矩条件参数化 3 带对称正交小波

马建云　崔丽鸿*
(北京化工大学 理学院, 北京　10029)

摘　要: 对具有消失矩性质的 3 带对称正交小波进行参数化,给出正交小波的几个重要性质,同时讨论滤波器系数长度、对称中心点、消失矩和离散矩之间的联系,通过放弃线性方程组中的几个消失矩条件来引入尺度函数的三阶离散矩作为参数。给出了构造 3 带正交对称小波滤波器的约束方程组的算法,计算得出一组含有 1 个参数的 9 长滤波器系数的准确表达式。本文给出的构造方法算法易于理解和推广,求解过程相对简单。

关键词: 3 带正交小波; 消失矩; 离散矩
中图分类号: O174.2

引　言

多带小波(M 带小波)是近几年刚刚发展起来的小波分析理论的一个新的组成部分,它为人们提供了更大的小波选择范围,并为人们找到具有更好性质的小波函数,而这些性质是 2 带小波所不具备的[1]。对多带小波的研究已经成为热点,如 Chui[2] 构造了若干 3 带既正交又对称的尺度函数和小波。3 带小波相对于 2 带小波具有更好的特点,如:频带的划分更细,能量更集中,正交小波的选择具有更大的自由度和灵活性,在对称性和光滑性方面也有其独特的优点[3]。

本文讨论 3 带($M=3$)对称正交小波的参数化,主要研究具有消失矩性质的 3 带对称正交小波,通过选取合适的滤波器长度,消失矩条件,对称中心点,离散矩,列出合适的约束方程组[4],继而计算出滤波器系数的表达式。

1　多分辨分析的基本概念

函数 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 被称为是基本小波,如果它满足以下的“容许”条件

$$C_\psi \triangleq \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < \infty$$

若 $\hat{\psi}$ 是连续的,可知,

$$\hat{\psi}(0)=0 \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}}\psi(t)\mathrm{d}t=0$$

又称 ψ 为母小波,它的伸缩和平移构成 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的一个规范正交基,令

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0,$$

a 称为伸缩因子, b 称为平移因子,标准化即让 $\|\psi_{a,b}\|=\|\psi\|=1$。

为找到母函数 $\psi(t)$,经典的多分辨分析法是先构造一个具有特定性质的层层嵌套的闭子空间 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{R}}$,这个闭子空间序列充满了整个 $L^2(\mathbb{R})$ 空间,在 V_0 子空间找一个函数 $\phi(t)$,其平移 $\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成 V_0 空间的 Riesz 基,由 $\phi(t)$ 计算得到 $\psi(t)$。

2　滤波器系数的定义

由多分辨分析可知,$\phi(t)$ 可由 V_1 的一个基 $\{\phi(2t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 线性表示

$$\phi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\phi(2t-k)$$

此式称为两尺度方程,$\phi(t)$ 是尺度函数,2 是尺度因子,称 h_k 为尺度函数的滤波器系数。

可以看出为构造 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正交小波基,一方面是如何选择 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$,使得两尺度方程有解,并且其解通过多分辨分析可产生正交的小波基 $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$,另一方面当两尺度方程有解时,如何求出其解。

本文要对 3 带正交小波进行参数化,就是希望滤波器都能用离散矩做参数表示出来,选取不同的参数,得到不同的小波基。

收稿日期: 2009-05-13
第一作者: 女,1982 年生,硕士生
* 通讯联系人
E-mail: mathcui2@163.com

3　3 带对称正交小波滤波器系数方程的构造

3 带正交小波的尺度函数 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$满足两尺度方程

$$\phi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\phi(3t-k)$$

并且滤波器系数满足下列标准化条件

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k=3 \tag{1}$$

另外知道正交条件是

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_kh_{k-3l}=3\delta_{0,l} \tag{2}$$

正交条件可以化成一个非齐次方程

$$\sum_{k=0}^{N}h_k^2=3 \tag{3}$$

和一个齐次方程

$$\sum_{k=0}^{N}h_kh_{k-3l}=0 \tag{4}$$

消失矩是小波一个很重要的性质，3 带小波具有 p 阶消失矩满足

$$\sum_{k=0}^{N}\zeta^kk^lh_k=0,l=0,\cdots,p-1\ 其中\ \zeta=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} \tag{5}$$

对于一定长度的滤波器系数，Daubechies 小波是具有最大消失矩的小波，并且是有限解，所以想要引进参数，就要放弃几个消失矩条件，才可以把尺度函数的离散矩作为参数引入。

