

# 规则约束型数学规划方法及其工程应用

席永胜 刘振娟 李宏光\*

(北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029)

**摘要:** 从历史数据中挖掘模糊规则, 建立模糊规则库, 从而构造了含模糊规则约束的数学规划模型。采用 Sugeno 推理方法得到模糊系统, 建立变量之间的映射关系, 将模糊系统作为数学规划问题的等式约束, 并给出一类含有模糊推理的遗传算法进行求解。将规则约束型数学规划模型应用于精馏塔稳态操作优化中, 验证了方法的有效性。

**关键词:** 数学规划; 规则约束; 模糊推理; 精馏塔调优

**中图分类号:** TP202

## 引言

基于 Bellman 和 Zadeh 的模糊决策理论<sup>[1]</sup>, Tanaka 等<sup>[2]</sup>首次将模糊集合应用到数学规划问题中。对于约束量具有弹性限制的软约束规划问题, 一般可使用容差法将其转化为最大满意度精确规划<sup>[3]</sup>。当数学规划模型中含有不确定性参数时, Arikan 等<sup>[4]</sup>结合模糊参数规划与模糊线性规划提出一种求解含有不确定性参数的模糊多目标规划方法。Carlsson 等<sup>[5]</sup>提出了一种基于 Tsukamoto 推理的规划方法, 求解目标函数与决策变量间没有确定函数关系的优化问题, 经去模糊化可得到目标与决策变量间的精确数学关系, 然而, 该方法要求语言变量的隶属函数连续单调。de Souza 等<sup>[6]</sup>依据合成推理方法建立了以决策变量为输入、模糊目标函数为输出的非线性映射关系, 扩展了原始的数学规划模型。钟飞等<sup>[7]</sup>基于 Matlab 对 Mamdani 型模糊算法和 Sugeno 型模糊算法进行了研究与对比, 结果表明 Mamdani 算法可以很好的表达人的经验知识, 更符合人的思维习惯和语言表达方式, 然而在数值计算上较为复杂, Sugeno 型模糊算法计算简便, 易于进行数学分析, 更适合用于控制及数学优化。

精馏过程十分复杂, 难以得到准确的机理模型, 因而采用传统数学规划方法很难得到合适的稳态操作条件。然而, 可以从大量的历史数据中提取变量

之间的相互关系, 并以模糊规则的形式体现在数学规划问题的约束条件之中。为此, 本文研究了一类含模糊规则约束的数学规划问题的处理方法, 采用 Sugeno 模糊推理来建立变量之间的映射关系, 并提出一类含有模糊推理的遗传算法来求解规则约束型数学规划。

## 1 数学规划中规则约束的描述

当某些决策变量存在模糊规则依赖关系时, 相应的数学规划问题可以表述为

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \text{Rules} \\ \mathbf{x}_{\text{low}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\text{up}} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 Rules 表示用于描述 T-S 模型的模糊规则,  $\mathbf{x}_{\text{low}}$  和  $\mathbf{x}_{\text{up}}$  分别为决策变量的下界和上界, 第  $i$  条模糊规则用  $R^i$  表示, 其一般形式为

$$\begin{aligned} R^i: & \text{如果 } z_1 \text{ 为 } \hat{A}_1^i, z_2 \text{ 为 } \hat{A}_2^i, \dots, z_m \text{ 为 } \hat{A}_m^i, \\ & \text{则 } y^i = p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + \dots + p_m^i x_m. \end{aligned}$$

将模糊规则作为数学规划问题的一类约束, 描述变量间的依赖关系。规则的前件是一个或多个输入模糊变量的取值组合, 后件为前件变量的线性组合, 表示在前件变量的取值情况下后件变量所对应的值。 $\hat{A}_j^i$  是定义在输入变量论域上的模糊集合, 其隶属函数应根据实际情况或者决策者偏好给定。

