

基于 Shannon-Happ 公式和 Johnson 方法计算信号流图的传递函数

吕红宇 吴重光

(北京化工大学信息科学与技术学院, 北京 100029)

摘要: 通过将 Shannon-Happ 公式和 Johnson 方法相结合, 介绍了一种计算系统信号流图传递函数规格化解析表达式的算法。提出了使用回路添加手段形成回路组合的新方法。给出了算法实现的详细步骤、程序设计流程图和检验结果。

关键词: 信号流图; 传递函数; Shannon-Happ 公式; Johnson 方法

中图分类号: TP 301.6

引言

图论是一种简洁直观的数学方法, 对各种模型有广泛的适用性和概括性, 因而在自动控制、计算机技术、系统工程等领域得到了广泛应用。图论技术在控制系统计算机辅助设计中主要用来解决复杂多变量系统的分析设计, 特别适用于具有不确定参数的大系统^[1,2]。

一个复杂的多变量线性系统可简洁直观地表达为信号流图的形式, 由此可计算出其传递函数的规格化解析表达式, 它是对系统特性的精确描述并对控制系统的分析设计有着重要意义。利用信号流图计算系统传递函数的方法通常有: 直接消去法^[3]、Mason 公式法^[3]、用 Coates 公式求解代数方程组法^[4], 其中 Mason 公式法较为常用。

本文提出了一种计算信号流图系统传递函数解析表达式的新方法。该方法通过使用 Shannon-Happ 公式^[5]和 Johnson 方法^[3], 简化了已有算法, 并使用类似矩阵开拓法^[2]的技术, 在已有互不接触回路组合的基础上, 通过回路添加的方法来形成新的回路组合, 从而提高了算法效率。

1 算法介绍

1.1 Mason 公式

为对比使用 Mason 公式和 Shannon-Happ 公式

计算传递函数方法的不同, 首先介绍 Mason 公式

$$G = \frac{1}{P_i} \sum_i P_i \quad (1)$$

式中: $\sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \dots$ 为信号流图的特征行列式; L_j 为所有不同回路增益之和; $\sum_{m,n} L_m L_n$ 为所有两两互不接触回路增益乘积之和; $\sum_{p,q,r} L_p L_q L_r$ 为所有三个都互不接触回路增益乘积之和。 i 表示由源点到汇点的第 i 条前向通路的标号; P_i 是由源点到汇点的第 i 条前向通路增益; Δ_i 为第 i 条前向通路特征行列式的余因子, 它是除去与第 i 条前向通路相接触的回路外, 所有余子图的特征行列式。

由(1)式可以看出使用 Mason 公式计算系统传递函数解析表达式是有一定难度的, 尤其是计算 P_i 项需要相当的技巧和运算量。

1.2 Shannon-Happ 公式

Shannon-Happ 公式通过巧妙的方法简化了 Mason 公式, 其原理为在原开信号流图的基础上由输出节点 y 到输入节点 u 引一条 $1/G$ 的分支, 形成一闭信号流图(图1)。闭信号流图的 Shannon-Happ 公式为

$$1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \dots = 0 \quad (2)$$

式中 $\sum_j L_j$, $\sum_{m,n} L_m L_n$, $\sum_{p,q,r} L_p L_q L_r$ 的意义同 Mason 公式。方程左端为 $1/G$ 的线性函数, 由(2)式只需求出闭信号流图的回路增益, 即可求出系统的传递

