

# 离散障碍期权定价的蒙特卡罗模拟

徐腾飞 曹小龙 胡云姣\*  
(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

**摘 要:** 利用蒙特卡罗模拟方法对离散障碍期权进行定价,并结合对偶抽样、条件期望、重要性抽样 3 种方差缩减技术降低模拟方差。设计数值实验针对离散障碍期权进行定价分析,比较了各种模拟方法的方差缩减效率。结果表明利用对偶抽样、条件期望、重要性抽样 3 种方差缩减技术的蒙特卡罗模拟方法能够对离散障碍期权进行稳定的定价。

**关键词:** 蒙特卡罗方法; 离散障碍期权; 条件期望; 重要性抽样

**中图分类号:** F830

## 引 言

障碍期权是指期权生效或者失效依赖于期权到期前是否穿过障碍值的期权。障碍期权是十分常见的期权,对障碍期权的定价问题是期权定价中的重要问题之一。

目前对于离散障碍期权的定价方法有很多,其中数值分析方法主要有网格分析方法<sup>[1]</sup>,有限差分方法<sup>[2]</sup>和蒙特卡罗模拟方法<sup>[3]</sup>等。蒙特卡罗模拟方法是以概率统计理论、方法为基础的随机方法,依赖电子计算机实现统计模拟或抽样。随着计算机硬件性能的飞速提高,计算机能够进行大规模的抽样与计算,蒙特卡罗模拟方法也得到越来越多的应用<sup>[4]</sup>。蒙特卡罗模拟方法具有较大的波动性,为了在不大幅增加模拟路径的基础上减小模拟的误差,需要采用方差缩减技术来对模拟路径进行改进<sup>[5]</sup>。

本文在已有研究的基础上<sup>[6]</sup>,对蒙特卡罗模拟方差缩减技术进行了改进并应用于离散障碍期权的定价当中。最后的实例分析结果表明,改进后的蒙特卡罗模拟方法能够对离散障碍期权进行稳定的定价。

## 1 离散障碍期权定价

在风险中性环境中,股票的价格遵循运动公式

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW \quad (1)$$

其中  $dW$  为标准布朗运动, $r$  为在风险中性世界的收益率, $\sigma$  为波动率, $S(t)$  为标的股票在  $t$  时刻的价格。依照伊藤定理有

$$d\ln S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

离散化可以得到

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \zeta \sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

$\zeta$  为服从标准正态分布的随机变量,式(2)等价于

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \zeta \sqrt{T} \quad (3)$$

利用蒙特卡罗方法对标的股票价格路径进行模拟,对标的股票价值进行折现便可得到相应的期权价值。

## 2 方差缩减技术

### 2.1 条件期望技术

考虑下降敲入欧式看涨期权,其标的股票的价格记为  $S(t)$ 。在离散时间  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$  观察并记录标的股票的价格。障碍期权的价格记为  $H$ ,执行价格记为  $K$ ,有效期为  $T$ 。当标的股票的价格越过障碍值时,下降敲入欧式看涨期权生效,期权变为一个普通的欧式看涨期权。假设  $S(0) > H$ ,股票价格越过障碍值的时间是  $t_\tau$ , $\tau$  是一个非负随机变量。

下降敲入欧式看涨期权在时间  $T$  的收益是乘积

$$f(\tau < m)(S(T) - K, 0)^+ \quad (4)$$

收稿日期: 2012-11-19

第一作者: 男,1988 年生,硕士生

\* 通讯联系人

E-mail: huyj@mail.buct.edu.cn

$f(\cdot)$  为指标函数,  $(x, y)^+$  代表  $x$  和  $y$  中的最大值。期权在 0 时刻的价格是期望收益的贴现值

$$I = E[e^{-rT} 1(\tau < m) (S(T) - K, 0)^+] \quad (5)$$

普通蒙特卡罗方法通过模拟  $N$  条股票价格路径来估计  $I$ , 对式(6)取均值

$$\begin{cases} (S(T) - K, 0)^+ & \text{如果 } \tau < m \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (6)$$