模糊规则用来描述系统的特性, 规则的可靠性决定了所得模糊的可靠性。这里通过历史数据辨识得到对象难以用机理关系表达的关系式<sup>[8]</sup>。本文

收稿日期: 2013-04-16

第一作者: 男, 1987 年生, 硕士生

\* 通讯联系人

E-mail: lhg@mail.buct.edu.cn

采用 T-S 模型辨识方法<sup>[9-10]</sup>。

T-S 模糊模型的辨识包括结构的辨识和参数的辨识。对于规则前件通常使用模糊 C 均值法来对输入变量进行模糊聚类,对于规则后件则通常使用最小二乘法获得模型参数。

### 1) 前件参数的模糊聚类算法

模糊 C 均值法是指通过样本数据,寻找能够使得目标函数取值最小的聚类中心  $Z = [z_1, \dots, z_c]$  和隶属函数  $U = [\mu_1 \mu_N]$ ,如式(2)所示。

$$J(U, Z) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m \|x_k - z_i\|^2 \quad (2)$$

式(2)中,  $x_k$  为样本数据,  $z_i$  为聚类中心,  $\mu_{ik}$  为第  $k$  个数据在第  $i$  个聚类中心的隶属度。隶属函数的构造如式(3)。

$$\mu_{ik} = \left[ \sum_{j=1}^c \left( \frac{x_k - z_i}{x_k - z_j} \right)^{\frac{2}{m-1}} \right]^{-1} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, c \\ k = 1, 2, \dots, N \end{matrix} \quad (3)$$

式(3)中

$$z_i = \frac{\sum_{k=1}^N z_k (\mu_{ik})^m}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m} \quad i = 1, 2, \dots, c \quad (4)$$

鉴于模糊 C 均值法对初始值的依赖性比较敏感,故可先使用减法聚类法得到聚类的中心个数以及初始的聚类条件,具体算法详见文献[9]。

### 2) 后件参数的辨识

T-S 模型的总体输出可表示为

$$y = \phi \theta \quad (5)$$

其中

$$\theta = [p_{10}, \dots, p_{n0}, p_{11}, \dots, p_{n1}, p_{1m}, \dots, p_{nm}]^T \quad (6)$$

$$\phi = [\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_1 x_1, \dots, \beta_n x_1, \dots, \beta_1 x_m, \dots, \beta_n x_m] \quad (7)$$

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad (8)$$

则由最小二乘法可得后件模型参数

$$\theta = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y \quad (9)$$

## 2 规则约束型数学规划的处理

### 2.1 规划问题的构造

模糊推理采用 T-S 方法时,对于一个二输入一输出的系统,模糊规则为

$R^i$ : 如果  $z_1$  为  $\tilde{A}_1^i$ ,  $z_2$  为  $\tilde{A}_2^i$

则  $y^i = p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2$

在上述定义中,  $\tilde{A}_j^i$  是模糊子集,其隶属函数中参数为前提参数,  $z_j$  为前提变量,  $x_j$  为结论变量,且一般情况下  $x_j = z_j$ ,  $y^i$  为第  $i$  条规则的输出,  $p_j^i$  为后件参数。当给定前提变量  $z_j$  后,则由推理得到后件的加权平均值为

$$y = \frac{\mu^1 y^1 + \mu^2 y^2 + \dots + \mu^m y^m}{\mu^1 + \mu^2 + \dots + \mu^m} \quad (10)$$

$\mu^i$  为第  $i$  条规则的隶属度。

为表述方便,将通过 Sugeno 推理方法得到的模糊逻辑系统记为  $fis$ ,这是一个关于规则前件和后件变量的单值映射,可写为

$$x^{out} = fis(x^{in}) \quad (11)$$

$x^{in}$  和  $x^{out}$  分别为模糊推理系统前件和后件变量的集合,二者均为规划问题决策变量集的子集,相互关系为:  $x = x^{in} \cup x^{out} \cup x^{else}$ ,  $x^{in} \cap x^{out} = \emptyset$ 。当  $x^{else}$  非空时,  $x^{in} \cap x^{else} = x^{out} \cap x^{else} = \emptyset$ 。当模糊系统的输入为  $x^{in}$  时,输出值为  $fis(x^{in})$ ,而非  $x^{out}$ 。 $x^{else}$  表示模糊系统中不涉及的其他决策变量,可以为空集。 $fis(x^{in})$  的意义为,以  $x^{in}$  为输入经模糊系统  $fis$  得到的输出为  $fis(x^{in})$ 。变量划分如图 1 所示。

