

# 双螺杆曲面外形重建

李小华 刘 慧\*

(北京化工大学理学院, 北京 100029)

**摘 要:** 利用端面曲线进行螺旋式旋转是构造双螺杆的典型方法。采用双三次 Bezier 曲面进行双螺杆曲面外形的重建, 为利用计算机辅助制造 (CAM) 提供了好的理论依据。同时在造型过程中, 提出了一种对于旋转曲面重建时数据点的提取和预处理方法, 误差分析结果表明这种数据处理方法适用于一般旋转曲面重建过程。

**关键词:** 端面曲线; Bezier 曲面; 重建; 旋转曲面

**中图分类号:** TP391

传统的双螺杆曲面造型一般是基于双螺杆端面曲线旋转而生成, 由于端面曲线数学模型的复杂性<sup>[1-2]</sup>, 致使给后面的加工和流场分析都带来一定程度的困难, 并且运算量较大, 当旋转的次数较少时, 生成的双螺杆曲面真实感较差。

根据给定型值点构造插值曲面是计算机辅助设计/计算机辅助制造 (CAD/CAM) 的重要技术之一, 在自由曲线曲面造型中 Bezier 曲线曲面具有重要的地位和广泛的应用<sup>[3]</sup>, 适合于插值和逼近各种类型的复杂曲面。本文利用双三次 Bezier 曲面对双螺杆曲面进行重新造型。首先在螺杆端面曲线上按照一定原则取定型值点, 后将端面曲线作三维旋转获得空间曲面的型值点; 根据端面曲线的特点将曲面型值点分组构成分片 Bezier 曲面<sup>[4-5]</sup>的型值点; 通过反求控制顶点求出分片曲面的控制顶点; 再由控制顶点生成 Bezier 曲面。此后将重建的螺杆曲面与原曲面进行误差分析, 获得了较理想的结果。

## 1 基于最小二乘法的 Bezier 曲面生成

通过双螺杆端面曲线螺旋运动得到型值点阵  $p_{ij} (i=0, 1, \dots, r, j=0, 1, \dots, s)$ , 反算出最接近于所有型值点的  $3 \times 3$  次 Bezier 曲面片的控制顶点, 从而生成 Bezier 曲面。

### 1.1 型值点的获取与预处理

由于双螺杆曲面可以由端面曲线三维螺旋运动生成, 鉴于这一性质, 可以在端面曲线上提取需要的

型值点, 然后旋转获得空间的曲面型值点。

居于双螺杆复杂的端面曲线, 分段获取端面曲线的型值点。根据各段的拟合精度要求, 取定端面曲线上的型值点列; 如图 1 所示, 对二头同向同速的

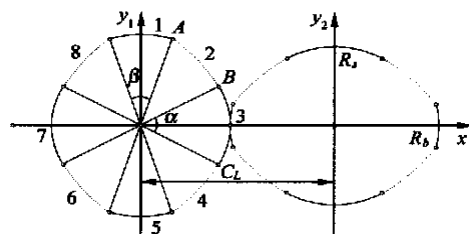


图 1 常规双螺杆端面曲线

Fig. 1 Cross section curve of a common twin screw

常规双螺杆端面曲线, 将其分成八段, 对每段取定  $r \times n + 1$  个型值点, 将取定的这些点按双螺杆的旋转方向 (定为  $u$  向) 依次排列, 然后将排列好的型值点按双螺杆的挤出方向 (定为  $v$  向) 作  $s \times m + 1$  次螺旋旋转, 这样端面曲线上每一个点对应得到  $s \times m + 1$  个点; 其次对这  $s \times m + 1$  个点按  $v$  向依次排列, 从而得到了  $(r \times n + 1) \times (s \times m + 1)$  个型值点。

例如, 对图 1 中第 2 段  $AB$  满足极坐标方程

$$\begin{aligned} \left( \begin{matrix} i \\ 2 \end{matrix} \right) &= -R_b \cos \left( \begin{matrix} i \\ 2 \end{matrix} - \frac{\pi}{2} \right) + \\ &\sqrt{C_L^2 - R_s^2 \sin^2 \left( \begin{matrix} i \\ 2 \end{matrix} - \frac{\pi}{2} \right)} \\ &\frac{\pi}{2} - \begin{matrix} i \\ 2 \end{matrix} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

处理过程如下

首先在区间  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right]$  上均匀取定  $r \times n + 1$  个参数值

$$i = \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] \times i / (r \times n) + \frac{\pi}{2}$$

收稿日期: 2004-03-09

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目 (02016)

