

多随从二层优化问题一个新的解概念及性质

杨龙宝 杨丰梅*

(北京化工大学理学院, 北京 100029)

摘 要: 文中讨论了多随从双层规划问题。根据对策论中 Nash 均衡点的思想和多目标决策中极大模理想点技术, 给出了极大 Nash 理想点的定义, 并对多随从双层规划问题引入了极大 Nash 最优解的概念。最优解概念不仅有效地解决了随从响应不唯一所带来的解的不确定性, 而且利用变换可以将对应的问题转化为求解过程比较容易的数学模型。用不动点定理证明了极大 Nash 最优解的存在性, 并证明了解集的闭性。

关键词: 二层规划; 多随从; Nash 解

中图分类号: O122

引言

作为数学规划的一个分支, 多层规划的研究从 20 世纪 90 年代初开始受到了特别关注。由于多层规划在工业、经济金融和军事等领域有着广泛的应用, 因此, 也吸引了不少其它领域的专家加入到多层规划的研究队伍^[1-5]。国内也有多名学者在从事这一领域的研究^[6]。

从已发表的论文和专著中的研究成果来看, 绝大多数的研究仍局限于单个随从的二层规划问题。其主要原因在于如果问题是多随从的, 由于随从之间往往有信息交换, 当领导选择一个决策后, 多个随从对这一决策的响应可以有多种形式。这种不确定性造成了问题建模和求解的极大困难。文献[7]中本文第二作者与他人合作提出了“随从 Nash 平衡点响应集”以及“随从 Nash 理想点”等概念并导出了解的一些性质。本文利用目标规划的原理并结合非合作对策 Nash 均衡的思想提出多随从二层规划的一个新的解概念, 并证明解的存在性以及讨论解集的某些性质。

1 多随从二层规划的模型与解概念

本文讨论如下多随从二层规划问题

模型 (MFBLP), $\min_{x \in X} F(x, y_1, \dots, y_n)$, 这里 y_i 是下层问题的解

$$\min_{y_i \in Y_i(x)} f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{s. t. } g_j(x, y_1, \dots, y_n) \leq 0, j = 1, \dots, m$$

其中 $x \in \mathbf{R}^{n_0}$, $y_i \in \mathbf{R}^{n_i}$ 分别是领导和第 i 个随从的决策变量, $X \subset \mathbf{R}^{n_0}$, $Y_i(x) \subset \mathbf{R}^{n_i}$ 为非空闭集。 $F(x, y_1, \dots, y_n)$ 和 $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ 分别是领导和第 i 个随从的目标函数, $g_j(x, y_1, \dots, y_n)$, $j = 1, \dots, m$ 是 n 个随从共同的约束函数。

(MFBLP) 的一种特殊情况是

$$\min_{x \in X} F(x, y_1, \dots, y_n), \text{ 这里 } y_i \text{ 是下层问题的解}$$

$$\min_{y_i \in Y_i(x)} f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{s. t. } g_i(x, y_i) \leq 0, i = 1, \dots, n$$

上述约束不等式表明每个随从的策略集跟其他随从的策略集无关。

当所有的函数都为线性函数的时候, 可以把问题 (MFBLP) 表述如下

$$\min_{x \in X} a^T x + b_1^T y_1 + \dots + b_n^T y_n, \text{ 这里 } y_i \text{ 是下层问题的解}$$

$$\min_{y_i \in Y_i(x)} c_i^T x + d_{i1}^T y_1 + \dots + d_{in}^T y_n$$

$$\text{s. t. } Ax + B_1 Y_1 + \dots + B_n Y_n \leq r$$

令 $y_{-i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ 。对于给定的 x , 当其他随从选择策略为 y_{-i} 时, 对应第 i 个随从的内部规划问题的函数记为 $P_i(x, y_{-i})$, 并记

$$(y_i, y_{-i}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

$$Q_i(x, y_{-i}) = \{y_i \mid g_j(x, y_i, y_{-i}) \leq 0, j = 1, \dots, m, y_i \in Y_i(x)\}$$

收稿日期: 2004-04-30

基金项目: 国家自然科学基金 (10171108)