函数 $G(s)$ 。避免了 Mason 公式中最复杂的对 P_i 项的计算,大大简化了算法。

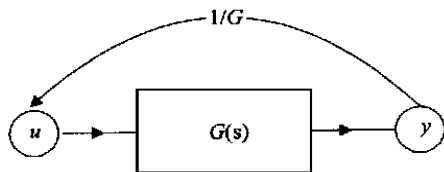


图 1 闭信号流程图

Fig. 1 Closed signal flow graph

1.3 Johnson 方法

寻找回路和前向通路的方法通常使用矩阵开拓法,但具体实施相当复杂。Shannon-Happ 公式只需查找回路,因而可采用 Johnson 方法。它是一种高效率的有向基本回路探索算法,其时间复杂度和空间复杂度分别为: $T(c, e, n) = O((c + e)(n + 1))$; $S(c, e, n) = O(c + e)$ 。这里 c 为节点数, e 为支路数, n 为基本回路数。Johnson 算法的思路为:以邻接目录数组为索引,设立一个堆栈和一个封锁-释放状态控制向量进行回路探索。通过邻接目录数组、堆栈的对应关系,依靠控制向量控制探索的深度,避免重复回路、内环回路和无效探索的产生,在堆栈中形成基本回路的节点组合。

1.4 形成互不接触回路组合的方法

在利用 Johnson 方法求得基本回路的基础上,通过查找 $i (i = 2, 3, \dots, n)$ 条互不接触基本回路的全部组合,可由 Shannon-Happ 公式求得系统传递函数。如采用简单穷举 i 条基本回路组合的方式,则需要 C_n^i 次计算,其计算量很大。三个互不接触回路也必两两互不接触,四个互不接触回路其中任意三个也必互不接触……,通过使用类似矩阵开拓法中添加元素的方法,在原有 i 条互不接触基本回路组合的基础上添加一条新的基本回路后,可形成 $i + 1$ 条基本回路的所有组合。由于已经穷举了 i 条互不接触回路的全部组合方式,新添加的回路只需在构成这些组合的回路中选取。在两两互不接触回路组合的基础上判断添加回路是否和原条回路都不接触后,可得到 $i + 1$ 条互不接触回路的全部组合。如发现所有 i 条基本回路的组合都存在接触,则所有 $i + 1$ 条基本回路的所有组合必都相接触,查找互不接触回路组合的工作结束。对一个具有 n 条基本回路系统的信号流程图,通常 i 条互不相接触回路的组合数 $N(i) \ll C_n^i$,由此形成的所有可能的 $i + 1$

条互不相接触回路的组合数 $N(i + 1) \ll C_n^{i+1}$ 。此方法减少了运算量,提高了算法效率。

1.5 求解 Shannon-Happ 公式得到系统传递函数

在利用 Johnson 公式求得基本回路的基础上计算出所有基本回路的回路增益,由已知的全部 i 条不相接触回路的组合可求出 $L_1 L_2 \dots L_i$,按 s 的幂次规格化,分离出公式中含有 $1/G$ 的项,代入 Shannon-Happ 公式计算,再按 s 的幂次规格化后,所得结果中含 $1/G$ 的项为传递函数分子,不含 $1/G$ 的项为传递函数分母,由此得到系统的传递函数的规格化解析表达式。

2 程序设计

2.1 主要数据结构

在算法程序矩阵使用两个数组分别存储信号流图的网络拓扑信息,数组 F 为有向图的邻接目录矩阵,数组 $Fksg$ 为对应于邻接目录矩阵 F 的信号流程图支路参数矩阵,用于支路比例系数增益和 s 项幂次的存储,同时用来标识含有 $1/G$ 项的分支。数组 $SumLks$ 存储不含 $1/G$ 的所有 $L_1 L_2 \dots L_i$ 增益项,数组 $SumLksg$ 存储含 $1/G$ 的所有 $L_1 L_2 \dots L_i$ 增益项。

2.2 程序流程图

程序流程图如图 2 所示。在判断第 j 个 i 条回路的组合中是否存在相接触回路时,两两互不接触回路的组合通过判断两条基本回路是否有相同节点得到,对于其他 i 条 $(i - 3)$ 互不接触回路的组合,只需在两两互不接触回路组合的危上来判断是否有相接触的回路即可。