第一作者: 男, 1979 年生, 硕士生

\*通讯联系人

E-mail: liuhui@mail.buct.edu.cn

$i = 0, 1, \dots, r \times n$ ,

得到  $xoy$  平面上  $r \times n$  个型值点

$$x_i = (i) \cos(i), y_i = (i) \sin(i),$$

$i = 0, 1, \dots, r \times n$

然后对这  $r \times n + 1$  个二维平面型值点作  $v$  向旋转  $s \times m + 1$  次, 获得三维空间  $(r \times n + 1) \times (s \times m + 1)$  个型值点, 且每个型值点满足三维数学模型

$$\begin{cases} x_{ij} = (i + j) \cos(i) \\ y_{ij} = (i + j) \sin(i) \\ z_{ij} = \frac{T}{2} j \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, r \times n \\ j = 0, 1, \dots, s \times m \end{matrix}$$

图 2 所示为一维(图 2a)、二维(图 2b)、三维(图

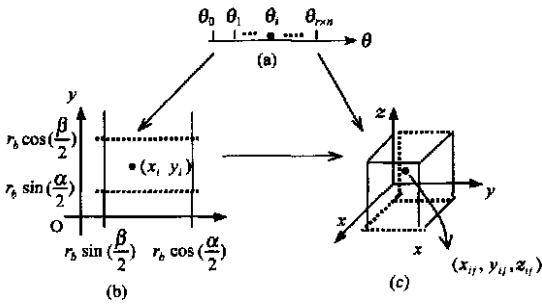


图 2 型值点的分布区间及其对应关系

Fig. 2 Distributional range and correspondence of data points  
2c) 坐标下的型值点的分布区间及其对应关系。图 3 所示为  $r = 3, n = 4, s = 3, m = 10$  时第二部分 AB 提

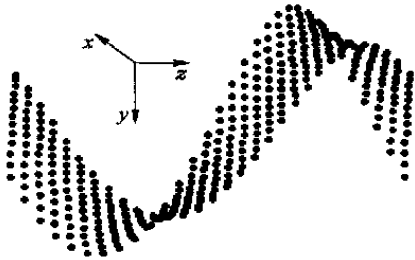


图 3 曲面的型值点排列

Fig. 3 Arrangement of surface data points

取的  $13 \times 13$  个空间曲面型值点的排列情况。为了获取 Bezier 曲面的型值点, 接下来需要对型值点进行分组; 沿  $u$  向每  $r + 1$  个、 $v$  向每  $s + 1$  个型值点作为重建曲面片的型值点, 这样就获取了  $n \times m$  个分片曲面各自的型值点。

如图 4 所示, 曲面片  $S_{kl}$  ( $k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m$ ) 由型值点  $p_{ij}$  ( $i = (k - 1) \times r + 1, \dots, k \times r + 1; j = (l - 1) \times s + 1, \dots, l \times s + 1$ ) 生成。对一般的旋转面, 例如  $xoy$  平面上的一曲线 ( $c: x = \phi(t), y = (t), - < t < )$  只要在此曲线上取定需要

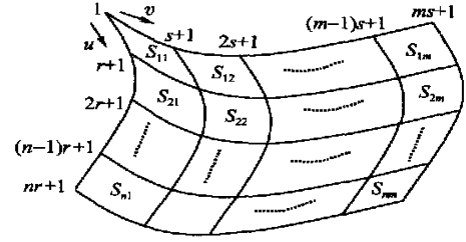


图 4 曲面片型值点分组图

Fig. 4 Grouping data points of surface pieces

的型值点, 应用类似的方法将其绕  $z$  轴旋转便可获得空间的型值点; 因此, 此类获取型值点的方法可应用于一般旋转曲面的重建。

## 1.2 型值点的弦长参数化

在完成了对型值点的分组预处理后, 继续对 1.1 步预处理后的  $n \times m$  个曲面片的型值点分片作 Bezier 曲面拟合。首先需要对型值点进行参数化, 型值点的参数值不受在参数平面上构成矩形网格的限制, 根据型值点在空间的分布情况, 确定采用双向规范积累弦长参数化, 这种参数化法能如实反映型值点按弦长的分布情况, 使得重建后的曲线曲面具有较好的光顺性<sup>[6]</sup>。

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i-1 & \left| \begin{matrix} 1,0 \\ p_{k,j} \end{matrix} \right| / \left| \begin{matrix} i-1 \\ 1,0 \end{matrix} \right| p_{k,j} \end{cases} \quad (1)$$

$$v_{ij} = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ j-1 & \left| \begin{matrix} 0,1 \\ p_{k,j} \end{matrix} \right| / \left| \begin{matrix} j-1 \\ 0,1 \end{matrix} \right| p_{i,k} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{其中} \begin{cases} 1,0 & p_{ij} = p_{i+1,j} - p_{ij} \\ 0,1 & p_{ij} = p_{i,j+1} - p_{ij} \end{cases}$$