通过乘  $e^{-rT}$  把均值贴现即得期权价值的一个无偏估计。

假设标的股票价格  $S(t)$  呈对数正态分布, 股票价格越过障碍值时, 可以用 Black-Scholes-Merton 公式对期权进行定价。根据不同的  $\tau$  得到期望(5)和  $S(t_\tau)$ , 并且考虑  $\tau < m$  的情况

$$E[(S(T) - K, 0)^+] = E[E[(S(T) - K, 0)^+ | \tau, S(t_\tau)]] \quad (7)$$

假设  $S(t)$  为对数正态模型, 得到

$$E[(S(T) - K, 0)^+ | \tau = k, S(t_\tau)] = E[(S(T) - K, 0)^+ | S(t_k)] = e^{r(T-t_k)} B(S(t_k), t_k, T)$$

$B(S(t_k), t_k, T)$  是 Black-Scholes-Merton 公式对欧式看涨期权在时间  $t_k$  的定价, 初始股票价格为  $S(t_k)$ , 到期时间为  $T$

$$B(S(t_k), t_k, T) = E[e^{-r(T-t_k)} (S(T) - K)^+ | S(t_k) = S] = S\phi(d_1) - Ke^{-r(T-t_k)} \phi(d_2)$$

其中  $\phi$  为正态分布变量的累积概率分布函数,  $d_1 =$

$$d_2 + \sigma \sqrt{T-t_k} = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t_k)}{\sigma \sqrt{T-t_k}}$$

式(7)右端的内部期望是

$$E[(S(T) - K, 0)^+ | \tau, S(t_\tau)] = e^{r(T-t_\tau)} B(S(t_\tau), t_\tau, T)$$

故式(7)可以简化为

$$E[(S(T) - K, 0)^+] = E[e^{r(T-t_\tau)} B(S(t_\tau), t_\tau, T)]$$

利用条件蒙特卡罗估计模拟  $N$  条路径, 对式(8)取均值

$$\begin{cases} e^{r(T-t_k)} B(S(t_k), t_k, T) & \text{如果 } \tau = k < m \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (8)$$

把均值乘  $e^{-rT}$  贴现, 即得到期权价值  $I$  的一个无偏估计。得到的估计期权价值为

$$e^{-rT} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{r(T-t_\tau)} B(S^{(i)}(t_\tau), t_\tau, T) f(\tau < m) \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-rT} B(S^{(i)}(t_\tau), t_\tau, T) f(\tau < m) \quad (9)$$

其中  $S^{(i)}$  是第  $i$  条股票价格路径,  $S^{(i)}(t_\tau)$  是在股票价格路径穿过障碍时刻记录的股票价格。

## 2.2 重要性抽样技术(IS)

考虑式(10)形式的股票价格模型

$$S(t_n) = S(0) \exp(L_n) \quad (10)$$

其中  $L_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_1, X_2, \dots$  是独立同分布的随机变量, 密度函数为  $f(x)$ ,  $L_0 = 0$ 。重要性抽样技术利用与原密度函数不同的密度函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  模拟股票价格路径。  $X_1, \dots, X_\tau$  由  $f_1(x)$  模拟,  $X_{\tau+1}, \dots, X_m$  由  $f_2(x)$  模拟<sup>[7]</sup>。在密度函数  $f_1$  和  $f_2$  下,  $X_i$  仍保持独立。

$$\tilde{E} \left[ h(S(t_1), \dots, S(t_m)) \prod_{i=1}^{\tau} \frac{f(X_i)}{f_1(X_i)} \prod_{i=\tau+1}^m \frac{f(X_i)}{f_2(X_i)} \right] = E[h(S(t_1), \dots, S(t_m))] \quad (11)$$

式(11)左端期望值的计算在密度函数  $f_1$  和  $f_2$  所产生的新的概率测度下来进行。

本文采用指数扭曲的技术来进行计算<sup>[8]</sup>。选择密度函数  $f_1 \equiv f_{t^-}$  和  $f_2 \equiv f_{t^+}$ , 其中  $f_{t^-}(x) = e^{t^-x} f(x)/M(t^-)$ ,  $f_{t^+}(x) = e^{t^+x} f(x)/M(t^+)$ 。  $M(t)$  为密度函数  $f(x)$  的矩母函数, 式(11)中的似然函数可以简化为

$$\left( \frac{M(t^-)}{M(t^+)} \right)^\tau M(t^+)^m \exp((t^+ - t^-)L_\tau - t^+L_m) \quad (12)$$