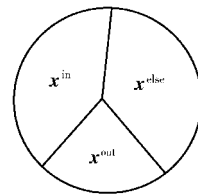


图 1 决策变量的划分

Fig. 1 Division of the decision variables

于是,原数学规划问题等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} g_i(x) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, I \\ h_j(x) = 0 & j = 1, 2, \dots, J \\ x_q^{out} = fis(x^{in}) & q = 1, 2, \dots, Q \\ x_{low} \leq x \leq x_{up} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $Q$  表示模糊系统输出的维数。

### 2.2 规划问题的求解

由于遗传算法只需要给出合理的适应度函数,因此,可以用其求解规划问题(12)。首先构造用于求解此数学规划问题的增广拉格朗日函数

$$M(x, \lambda, \sigma) = f(x) - \sum_{j=1}^J \lambda_j h_j(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{j=1}^J h_j^2(x) - \sum_{q=1}^Q \lambda_q (x_q^{out} - fis(x^{in})) + \frac{\sigma}{2} \sum_{q=1}^Q (x_q^{out} - fis(x^{in}))^2$$

$$(\mathbf{x}_q^{\text{out}} - f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}}))^2 + \frac{1}{2\sigma} \sum_i^I \{ [\max \{0, \lambda_i - \sigma g_i(\mathbf{x})\}]^2 - \lambda_i^2 \} \quad (13)$$

其中,  $\lambda$  为拉格朗日乘子,  $\sigma$  为罚因子。  $\mathbf{x}$  由算法进化生成,  $\mathbf{x}^{\text{in}}$  经推理系统  $f_{is}$  得到对应输出为  $f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}})$ , 令  $\mathbf{x}^{\text{out}} = f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}})$ , 以使决策变量满足规则约束。进而, 建立如式 (14) 所示的适应度函数

$$fit(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 1.1^{M(\mathbf{x}, \lambda, \sigma)}} & M(\mathbf{x}, \lambda, \sigma) \geq 0 \\ \frac{1}{1 + 0.9^{-M(\mathbf{x}, \lambda, \sigma)}} & M(\mathbf{x}, \lambda, \sigma) < 0 \end{cases} \quad (14)$$

以使个体满足等式、不等式和模糊系统约束。

对于实际问题, 可以首先依据机理关系建立确定性的数学模型, 然后对于无法建立严格数学模型的变量, 通过采集历史数据确定模糊规则系统, 构造含模糊规则的数学规划问题。以下给出一类含有模糊推理的遗传算法求解含有规则约束的数学规划问题, 算法的主要步骤如下。

**步骤 1** 依据历史数据辨识 T-S 模型, 对得到的模糊规则使用 Sugeno 推理方法建立模糊系统  $f_{is}$ , 初始化遗传算法种群, 种群个体将依据模糊系统被划分为输入  $\mathbf{x}^{\text{in}}$ 、输出  $\mathbf{x}^{\text{out}}$  及其他  $\mathbf{x}^{\text{else}}$ 。

**步骤 2** 求解种群中以  $\mathbf{x}^{\text{in}}$  为输入变量时模糊系统的输出值  $f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}})$ , 令  $\mathbf{x}^{\text{out}} = f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}})$ , 该非线性关系将作为数学规划的等式约束条件, 将  $\mathbf{x}^{\text{out}} - f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}})$  作为惩罚项加入增广拉格朗日函数 (13)。