第一作者: 男, 1978 年生, 硕士生

*通讯联系人

E-mail: yangfm@mail.buct.edu.cn

$Y_i(x, y_{-i}) = \{y_i | y_i \text{ 是问题函数 } P_i(x, y_{-i}) \text{ 的一个最优解}\}.$

一旦领导作出决策变量 x , 随从在某种意义下面是一个对策问题。对于这个对策问题, 可以有多种解的概念, 而所有这些解都可以被引入问题函数 (MFBLP) 中作为随从的响应。文献 [7] 中给出了 Nash 均衡点的定义如下。

定义 1 对于任意的 $x \in X$, 称 $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ 是 n 个随从的一个 Nash 均衡点, 如果不等式成立

$$f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_n) \geq f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}, y_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_n)$$

其中 $y_i \in Q_i(x, y_{-i}), i = 1, \dots, n$ 。

对于给定的 $x \in X$, 令

$RNES(x) = \{(y_1, \dots, y_n) | (y_1, \dots, y_n) \text{ 是对应 } x \text{ 的 } n \text{ 个随从的 Nash 均衡点}\}$

$FNES = \{(x, y_1, \dots, y_n) | x \in X, y_i \in Y_i(x), (y_1, \dots, y_n) \in RNES(x)\}$

$RNES(x)$ 是领导给定决策变量 x 后 n 个随从的 Nash 均衡响应集, $FNES$ 是问题函数 (MFBLP) 的 Nash 可行解集。Nash 最优解的定义如下

定义 2 称 $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ 是 (MFBLP) 的一个 Nash 最优解 (NEOS), 如果满足 (1) $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*) \in FNES$, (2) $F(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*) \geq F(x, y_1, \dots, y_n)$, 对任意的 $(x, y_1, \dots, y_n) \in FNES$ 。

已经知道: 由于对于给定的 x , 在一般情形下 $RNES$ 不是单点集合。在文献 [7] 中, 作者给出了 Nash 理想点的概念。本文给出一个新的解概念。基本思想是利用目的规划的技术将问题形式进行转换。与文献 [7] 中的解概念相比, 由于通过引入了 $\bar{f}_i(x)$ 去掉了绝对值, 可使求解问题变得简单。

定义 3 对于任意给定的 $x \in X$, 称 $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ 是随从均衡响应的一个极大 Nash 理想点 (MNIPE), 如果它是下面问题的一个最优解

$$\min_i \{ \max_n [|f_i(x, y_1, \dots, y_n) - \bar{f}_i(x)| | (y_1, \dots, y_n) \in RNES(x)] \}$$

其中 $\bar{f}_i(x) = \min \{ f_i(x, y_1, \dots, y_n) | (y_1, \dots, y_n) \in RNES(x) \}$ 。

这个概念来源于多目标规划中的极大模理想点技术。定义 3 中的极小极大问题可以等价地表述为

$$\begin{aligned} \min L \\ \text{s.t. } |f_i(x, y_1, \dots, y_n) - \bar{f}_i(x)| \leq L, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

其中 $(y_1, \dots, y_n) \in RNES(x)$ 。

根据 $\bar{f}_i(x)$ 的定义, 上述问题可等价地写成

$$\begin{aligned} \min L \\ \text{s.t. } f_i(x, y_1, \dots, y_n) - \bar{f}_i(x) \leq L, i = 1, \dots, n \\ (y_1, \dots, y_n) \in RNES(x) \end{aligned}$$

如果 $RNES(x)$ 是凸的, 那么相应的随从极大 Nash 理想点的均衡响应 (MNIPE) 是唯一的, 可以定义极大 Nash 最优解。记随从响应集 $RMNIPES(x)$ 是关于 x 的随从极大 Nash 理想点的集合。

定义 4 称 $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ 是问题函数 (MFBLP) 的一个极大 Nash 最优解 (MNEOS), 如果 $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ 满足

$$(1) (y_1^*, \dots, y_n^*) \in RMNIPES(x^*);$$

$$(2) F(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*) \geq F(x, y_1, \dots, y_n), \text{ 对任意 } x \in X, (y_1, \dots, y_n) \in RMNIPES(x).$$