参数  $t^-$  和  $t^+$  需要进行计算确定。假定股票价格呈对数正态分布, 并假定密度函数  $f(x)$  是均值为  $(r - \sigma^2/2)h$ , 方差为  $\sigma^2h$  的正态密度函数, 则根据启发式算法<sup>[9]</sup>可以得到如下  $t^-$  和  $t^+$  的解

$$t^- = \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) - \left( \frac{2b+c}{m\sigma^2h} \right)$$

$$t^+ = \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) + \left( \frac{2b+c}{m\sigma^2h} \right)$$

其中  $b = \log(S(0)/H)$ ,  $c = \log(K/S(0))$ 。似然比率(12)可以简化为

$$M(t^+)^m \exp((t^+ - t^-)L_\tau - t^+L_m) \quad (13)$$

利用蒙特卡罗重要性抽样技术模拟  $N$  条路径并对式(14)求均值

$$\begin{cases} M(t^+)^m \exp((t^+ - t^-)L_\tau - t^+L_m) (S(T) - K, 0)^+ & \text{如果 } t_\tau < T \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (14)$$

将均值乘  $e^{-rT}$  贴现, 便得到期权价值  $I$  无偏估计。

### 2.3 对偶抽样技术

对偶变量技术在每次模拟中令两个模拟过程同时进行:一个过程利用普通的蒙特卡罗方法进行模拟;另一个过程是对相应的对偶变量取随机样本进行模拟,最终结果取两个模拟结果的均值。

对于两个随机变量  $X_1$  和  $X_2$ , 考虑  $X = X_1 + X_2$  的方差

$$\sigma_{X_1+X_2}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + 2\rho_{X_1X_2}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}$$

如果  $X_1$  和  $X_2$  负相关, 则有  $\rho_{X_1X_2} < 0$ ,  $X$  的方差小于  $X_1$  和  $X_2$  相互独立时的方差。故对偶变量技术可以对方差进行缩减。

对偶变量技术容易实施, 但它有非常明显的缺点, 只有当随机变量的分布函数单调时, 才有明显的方差缩减。

### 2.4 矩匹配技术

期权定价中可以对股票价格路径的输入变量进行矩匹配, 也可以对基础资产进行矩匹配。本文采用对基础资产进行矩匹配的方法<sup>[10]</sup>。

采用经验鞅模拟方法<sup>[11]</sup>对股票价格  $S_i(T)$  做一定的变换, 变为  $\tilde{S}_i(T)$ 。

$$\tilde{S}_i(T) = S_i(T) (E[S(T)] / \bar{S}(T))$$

其中  $E[S(T)] = S(0)e^{rT}\bar{S}(T) = \left(\sum_{i=1}^n S_i(T)\right)/n$ ,

对  $\tilde{S}_i(T)$  进行模拟会得到更准确的结果。

## 3 复合蒙特卡罗模拟方法

本文用重要性抽样技术模拟标的股票价格穿过障碍值之前的价格路径, 当标的股票价格穿过障碍值时, 用条件期望技术计算期权的价格。模拟股票价格穿过障碍值之前股票的价格路径, 只需要确定一个扭动参数,  $t = t^-$ 。似然比率简化为

$$\frac{M(t)^{\tau}}{\exp(t(X_1 + \cdots + X_{\tau}))} = \frac{M(t)^{\tau}}{\exp(tL_{\tau})} \quad (15)$$

期权价格的估计由式(16)给出

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-r\tau} M(t)^{\tau} \exp(-tL_{\tau}) B(S^{(i)}(t_{\tau}), t_{\tau}, T)$$

$$1(\tau < m) \quad (16)$$

其中  $S^{(i)}$  是第  $i$  条股票价格路径。

假设标的股票价格服从对数正态分布, 密度函数为  $f$ , 均值为  $(r - \sigma^2/2)h$ , 方差为  $\sigma^2h$ 。则  $f_i$  是正态密度函数, 均值是  $(r - \sigma^2/2)h - b$ , 方差是  $\sigma^2h$ , 其中  $b = -\sigma^2ht$ 。可以利用启发式算法计算  $t$ , 最后可得

$$b = (r - \sigma^2/2)h +$$

$$\frac{2\log(S(0)/H) + \log(K/S(0))}{m}$$

为了进一步提高方差缩减效率, 本文在条件期望技术与重要性抽样技术结合的基础上进行了扩展, 分别与矩匹配技术以及对偶抽样技术进行了结合, 得到了新的蒙特卡罗模拟方法。通过 Matlab 编程实现了其对离散障碍期权的定价, 并进行了实例计算以分析方差缩减效率。

