

公交车发车间隔与排队长度的研究

Robert S TOWEH 李志强*

(北京化工大学理学院, 北京 100029)

摘要: 对于确定的行车路线, 利用随机变量描述公交线路中的行车时间, 需要进一步考虑的问题是利用随机过程的知识建立乘客的排队模型, 各个站点的队长可用泊松过程在相继到达车辆的时间间隔上的增量来描述。在不同的发车间隔假定下, 考虑每个站点在相继到达的车辆间隔内, 平均排队长度与发车间隔的关系。

关键词: 平均行车时间; 排队模型; 发车间隔; 平均队长; 全数学期望公式

中图分类号: O211.6

引言

公交线路发车间隔的取值直接影响到公交企业的服务质量和经济效益。发车间隔过短, 会导致公交车运力资源浪费, 不利于公交企业经济效益的提高; 发车间隔过长, 又会导致车内过于拥挤服务水平差。因此讨论发车间隔与队长的关系有重要意义。有许多文献讨论公交车发车间隔的确定, 如文献[1-4]在不同的排队模型下研究了利用平均排队长度确定最优发车间隔的方法。但这些文献中, 通常假定站点间的行车时间是确定的, 且乘客是按照确定的速率来到并排队等候。而实际情况是站点间的行车时间是随机变化的, 而乘客的到来与排队长度也是随机变化的, 可用随机过程来描述。

发车间隔与平均排队长度的关系曲线在最优发车间隔的决定中起着绝对重要的作用。当各站点间的行车时间假定为确定值时, 若乘客是按照确定的速率来到并排队等候, 则排队长度与发车间隔呈正比; 进一步, 若各站点间的行车时间为确定值, 而乘客的到达服从泊松随机过程, 则在平均意义下, 排队长度与发车间隔呈正比^[1]。但当站点间的行车时间是随机变化时, 平均排队长度与发车间隔的关系曲线无法从常用的排队模型的结论中直接得到。因此本文在行车时间和乘客的到来都是随机变化的假定下, 得到的研究结果更符合实际。

1 基本假定

本文以概率统计和随机过程的知识为基础, 分别在发车间隔为确定值和随机变量的情况下, 研究每个站点上乘客的平均队长与发车间隔的关系。假定对给定的有 n 个站点公交车行车路线, 任意两个站点之间的行车时间相互独立并服从正态分布: $T_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 其中 T_i 表示从第 $i-1$ 个站点到第 i 个站点的行车时间。公共汽车公司要考虑的问题是公交车发车间隔与各站点排队队长之间的关系, 以进一步确定发车间隔。

不妨设各站点的乘客到达数 $\{X_i(t), t > 0\}$ 分别服从均值为 λ_i 的泊松过程, 若相继两辆车的到达时间差为 T , 则第 i 个站点排队长度为 $X_i(T) - X_i(0)$, 其服从参数为 $\lambda_i T$ 的泊松分布。

2 发车间隔与等待队长的关系

为了能够准确描述发车间隔与排队长度之间的关系, 分以下两种情形讨论。

2.1 发车间隔 T_0 为确定值

考虑到可能出现超车的情况, 第 i 个站点在相继两辆车到达时间间隔的排队长度为

$$X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) - X_i(0)$$

其中, T_{1j} 和 T_{2j} 为前后两辆车经过第 j 个路段的时间, 且为方便记, 设 $T_{10} = T_{20} = 0$ 。由各路段行车时间的假定知, 当 $i > 1$ 时, $\sum_{j=0}^{i-1} T_{1j}$ 和 $\sum_{j=0}^{i-1} T_{2j}$ 相互独立同分布, 且两个随机变量分别服从正态分布。由此可知首发站的平均队长为

$$E[X_i(T_0) - X_i(0)] = E[X_i(T_0)] = \lambda_i T_0$$

收稿日期: 2009-10-27

基金项目: 国家自然科学基金(10926187)

第一作者: 男, 1985年生, 利比亚留学硕士生

* 通讯联系人

E-mail: li-zhiqiang2000@163.com

当 $i > 1$ 时,各站点的平均队长为

$$E \left[X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) - X_i(0) \right] = E \left[X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \right]$$

利用全数学期望公式

$$E \left[X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \right] = E \left\{ E \left[X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \middle| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right] \right\}$$

当 $i > 1$ 时,对任意 $t \geq 0$,假定行车时间与各站点的乘客到达相互独立,再利用泊松过程的独立平稳增量性及其数字特征,易证

$$E \left[X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \middle| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} = t \right] = E[X_i(t)] = \lambda_i t$$

其中第一个等式是由于行车时间与各站点的乘客到达的相互独立性条件期望的性质直接得到的。

$$E \left[X_i \left(\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) - X_i(0) \right] = \lambda_i E \left[\left| T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right]$$

由各路段行车时间相互独立,可知 $T^{(i)} = T_0 + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j}$ 服从均值为 T_0 的正态分布,其方差为 $\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{i-1} \text{Var}(T_{1j}) + \sum_{j=1}^{i-1} \text{Var}(T_{2j})$ 。下面直接计算 $E(|T^{(i)}|)$,

$$E(|T^{(i)}|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-T_0)^2}{2\sigma_i^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |T_0 + \sigma_i y| e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-T_0/\sigma_i} (T_0 + \sigma_i y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_0/\sigma_i}^{\infty} (T_0 + \sigma_i y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

其中,前一项利用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 可表为

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-T_0/\sigma_i} (T_0 + \sigma_i y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -T_0 \Phi(-T_0/\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T_0^2}{2\sigma_i^2}}$$