对于任意的 $x \in X$, $RMNIPES(x) \subset RNES(x)$ 。但是, $RMNIPES(x)$ 与文献 [7] 给出的 $RNTES(x)$ 和 $RNIPES(x)$ 之间并没有直接的关系, 下面给出的例子可以说明这一点。

例 $\max 7x + 4y - 2y_2$, 其中 y_1, y_2 是下层问题函数的解

$$\max f_1 = 3y_1 - y_2, \max f_2 = y_1 + 5y_2$$

$$\text{s.t. } 3x + 4y_1 + 3y_2 \leq 12, x, y_1, y_2 \geq 0$$

在本例中 $RNES(0) = \{(y_1, y_2) | 4y_1 + 3y_2 \leq 12, y_1, y_2 \geq 0\}$

$$\begin{aligned} RMNIPES(0) &= (4, 0) \quad RNIPES(0) = \\ &= \left\{ \left(\frac{23}{10}, \frac{14}{15} \right) \right\} \quad RNTES(0) = \{(3, 0)\} \end{aligned}$$

从这个例子也可以看出, 本文给出的这个新的解概念虽然对于某些目标函数值而言比文献 [7] 中的解概念好, 但是对于另外的目标函数值而言却不一定好。这也说明了, 在实际应用中, 选择什么样的解概念得需要根据决策者的偏好来选择。

对策论中的 Nash 均衡点的本质是, 如果某个决策人想要单方面地改变他的策略是不能够改善他的目标函数值的。在本文给出的这个解概念中, 每个随从的作用都是对称的。当所有的随从都对决策的制定没有超额决定性的影响, 并且没有不合作情况出现的时候, 这个解概念是合适的。

2 多随从二层规划的解的性质

对于一个对策问题, 其 Nash 平衡点的集合可

能是空的。因此,在对策论中平衡点的存在性是一个基本的研究议题。定理1中首先用不动点定理来证明关于下层对策问题的 Nash 均衡响应存在性的一个充分条件。

令

$$S(x, y, z) = \min_{z \in Q(x)} f_i(x, y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

$$M(x, y) = \{z \mid S(x, y, z) = \min_{z \in Q(x)} S(x, y, z^*)\}$$

$$Q(x) = \{y \mid Y_i, g_j(x, y, \dots, y_n) = 0, j = 1, \dots, m\}$$

定理1 对于任意给定的 x , 如果 g_j 为拟凹的, $j = 1, \dots, m$, f_i 是拟凸的, $Y_i(x)$ 为紧凸的, $i = 1, \dots, n$, 并且 $Q(x) \neq \emptyset$, 那么 n 个随从的极大 Nash 理想点响应集合 $\text{RMNIPES}(x)$ 为非空集。

证明: 首先证明对于由 $M(x, \cdot)$ 所确定的任意不动点都是下层对策问题函数 $P(x)$ 的一个 Nash 均衡点。

假定 \bar{y} 是由 $M(x, \cdot)$ 确定的一个不动点, 即 $\bar{y} \in M(x, \bar{y})$ 。由 $M(x, \cdot)$ 的定义可以得到: 对于任意的 $z \in Q(x)$, $S(x, \bar{y}, \bar{y}) \leq S(x, y, z)$ 。可以证明, 这个不等式等价于

$$f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_n) \leq f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}, z_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, \bar{y}_n), i = 1, \dots, n, \text{ 因此, } \bar{y}$$

是对应 x 的 n 个随从的一个 Nash 均衡点。

其次, 来证 $M(x, y)$ 是 $Q(x)$ 的一个非空紧凸子集。

因为 $g_j(x, y_1, \dots, y_n)$ 关于 y 是拟凹的, $j = 1, \dots, m$, 所以 $Q(x)$ 是凸的。因为每个 $Y_i(x)$ 是紧凸的, $i = 1, \dots, n$, 故 $Q(x)$ 是一个非空紧凸集。因为连续函数 $S(x, y, \cdot)$ 一定可在 $Q(x)$ 的某个点达到最小值, 所以 $M(x, y)$ 是非空的。由 $Q(x)$ 的紧性和 $S(x, y, \cdot)$ 的连续性, 可以得到 $M(x, y)$ 的紧性。