## 4 计算实例

以下降敲入欧式看涨障碍期权为例, 分别利用普通蒙特卡罗方法、条件期望蒙特卡罗方法、重要性抽样蒙特卡罗方法、基于条件期望和重要性抽样的蒙特卡罗方法对期权价格进行模拟, 并与期权价格的解析解做比较, 分析各种模拟方法的误差和方差缩减效果。

给定期权参数为  $\sigma = 0.15$ ,  $r = 0.05$ ,  $S(0) = 95$ ,  $T = 1$ ,  $m = 50$ , 取 1000 条模拟路径, 在不同的障碍值和不同的敲定价格的情况下, 分别利用单一蒙特卡罗模拟方法和复合蒙特卡罗模拟方法对离散障碍期权的价格进行模拟, 并计算模拟方差。

表 1 和表 2 给出了离散障碍期权的模拟价格以及理论价格。由表 1 和表 2 可以看出蒙特卡罗模拟方法对离散障碍期权定价的准确度较高, 模拟价格与理论价格的误差在 15% 以下。

表 1 单一蒙特卡罗方法模拟期权价格

Table 1 The simulated prices given by the single Monte Carlo method

障碍值/ 美元	敲定价 格/美元	期权价格/美元				
		理论值	重要性 抽样	条件 期望	对偶 变量	矩匹配
92	100	2.6931	2.6331	2.4376	2.5187	2.6894
92	105	1.6257	1.4350	1.5339	1.4853	1.6119
88	96	1.2863	1.5575	1.0513	1.2177	1.2984
85	90	1.0092	1.0259	0.9044	0.8936	1.0494
85	105	0.1217	0.1047	0.1123	0.0874	0.1189

表 3 和表 4 分别给出了离散障碍期权在单一蒙特卡罗方法和复合蒙特卡罗方法模拟下的方差。表 5 给出了各种模拟方法的方差缩减比率, 能够直观的比较各种蒙特卡罗模拟方法的方差缩减效果。由表 3、4 和 5 可以看出, 采用了方差缩减技术之后, 离

散障碍期权的模拟方差都得到了一定程度的缩减,并且采用多种方差缩减技术的方差缩减比率更大,方差缩减效果更好。从方差缩减比率的均值来看,方差缩减程度最高的是采用了重要性抽样、条件抽样和对偶抽样的复合蒙特卡罗方法。

表2 复合蒙特卡罗方法模拟价格

Table 2 The simulated prices given by the composite Monte Carlo method

障碍值/ 美元	敲定 价格/美元	期权价格/美元		
		IS& 条件 期望	IS& 条件期望 & 对偶变量	IS& 条件期望 & 矩匹配
92	100	2.2544	2.4837	2.4371
92	105	1.5761	1.4412	1.6733
88	96	1.1549	1.1417	1.1190
85	90	0.8320	0.8759	1.0022
85	105	0.1411	0.1092	0.1398

表3 单一蒙特卡罗方法模拟方差

Table 3 The simulated variances given by the single Monte Carlo method

障碍值/ 美元	敲定价 格/美元	模拟方差				
		无方差 缩减	IS	条件 期望	对偶 变量	矩匹配
92	100	26.7961	10.9274	2.2244	12.831	47.7533
92	105	16.4048	2.7613	0.857	7.3418	29.3618
88	96	12.0961	2.2785	1.4195	7.1272	16.9229
85	90	8.5357	1.2593	1.4718	4.1122	15.3125
85	105	0.6134	0.0148	0.0302	0.4378	1.1803

表5 蒙特卡罗模拟方法方差缩减比率比较

Table 5 Comparison of the variance reduction ratios

障碍值/ 美元	敲定价格/ 美元	方差缩减比率					
		重要性抽样	条件期望	IS& 条件期望	对偶变量	IS& 条件期望 & 对偶	IS& 条件期望 & 矩匹配
92	100	2.45	12.05	9.49	2.09	58.76	9.47
92	105	5.94	19.14	9.36	2.23	104.42	33.75
88	96	5.31	8.52	8.80	1.70	35.30	9.24
85	90	6.78	5.80	11.28	2.08	16.97	11.01
85	105	41.45	20.31	6.84	1.40	51.55	6.62

#### 参考文献:

- [1] 连颖颖, 张铁. 期权定价新型二叉树参数模型的构造[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(5): 15-19.  
Lian Y Y, Zhang T. Constructing a New Binomial Parameter Model for Option Pricing[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(5): 15-19. (in Chinese)
- [2] 邢丽. 有限差分方法在股票期权定价中的应用[J]. 科学技术与工程, 2007, 7(19): 5192-5195.