3 检验结果

为了验证本算法的正确性,对 10 种不同复杂程度系统的信号流程图做了检验。这些系统覆盖了信号流图的多种不同形式,其中包括一个含有 17 个节点的 CSTR 连续搅拌釜式反应器和一个含有 25 个节点的精馏塔系统的信号流程图。对各个信号流程图不同输出端对输入端的系统传递函数分别进行了验证,检验结果完全正确,同时表明基于 Shannon-Happ 公式和 Johnson 方法的算法程序对信号流程图传递函数的计算有很好的精确度。

图 3 给出了一个典型的 CSTR 控制系统的信号流程图,使用图 2 所示算法程序计算此信号流程图系统传递函数。断开节点 17 到节点 4 的支路连接时,系

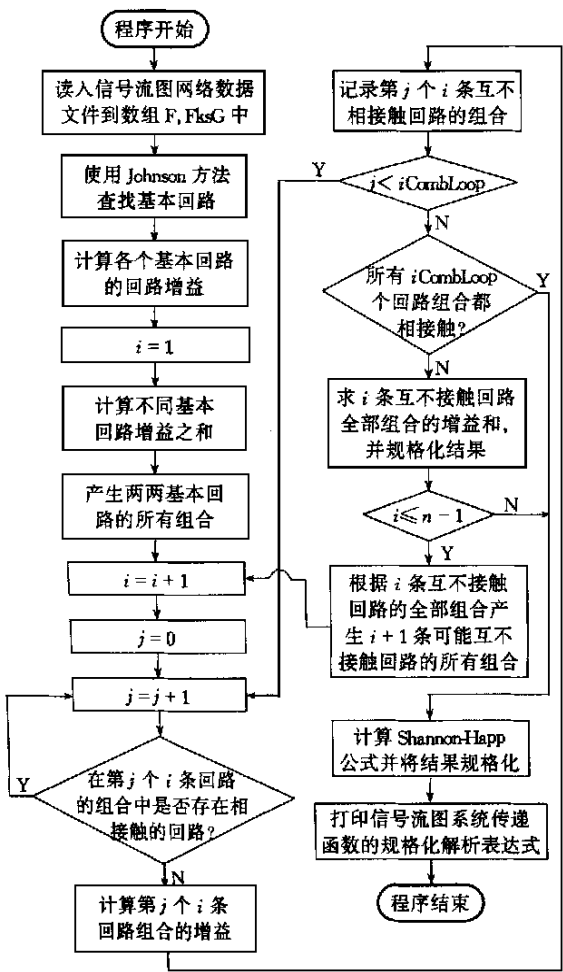


图 2 算法程序流程图
Fig. 2 Flow chart of the algorithm routine

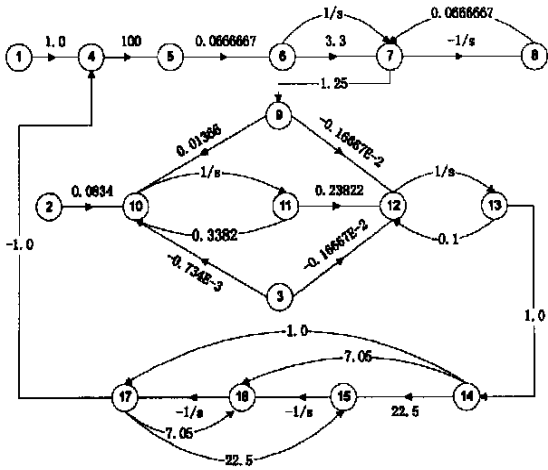


图 3 CSTR 控制系统信号流图

Fig. 3 Signal flow graph of a CSTR control system
统为开环形式,分别计算通道 1 11、2 11、3 11、1 13、2 13、3 13 的系统传递函数。闭合节点 17

到节点 4 的支路,系统为闭环形式,可分别计算通道 1 11、2 11、3 11、1 13、2 13、3 13 的系统传递函数。程序运行结果均与文献[6]相符。对在闭环状态下通道 1 11 的传递函数,表 1 给出了文献与程序计算的结果对照。