**步骤 3** 求解其他约束  $g(\mathbf{x})$ 、 $h(\mathbf{x})$  及目标函数  $f(\mathbf{x})$  的值, 结合步骤 (2) 中所得  $f_{is}(\mathbf{x}^{\text{in}})$ , 依据公式 (13)、(14) 计算增广拉格朗日函数  $M(\mathbf{x}, \lambda, \sigma)$  和适应度函数  $fit(\mathbf{x})$  的值。

**步骤 4** 判断当代种群中是否有个体满足各项约束, 并能使目标函数取值较优, 若有则停止计算; 否则依据约束被违反的程度修正对应拉格朗日乘子  $\lambda$  及罚因子  $\sigma$ 。

**步骤 5** 依据个体适应度对种群进行复制、交叉和变异操作, 保存精英个体并更新种群。返回步骤 2。

具体算法流程如图 2 所示。

### 3 实例分析

考虑某丙烯精馏过程<sup>[11]</sup>, 进料主要成分为丙烯和丙烷, 同时含有极少量的异丁烷、乙烷、1-丁烷等多元组分, 精馏塔的工艺参数已确定, 操作优化的目的是在生产负荷的限制下确定进料量和回流比, 以

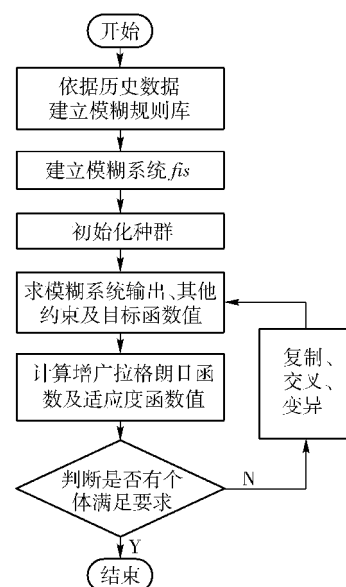


图 2 规则约束型数学规划的算法流程

Fig. 2 Flowchart of the algorithms of mathematical programming with fuzzy rules

使生产效率最优。精馏塔单股进料, 塔顶采出丙烯, 塔底采出丙烷, 无侧线采出, 塔顶全冷凝, 工艺过程如图 3 所示。  $F$ 、 $D$  和  $W$  分别为进料量、塔顶与塔底采出量 (均采用物质的量),  $x_{F,2}$ 、 $x_{D,2}$  和  $x_{W,2}$  分别为进料、塔顶与塔底采出物中丙烯的摩尔分数。

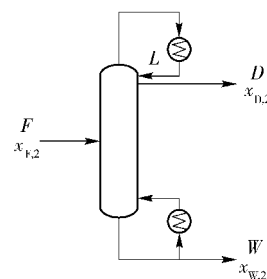


图 3 丙烯精馏过程工艺示意图

Fig. 3 Sketch map of the processes occurring in the propylene distillation column

根据物料平衡有

$$\begin{cases} F = D + W \\ Fx_{F,2} = Dx_{D,2} + Wx_{W,2} \end{cases}$$

整理可得产品产率为

$$\frac{D}{F} = \frac{x_{F,2} - x_{W,2}}{x_{D,2} - x_{W,2}}$$

由于  $x_{F,2} > 80\%$ ,  $x_{D,2} > 98\%$ ,  $x_{W,2} < 10\%$ , 所以一般在工程上有近似

$$\frac{D}{F} \approx \frac{x_{F,2}}{x_{D,2}}$$

因而目标函数为

$$\max f = \frac{x_{F,2}}{x_{D,2}}$$

为了使精馏塔能够平稳的生产,而且有相对较高的收益,回流比  $R$  设有下限约束,即  $R \geq R_{\min} = 5.7$ ;生产负荷的限制主要表现为对进料量的限制,即  $F \leq F_{\max} = 14$ ;塔顶产品丙烯的纯度要求不能低于 98%,即  $98\% \leq x_{D,2} \leq 1$ 。