表4 复合蒙特卡罗方法模拟方差

Table 4 The simulated variances given by the composite Monte Carlo method

障碍值/ 美元	敲定价 格/美元	模拟方差		
		IS& 条件 期望	IS& 条件期望 & 对偶变量	IS& 条件期 望 & 矩匹配
92	100	2.8249	0.4560	2.8293
92	105	1.7525	0.1571	0.4861
88	96	1.3742	0.3427	1.3098
85	90	0.7565	0.5030	0.7753
85	105	0.0897	0.0119	0.0927

## 5 结束语

本文将蒙特卡罗模拟方法应用于离散障碍期权的定价,在已有的矩匹配、条件期望、对偶抽样和重要性抽样的方差缩减技术的基础上,实现了对偶抽样、条件期望和重要性抽样3种技术的结合以及矩匹配技术、条件期望和重要性抽样3种技术的结合。数值算例结果表明,所提出的复合方差缩减技术能够得到更好的方差缩减效果,其中对偶抽样、条件期望和重要性抽样技术结合方差缩减效果最好。进一步研究的内容包括如何对复合方差缩减技术中的重要性抽样密度函数进行选取,以及如何在本文提出的方法基础上结合其他方差缩减技术。

- Xing L. Application of Finite Difference Methods in the Stock Option Pricing[J]. Science Technology and Engineering, 2007, 7(19): 5192-5195. (in Chinese)
- [3] Barraquand J. Numerical valuation of high dimensional multivariate european securities[J]. Management Science, 1995(41): 1882-1891.
- [4] Carole B, Phelim B. Monte Carlo methods for pricing discrete Parisian options[J]. The European Journal of Fi-

- nance, 2011, 17(3): 169–196.
- [5] 向文彬, 向开理. 蒙特卡罗模拟方法在期权定价中的应用[J]. 西南金融, 2008(5): 61–62.
- Xiang W B, Xiang K L. The applications of Monte Carlo simulation in option pricing [J]. Southwest Finance, 2008(5): 61–62. (in Chinese)
- [6] 陈辉. 期权定价的蒙特卡罗模拟方差缩减技术研究[J]. 统计与信息论坛, 2008, 23(7): 86–96.
- Chen H. Variance reduction techniques of Monte Carlo simulation methods in options pricing[J]. Statistic & Information Forum, 2008, 23(7): 86–96. (in Chinese)
- [7] Neddermeyer J C. Non-parametric partial importance sampling for financial derivative pricing[J]. Quantitative Finance, 2011, 11(8): 1193–1206.
- [8] Owen A, Zhou Y. Safe and effective importance sampling [R]//Technique Report, Stanford, US: Stanford University Press, 1998: 210–242.
- [9] Giray Ö, Emmanuel S, Ahmet G. On pricing discrete barrier options using conditional expectation and importance sampling Monte Carlo[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008(47): 484–494.
- [10] Boyle P, Broadie M, Glasserman P. Monte Carlo methods for security pricing[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997(21): 1267–1321.
- [11] Duan J C, Simonato J G. Empirical martingale simulation for asset prices [J]. Management Science, 1998, 44(9): 1218–1233.

## On pricing discrete barrier options using the Monte Carlo method

XU TengFei CAO XiaoLong HU YunJiao

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** The Monte Carlo method has been applied in pricing discrete barrier options and a variety of variance reduction techniques have been used. The dual sampling method, conditional expectation method and importance sampling method have been combined in order to price the discrete barrier options. Furthermore, a numerical example is given to analyze the variance reduction efficiency of the different kinds of variance reduction techniques. The result shows that the method combining dual sampling, conditional expectation and importance sampling gives a robust price for discrete barrier options.

**Key words:** Monte Carlo method; discrete barrier options; conditional expectation; importance sampling