ϕ 的第 n 阶离散矩由滤波器系数定义如下

$$m_n=\sum_{k=0}^{N}h_kk^n \tag{6}$$

另外滤波器的对称性本文令他们满足前后对称，即

$$h_k=h_{N-k} \tag{7}$$

所以式(1)，式(3)～(7)即为 3 带对称正交小波滤波器的约束方程组。

4　长度为 9 的滤波器系数方程的求解

基于上节的算法可知通过选取合适的滤波器长度，消失矩条件，对称中心点，离散矩，可以得到滤波器系数的约束方程组，求解方程组，就可以得到用参数表示的所有的滤波器系数。

下面给出长度为 9 的滤波器系数方程的计算过程：

根据对称性可知

$$h_0=h_8,h_1=h_7,h_2=h_6,h_3=h_5$$

标准化方程为

$$2(h_0+h_1+h_2+h_3)+h_4=3$$

由正交性得到

$$2(h_0^2+h_1^2+h_2^2+h_3^2)+h_4^2=3$$

$$h_0h_3+h_1h_4+h_2h_3=0$$

$$h^2+2h_0h_2=0$$

消失矩方程为

$$h_0-2h_1+h_2+h_3-h_4=0$$

加入作为参数的离散矩条件

$$512h_0+344h_1+224h_2+152h_3+64h_4=m$$

所以，9 长的滤波器系数的约束方程组为

$$2(h_0+h_1+h_2+h_3)+h_4=3$$

$$2(h_0^2+h_1^2+h_2^2+h_3^2)+h_4^2=3$$

$$h_0h_3+h_1h_4+h_2h_3=0$$

$$h^2+2h_0h_2=0$$

$$h_0-2h_1+h_2+h_3-h_4=0$$

$$512h_0+344h_1+224h_2+152h_3+64h_4=m$$

具体解法是：先解其中的 3 个线性方程，h_0、h_1、h_2 都用 h_3，h_4 表示得

$$h_0=\frac{h_3}{4}+\frac{3h_4}{8}+\frac{m}{288}-\frac{11}{8},$$

$$h_1=-\frac{h_4}{2}+\frac{1}{2},$$

$$h_2=-\frac{5h_3}{4}-\frac{3h_4}{8}-\frac{m}{288}+\frac{19}{8}$$

将带入其余 3 个非线性方程，用 Gröbner 基方法[5]通过 Maple 软件求解非线性方程组，得到 h_3，h_4，然后逐次回代得到所有的解。

方程组有 4 组解，本文列出其中 1 组解

$$h_0=h_8=M_3$$

$$h_1=h_7=\frac{1}{432M_4}(653184M_3^2-2160M_3m+376M_2+3760M_1+m^2+248m-145344)$$

$$h_2=h_6=\frac{1}{432M_4}(373248M_3^2-2160M_3m+352M_2+3520M_1+3m^2-520m-69888)$$

$$h_3=h_5=\frac{1}{432M_4}(-93312M_3^2-1728M_3m+632M_2+6320M_1+3m^2-392m-120768)$$

$$h_4=\frac{1}{216M_4}(-653184M_3^2+2160M_3m-556M_2-5560M_1-m^2-392m-192864)$$

其中

$$M_1=\sqrt{6m-1152}$$

$$M_2=\sqrt{-\frac{2mM_1-1128mM_1+128448M_1+50112m-96m^2-6082560}{M_1}}$$

$$M_3=\frac{m}{648}-\frac{23}{54}+\frac{5M_1}{648}+\frac{M_2}{1296}$$

$$M_4=220-\frac{2m}{3}-\frac{25M_1}{3}+\frac{5M_2}{6}$$

方程组的解显示滤波器系数表达式含有参数,有很好的灵活性,可以根据实际需要改变参数得到不同的解,从而选取适宜的小波基。

参考文献:

[1] 程正兴,杨守志,冯晓霞. 小波分析的理论算法进展和应用[M]. 北京:国防工业出版社,2007:172-198.

[2] Chui L. Construction of compactly supported symmetric and antisymmetric orthonormal wavelets with scale = 3 [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1995, 2: 21-51.

[3] 崔丽鸿,程正兴. M带紧支撑正交对称复尺度函数的构造[J]. 高等学校计算数学学报,2003,25(2): 160-166.

[4] Regensburger G. Parametrizing compactly supported orthonormal wavelets by discrete moments[J]. AAECC. 2007,18:583-601.

[5] Buchberger B. Bases and systems theory[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2001, 12(3): 223-251.

Parametrizing rank 3 symmetric orthogonal wavelets by discrete moments

MA JianYun　CUI LiHong

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The paper discuss parametrizations of filters corresponding to with several vanishing moments. After recalling some properties of rank 3 orthogonal wavelets, relations between the number of filters, symmetry, vanishing moments and discrete moments are discussed. The paper give up some vanishing moment conditions, which correspond to linear constraints on the filters, and introduce discrete moments of the filters as parameters. An algorithm is provided for constructing system equationns for rank 3 orthogonal wavelets filter coefficients. Finally, the associated several families examples with one-parameter are presented explicitly. This paper compute one example using algorithm, the algorithm is easy to be understood and generalize, the process of computing are easier.

Key words: rank 3 orthogonal wavelets; vanishing moments; discrete moments