实际精馏过程中的精确机理模型往往难以建立,为此使用模糊规则来描述系统的不确定性。丙烯精馏过程中塔顶产品的浓度一般认为是进料量和回流比的函数,而且在其他条件不变的情况下,与浓度近似成线性关系、与进料量成双曲线关系。在适当的论域上定义模糊变量,使用历史数据挖掘模糊规则,建立逻辑推理系统  $x_{D,2} = fis(R, F)$ 。由此,可以构造相应的数学规划问题为

$$\begin{aligned} \max f &= \frac{0.85852}{x_{D,2}} \\ \text{s. t } &\begin{cases} x_{D,2} = fis(R, F) \\ 0.98 \leq x_{D,2} \leq 1 \\ R \geq 5.7 \\ F \leq 14 \end{cases} \end{aligned}$$

使用历史数据辨识  $x_{D,2}$  与  $F$ 、 $R$  之间的 T-S 模型。辨识结果显示该模型可由 15 条模糊规则表示,其中输出变量集定义为  $x_{D,2} = [x_{D,2}1, x_{D,2}2, \dots, x_{D,2}15]$ 。输入变量的模糊子集分别定义为  $F = [F1, F2, \dots, F15]$  和  $R = [R1, R2, \dots, R15]$ ,隶属函数分别如图 4 和图 5 所示。

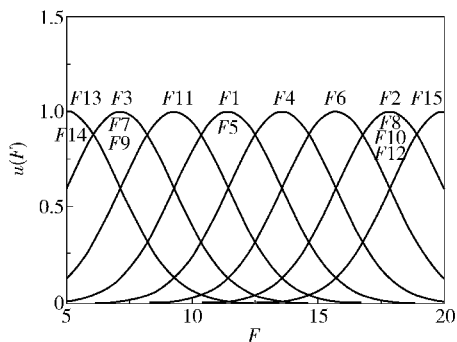


图 4 输入变量  $F$  的隶属函数

Fig. 4 Membership function of the input variable  $F$

表 1 给出辨识得到的部分模糊规则。

将辨识得到的模糊系统当做约束项添加到数学规划中,使用含有模糊推理的遗传算法求解得到的结果如表 2 所示。

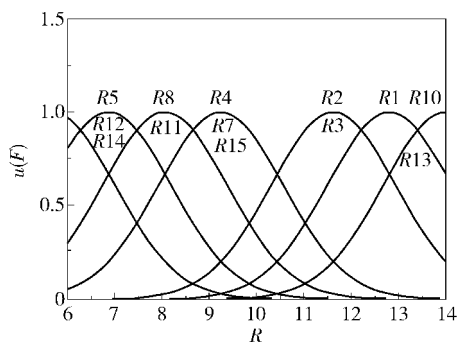


图 5 输入变量  $R$  的隶属函数

Fig. 5 Membership function of the input variable  $R$

表 1 部分模糊规则

Table 1 Part of the fuzzy rules

序号	规则前件	规则后件
1	$F = F1, R = R1$	$x_{D,2}1 = 0.9885 + 0.000857F1 - 0.0001142R1$
2	$F = F2, R = R2$	$x_{D,2}2 = 0.9163 + 0.007151F2 - 0.0001599R2$
3	$F = F3, R = R3$	$x_{D,2}3 = 0.9633 + 0.003215F3 - 0.0005578R3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$F = F15, R = R15$	$x_{D,2}15 = 0.9732 + 0.007968F15 - 0.0002949R15$

表 2 最优精馏塔操作条件

Table 2 Optimal set points of the distillation column

$f/\%$	$R$	$F$	$x_{D,2}$
87.6	8.54	12.0282	0.98

将所得操作条件带入精馏塔模型,可以看出数学规划的解符合各项约束要求,且具有较高的产率,表明本文所提出的数学规划方法是可行和有效的。

## 4 结束语

对于难以建立对象机理模型的数学规划问题,可以利用历史数据,使用模糊变量以规则的形式描述变量间的关系,建立含有规则约束的数学规划模型,并使用含有模糊推理的遗传算法对其求解。将该算法应用到一个精馏塔稳态操作优化的实例中,所得操作条件能够在满足各项约束的前提下得到较高的产率。在后续工作中将进一步研究模糊规则的可靠性,并期望提出对不可靠规则进行修正的方法。