如图 5 所示, 型值点  $p_{ij}$  的参数值  $u_{ij}$  与  $v_{ij}$  分别与该点在型值点阵中所在第  $j$  列与第  $i$  行型值点有关。

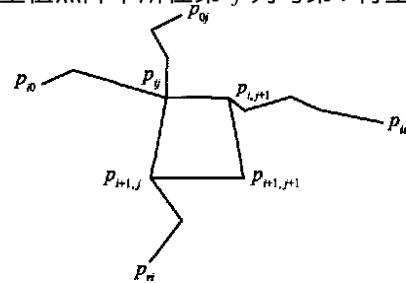


图 5 双向规范积累弦长参数化

Fig. 5 Bi-directional normalized parametrization by progressive length of chords

### 1.3 Bezier 曲面生成

用于逼近给定呈拓扑矩形阵列的型值点阵  $p_{ij}$  ( $i=0, 1, \dots, r; j=0, 1, \dots, s$ ) 三次曲面片可写为

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) \quad (3)$$

其中  $b_{ij}$  为曲面的控制顶点,  $B_{i,3}(t)$  为 3 次 Bernstein 基函数。

$$B_{i,3}(t) = \begin{cases} C_3^i t^i (1-t)^{3-i} & i=0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

将曲面定义域内的型值点代入方程, 应满足拟合条件, 从而得到由  $(r+1) \times (s+1)$  个矢量方程组成的矛盾方程组

$$p(u_{ij}, v_{ij}) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 b_{k,l} B_{k,3}(u_{ij}) B_{l,3}(v_{ij}) = p_{ij} \quad (4)$$

该方程组是  $(3+1) \times (3+1)$  个未知 Bezier 网格顶点的超静定方程组, 应用最小二乘法来解方程组, 可求出双三次参数 Bezier 曲面片的未知控制顶点  $b_{k,l}$  ( $k=0, 1, 2, 3; l=0, 1, 2, 3$ )。

由 (3) 式知, 过型值点  $p_{ij}$  ( $i=0, 1, \dots, r; j=0, 1, \dots, s$ ) 的双三次参数 Bezier 曲面片<sup>[6]</sup>便形成了。

## 2 结果与误差分析

为验证该方法的有效性和重建的效果, 采用空间中法向求交的方法寻找原曲面点在重建曲面的对应点, 然后将原始点与重建曲面对应点之间的  $F$  范数<sup>[7]</sup>作为误差的衡量标准。该方法的具体做法为: 设双螺杆端面曲线的极坐标方程为  $(r, \theta)$ , 将端面曲线  $(r, \theta)$  绕  $z$  轴作平面转动的同时沿  $z$  轴匀速移动, 从而便形成了螺旋面。当端面曲线沿  $z$  轴从 0 到  $T$  (导程) 变化时, 端面曲线绕中心旋转一周。对不同的  $z \in [0, T]$ , 端面曲线处于不同位置, 这样就得到了任意位置时端面曲线的数学模型; 在直角坐标系下表示三维立体图形 (螺旋面) 其数学模型

$$\begin{cases} x = (r, \theta) \cos \theta \\ y = (r, \theta) \sin \theta \\ z = \frac{T}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} [0, 2\pi] \text{ 为极角} \\ [0, 2\pi] \text{ 为旋转角} \end{matrix}$$

任取螺旋曲面上点  $p_0(x_0(0, 0), y_0(0, 0), z_0(0, 0))$ , 则该点的法线方程为

$$\begin{vmatrix} X - x_0(0, 0) \\ y(0, 0) & z(0, 0) \\ y(0, 0) & z(0, 0) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} Y - y_0(0, 0) \\ z(0, 0) & x(0, 0) \\ z(0, 0) & x(0, 0) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} Z - z_0(0, 0) \\ x(0, 0) & y(0, 0) \\ x(0, 0) & y(0, 0) \end{vmatrix}$$

将该法线方程和拟合曲面方程 (3) 联立方程组, 从而得到法线与重建曲面的交点  $p(x_0, y_0, z_0)$ 。依据向量  $F$  范数定义得到取定的原始点处的误差

$$f_{\text{error}}(p_0) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 + (z_0 - z_0)^2}$$