表 1 闭环通道 1 11 文献与程序计算结果对照
Table 1 Comparison data from Reference and by the developed program for closed signal flow 1 11

s 的 幂次	分子 s 域多项式系数		分母 s 域多项式系数	
	文献值	本程序结果	文献值	本程序结果
0	0.256 124 68	0.256 125	0.555 180 79	0.555 182
1	3.486 710 5	3.486 717	2.628 259 7	2.628 268
2	9.530 852 3	9.530 870	10.373 603	10.373 607
3	2.799 724 6	2.799 732	26.505 478	26.505 571
4	0.375 649 51	0.375 650	7.509 030 3	7.509 033
5	0.0	0.000 000	1.000 000 0	1.000 000

4 结 论

本文对算法程序的介绍和检验表明,基于 Shannon-Happ 公式和 Johnson 方法的新算法提供了一种能够正确求得系统信号流图传递函数规格化解析表达式的简洁和快速的方法,大大降低了程序设计的难度,使通过信号流图求解系统传递函数的方法更具有通用性和实用性,从而可十分方便地将信号流图这一工具应用于控制系统计算机辅助设计中。其有利于解决复杂多变量系统的分析设计,尤其是有利于不确定参数的大系统的分析设计。

参 考 文 献

[1] ReinSchke KJ. 多变量系统的图论方法. 吴启迪, 萧蕴诗译. 上海: 同济大学出版社, 1997
[2] 齐维贵, 丁 宝, 梁雪凤. 基于 FFT 与 Mason 公式的仿真研究. 系统仿真学报, 1997, 9(2): 33 ~ 37
[3] 吴重光, 沈承林. 控制系统计算机辅助设计. 北京: 机械工业出版社, 1986
[4] 卢开澄, 卢明华. 图论及其应用. 北京: 清华大学出版社, 1995
[5] Johnson D E, Johnson J R. 图论与工程应用. 孙惠泉, 李先科译. 北京: 人民邮电出版社, 1982
[6] Henley EJ, Williams R A. Graph theory in modern engineering. New York and London: Academic Press, 1978

The algorithm for calculating transfer function of a signal flow graph by Shannon-Happ formula and Johnson method

LU Hong-yu WU Chong-guang

(College of Information Science & Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: A new algorithm routine for calculating Standardized System Transfer Function from Signal Flow Graph by combining Shannon-Happ Formula with Johnson Method is introduced in this paper. A new method for generating the combinations of loops is developed for improving the efficiency of the algorithm. The details of the algorithm, flow-chart of the program and test results are given. This novel algorithm greatly simplifies the program design needed for calculating Transfer Function from Signal Flow Graph and improves the total efficiency of the algorithm.

Key words: signal flow graph; transfer function; Shannon-Happ formula; Johnson method

(上接第 52 页)

参 考 文 献

- [1] 温诗铸. 摩擦学原理. 北京:清华大学出版社, 1990. 203 ~ 267
- [2] 李福生. 非圆齿轮. 北京:机械工业出版社, 1975. 36 ~

86

- [3] 唐群国, 陈卓如. 非圆齿轮传动弹流润滑的数值解. 佳木斯大学学报, 1999, 17(1): 17 ~ 20
- [4] 徐灏主编. 新编机械设计师手册. 北京:机械工业出版社, 1995. 8 ~ 186

Elasticity hydromechanical lubrication for elliptical gear transamination

WANG Yu-hao ZHANG You-chen

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: By analysing synthetical curvature radius, average velocity and unit load along contact length of a pair of meshing elliptical gears, a formula for calculating the minimum oil membrane thickness was proposed, the result of which can be serve as a criterion to evaluate the lubricant capability of a pair of meshing elliptical gears.

Key words: elliptical gear; elasticity hydromechanical lubrication; oil membrane thickness