## 参考文献:

- [1] Bellman R E, Zadeh L A. Decision making in a fuzzy en-



- vironment[J]. Management Science, 1970, 17(4): 141–164.
- [2] Tanaka H, Okuda T, Asai K. On fuzzy-mathematical programming[J]. Journal of Cybernetic, 1973, 3: 37–46.
- [3] Liang T F. Applying fuzzy goal programming to project management decisions with multiple goals in uncertain environments[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37: 8499–8507.
- [4] Arikan F, Güngör Z. A two-phase approach for multi-objective programming problems with fuzzy coefficients [J]. Information Sciences, 2007, 177: 5191–5202.
- [5] Carlsson C, Fullér R. Optimization under fuzzy if-then rules[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119: 111–120.
- [6] de Souza A A A, de Oliveira C C B, de Geus K. Optimization of capacitor allocation for operational planning of distribution networks using linear programming and Mamdani fuzzy inference system[C]//10th International Conference on Environment and Electrical Engineering, Rome, Italy, 2011: 1–4.
- [7] 钟飞, 钟毓宁. Mamdani 与 Sugeno 型模糊推理的应用研究[J]. 湖北工业大学学报, 2005, 20(2): 28–30.
- Zhong F, Zhong Y N. The application research on Mamdani and Sugeno style fuzzy inference[J]. Journal of HuBei University of Technology, 2005, 20(2): 28–30. (in Chinese)
- [8] 蒋强, 肖建, 何都益, 等. 基于 T-S 模型的模糊系统辨识方法综述[J]. 计算机应用研究, 2009, 26(6): 2008–2012.
- Jiang Q, Xiao J, He D Y, et al. Overview of methods of fuzzy system identification on T-S model[J]. Application Research of Computers, 2009, 26(6): 2008–2012. (in Chinese)
- [9] 朱吉航. 基于 T-S 模型的模糊预测控制研究[D]. 北京: 北京化工大学, 2011: 12–17.
- Zhu J H. Studies on T-S model based fuzzy predictive control [D]. Beijing: Beijing University of Chemical Technology, 2011: 12–17. (in Chinese)
- [10] 李盼盼. 基于 T-S 模型的非线性系统模糊辨识方法研究[D]. 江苏, 镇江: 江苏大学, 2008: 26–30.
- Li P P. Studies on nonlinear system fuzzy identification based on T-S model[D]. Zhenjiang, Jiangsu: Jiangsu University, 2008: 26–30. (in Chinese)
- [11] 余明升, 谷秀平. 基于 PSO 的精馏塔稳态优化[J]. 化学工程与装备, 2010(5): 44–47.
- Yu M S, Gu X P. The steady-state optimization of distillation column based on PSO[J]. Chemical Engineering & Equipment, 2010(5): 44–47. (in Chinese)

## An approach for mathematical programming with fuzzy rules and its engineering applications

XI YongSheng LIU ZhenJuan LI HongGuang

(College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** This paper suggests that fuzzy rules can be extracted from historical data to construct a rule base, and subsequently be used to formulate a mathematical programming model with fuzzy rule constraints. Sugeno inference arithmetic is recommended to establish fuzzy mapping systems in the context of decision variables, which serve as equality constraints of the mathematical programming. Subsequently, a genetic algorithm combined with fuzzy inference is introduced to solve the corresponding problems. The resulting mathematical programming model with fuzzy rules has been applied in a distillation column steady-state optimization problem, and the effectiveness of the proposed approach has been demonstrated.

**Key words:** mathematical programming; rule constraints; fuzzy inference; distillation column steady-state optimization