兹力可看作静止电荷所受电场力的相对论效应[J]. 物理与工程, 2006, 16(4): 26-28.
Zhang X X, Cheng Y X, Fan X H, et al. The relativistic effects that Lorentz force can be seen as electric force of electric charge[J]. Physics and Engineering, 2006, 16(4): 26-28. (in Chinese)
- [9] Cohen G, Ferrieres X, Pernet S. Discontinuous Galerkin methods for Maxwell's equations in the time domain[J]. Comptes Rendus Physique, 2006, 7: 494-500.

Lorentz expression of Maxwell's equations in a four-dimensional tensor

LIU Hui QI Xin

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this paper, we transform the Lorentz expression of Maxwell's equations to a four-dimensional tensor form by defining vector potential, scalar potential, the four-dimensional space vector and the electromagnetic field tensor. The result can better explain the movement of the electromagnetic field and verify the invariance of Maxwell's equations and the symmetry of the Lorentz expression of the four-dimensional tensor form. By listing actual examples we can verify the usefulness and effectiveness of the arithmetical method. At the same time, it can simplify the problem of a moving medium and provide some assistance in solving the movement problem, which demonstrates its superiority over the traditional form.

Key words: Maxwell's equations; Lorentz representation; four-dimensional tensor