为了更形象地表示出各点的误差分布情况, 建立了原曲面上任意点  $p(\cdot, \cdot)$   $f_{\text{error}}(p)$  的误差函数, 进而绘制出误差图像。图 6 所示图 6 为导程  $T=60 \text{ mm}$ ,  $R_s=14 \text{ mm}$ ,  $R_b=20 \text{ mm}$  的误差图像, 从图可以看出应用基于最小二乘法的双三次 Bezier 方法重建出来的螺杆曲面的精度较高, 误差最大值为  $0.09897 \text{ mm}$ , 绝大多数点的误差都趋于 0。这表明本文提供的算法对此类问题是有效的。

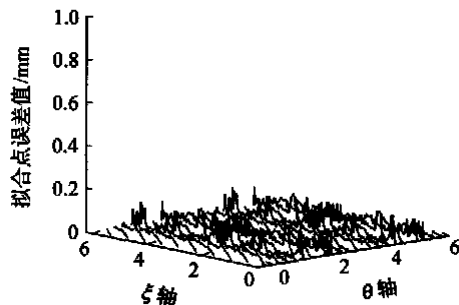


图 6  $r=3, s=5$  情况下的误差图像

Fig. 6 Error figure under  $r=3$  and  $s=3$

## 3 结论

本文提出的基于双三次 Bezier 曲面的分片拟合螺杆曲面的重建方法, 是基于双螺杆形成过程的机理的一种新的螺杆外形设计方法, 这种方法在保证要求的精度下能有效地重建出螺杆曲面, 并且所需型值点阵较少, 重建出的螺杆具有较好的真实感。该方法还可以应用推广到任意螺旋曲面的重建中。

### 参 考 文 献

- [1] 刘 慧, 曹达鹏, 欧志英. 异向双螺杆挤出啮合原理及计算机辅助设计 (CAD) [J]. 中国塑料, 1998, 10(1): 91-96
- [2] 耿孝正. 双螺杆挤出机及其应用 [M]. 北京: 中国轻工业出版社, 2003, 42-65

(下转第 94 页)

大小上有 1~2 个像素的偏差,证明用最佳椭圆线法重建多圆图像是可行的。

### 参 考 文 献

- [1] Wang S, liu B, Kulkarni S R. Model-based reconstruction of multiple circular and elliptical objects from a Limited Number of Projection[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 5(9):1386 - 1392
- [2] Barrett H H, Swindell W. Radiological imaging: The theory of imaging formation detection and processing [M]. New York: Academic Press, 1981
- [3] Herman G T. Image reconstruction from projection: the fundamentals of computerized tomography [M]. New York: Academic Press, 1980
- [4] 王一多. 快速滤波反投影算法研究[D]. [硕士学位论文]. 吉林: 吉林大学, 2002
- [5] 温俊海, 卜凡亮, 程敬之. 有限角投影下的快速重建算法[J]. 西安交通大学学报, 2001, 34(4): 33-36

## Reconstruction of a multi-circles image by optimal-ellipse-curves

Wang Yi-duo Zhang Yan

(1. College of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;

2. College of Science, Yan Shan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** By analysing the Radon-transform of multi-circles image, a new algorithm called optimal-ellipse-curve for reconstructing multi-circles image was proposed. Theoretically, the new algorithm only needs two angle's projection data. In addition, an example of multi-circles image with five different circles and the reconstructed result have proved the validity of the new algorithm.

**Key words:** Radon-transform; multi-circles image; optimal-ellipse-curve

(责任编辑 曾宪玉)

(上接第 90 页)

- [3] 杨勋年. 基于几何逼近的曲线曲面造型技术研究[D]. [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 1998
- [4] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, *et al.* Piecewise smooth surface reconstruction[C]. Proceedings of SIGGRAPH '94, ACM-SIGGRAPH. Orlando Florida: Lynn Finch, 1994, 295 - 302
- [5] Peter Cominos. An interpolating piecewise bicubic surface with shape parameters[J]. Computers & Graphics, 2001, 25: 463 - 481
- [6] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001, 143 - 162
- [7] 戈卢布·G·H, 范洛恩·C·F. 矩阵计算[M]. 北京: 科学出版社, 2001, 61 - 65

## Shape reconstruction of twin-screw surfaces

Li Xiao-hua Liu Hui

(College of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** Rotating of a cross-section curve is a typical method for constructing a twin-screw. A method for reconstructing a shape of twin-screw with a bicubic Bezier surface was proposed, which offers better theoretical foundations for CAM. Besides, a method was presented for abstracting and pre-processing of data points while modeling. The result of error analysis shows the method is suitable for reconstruction of the general screw surfaces.

**Key words:** cross-section curve; Bezier surface; reconstruction; screw surface

(责任编辑 曾宪玉)