类似的可得第二项为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_0/\sigma_i}^{\infty} (T_0 + \sigma_i y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = T_0 (1 - \Phi(-T_0/\sigma_i)) + \frac{\sigma_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T_0^2}{2\sigma_i^2}}$$

因此站点 i 的平均队长为

$$\lambda_i \left[T_0 - 2T_0 \Phi(-T_0/\sigma_i) + \frac{2\sigma_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T_0^2}{2\sigma_i^2}} \right]$$

其为 $\lambda_i, T_0, \sigma_i^2$ 的函数。下面分别给出 $\sigma = 2, \lambda = 5$, $\sigma = 5, \lambda = 5$ 和 $\sigma = 5, \lambda = 10$ 时发车间隔 T 与平均队长 L 的关系图。

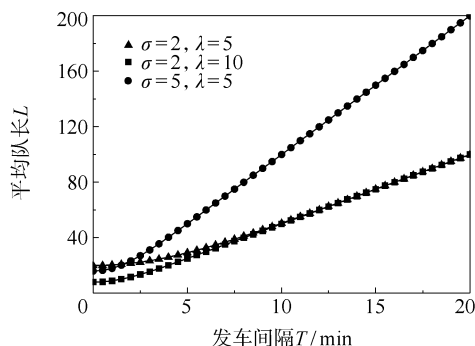


图1 发车间隔与平均队长的关系曲线

Fig. 1 Relationship between bus frequency and average queue length

由图1可知,平均队长 L 与发车间隔 T 的曲线为单调递增函数,刚开始时缓慢增加,然后呈线性趋势递增。对比3个曲线的变化可知,平均队长与发车间隔的曲线始终为单调递增函数。当 λ 取值接近或相同而 σ 不同时,时间间隔 T 较小时, σ 越大平均队长越长,但随发车间隔 T 的增大, σ 的影响越来越小;进一步,当单位时间内乘客的到达强度 λ 较大时,随发车间隔 T 的增大,平均队长 L 增加的幅度也越大。

2.2 发车间隔 T 服从均值为 T_0 的指数分布

此时利用泊松过程的性质可知,公交车的发出数量服从参数为 $1/T_0$ 的泊松过程。在考虑到超车情形下,第 i 个站点的队长为

$$X_i \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) - X_i(0)$$

则第 i 个站点的平均队长为

$$E \left[X_i \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) - X_i(0) \right] = E \left[X_i \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \right]$$

利用全数学期望公式

$$E \left[X_i \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \right] = E \left\{ E \left[X_i \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \right] \right\}$$

利用与 2.1 类似的讨论可得

$$E \left[X_i \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right) \right] = \lambda_i E \left(\left| T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j} \right| \right)$$

当 $i=1$ 时, 首发站的平均队长为

$$E[X_1(T)] = E\{E[X_1(T)|T]\} = \lambda_1 E(T) = \lambda_1 T_0$$

因为 $i>1$ 时, $T^{(i)} = T + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j}$ 的概率分布为指数分布与正态分布的混合, 其绝对值的数学期望难于求出, 因此由 T, T_{1i}, T_{2i} 的分布产生随机数, 再根据大数定律利用蒙特卡洛模拟方法可近似求出。具体步骤如下: 先产生 $(T, T_{1i}, T_{2i}, i=1, \dots, n)$ 的容量为 10000 的样本 $(T_{(k)}, T_{1i}^{(k)}, T_{2i}^{(k)}, i=1, \dots, n), k=1, 2, \dots, 10000$, 分别计算 $T_k^{(i)} = T_{(k)} + \sum_{j=0}^{i-1} T_{1j}^{(k)} - \sum_{j=0}^{i-1} T_{2j}^{(k)}$, $\frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} |T_k^{(i)}|, i=1, 2, \dots, n$ 。

如此重复 1000 次, 求得 1000 次的平均值, 即为 $E[|T^{(i)}|]$ 的估计值, 从而可得第 i 个站点平均队长的估计值。根据不同的 T_0 值, 利用模拟可得不同的平均队长。

3 结论

发车间隔与平均队长的关系曲线为单调递增的。若单位时间内乘客的到达强度 λ 取值接近或相同, 当时间间隔较小时, 行车时间的标准差 σ 越大平均队长越长, 但随发车间隔的增大, σ 的影响越来越小, 此时发车间隔与平均队长呈线性关系; 进一步, 当 λ 较大时, 随发车间隔的增大, 平均队长增加的幅度也越大。

参考文献:

- [1] 胡兵. 基于排队论的公共交通系统运营优化研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.
Hu B. The optimization of public traffic system operation based on queuing theory [D]. Xi'an: XiDian University, 2009. (in Chinese)
- [2] de André P, Robin L. Optimal timetables for public transportation [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2001, 35: 789-813.
- [3] Imen B, Inès B, Khaled G. Distributed decision evaluation model in public transportation systems [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2008, 21: 419-429.
- [4] 刘次华. 随机过程 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001.
Liu C H. Stochastic processes [M]. WuHan: HuaZhong University of Science and Technology Press, 2001. (in Chinese)

The relationship between bus frequency and the average queue length

Robert S TOWEH LI ZhiQiang

(College of Sciences, Beijing University of Chemistry and Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: By using random variables to describe the travel times of bus lines on a network diagram, and calculating the mathematical expectation and the corresponding probabilities of the journey time, we can consider the establishment of passengers queuing model by using the knowledge of the stochastic processes. In this paper we consider the relationship between the bus frequency and the average queue length between adjacent time periods at each site for the different assumptions of headway.

Key words: average travel time; queuing model; bus frequency; average queue length; total expectation formula