因为 f_i 是拟凸的, 不难证明 $S(x, y, \cdot)$ 是拟凸函数。

对于任意的 $z, z^* \in M(x, y)$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 由 $S(x, y, \cdot)$ 是拟凸函数可以得到

$$S(x, y, \lambda z + (1 - \lambda) z^*) \leq \max\{S(x, y, z), S(x, y, z^*)\} = \min\{S(x, y, z), S(x, y, z^*)\}$$

这证明了 $M(x, y)$ 的凸性。故对于任意给定的 x , $M(x, y)$ 是非空、紧和凸的。

下面来证明 $M(x, \cdot)$ 在 $Q(x)$ 上是上半连续的。用反证法, 假设 $M(x, \cdot)$ 在 $Q(x)$ 上不是上半连续的。于是存在一个 $y \in Q(x)$, 序列 $\{y^k\} \subset Q(x)$ 和序列 $\{z^k\} \subset Q(x)$ 满足 $y^k \rightarrow y, z^k \in M(x, y^k), z^k \rightarrow z$ 使得 $z \notin M(x, y)$ 。由 $M(x, y), z \notin M(x, y)$ 的定义知, 存在一个 $\epsilon > 0$ 以及 $z \in Q(x)$ 满足 $S(x, y, z) - S(x, y, z^k) > \epsilon$ 。然而, 对所有的 $k, z^k \in M(x, y^k)$, 都有 $S(x, y^k, z) \leq S(x, y^k, z^k)$ 。令 $k \rightarrow \infty$, 由 $S(x, \cdot, \cdot)$ 的连续性得到

$$S(x, y, z) \leq S(x, y, z^k)$$

这与不等式 $S(x, y, z) - S(x, y, z^k) > \epsilon$ 矛盾。因此, $M(x, \cdot)$ 是上半连续的。

因此, $M(x, \cdot)$ 是一个 $Q(x)$ 上的 K -映射。根据 Smart^[8], $M(x, \cdot)$ 至少有一个不动点。所以下层问题函数 $P(x)$ 也至少有一个 Nash 均衡响应, 故 $\text{RNES}(x)$ 为非空集合。而由随从响应的极大 Nash 理想点的定义可知, 集合 $\text{RMNIPES}(x)$ 为一个非空集。证明完毕。

研究随从的 Nash 均衡响应集的性质将有助于设计相应的多随从二层规划的求解算法。下面的定理给出了响应集 $\text{RMNIPES}(x)$ 的闭性。

定理2 令 $\bar{x} \in X$ 。假设 f_i 在 $Y_i(x)$ 上关于 y_i 是严格凸的, g_j 在 $Y_i(x)$ 上关于 y_i 是凹的, f_i 和 g_j 在 $\bar{x} \times Y_i(x)$ 上是连续的, $Y_i(x)$ 是闭凸集。如果存在 $(y_1, \dots, y_n) \in Y_i(x)$ 满足 $g_j(\bar{x}, y_1, \dots, y_n) < 0, j = 1, 2, \dots, m$, 那么 $\text{RMNIPES}(x)$ 在 \bar{x} 是闭的。

证明 定义点到集合映射 $M: X \rightarrow Y_i$ 满足 $M(x) = \text{RNES}(x), \forall x \in X$ 。首先证明 $M(\cdot)$ 在 \bar{x} 是闭的。令

$$M_i(x) = \{(y_i, y_{-i}) \mid (y_i, y_{-i}) \in Y_i, g_j(x, y_i, y_{-i}) = 0, j = 1, \dots, m, f_i(x, y_i, y_{-i}) = \min_{y_i \in Q(x)} f_i(x, y_i, y_{-i})\}$$

其中 $(x, y_{-i}) = \min_{y_i \in Q(x)} f_i(x, y_i, y_{-i})$ 。由文献[9]中定理 A.5 和 A.6, 证得 $Q(x, y_{-i})$ 在点 (\bar{x}, y_{-i}) 是连续的。由[8]中引理1有

$$M_i(x, y_{-i}) = \{y_i \in Y_i \mid g(x, y_i, y_{-i}) = 0, f_i(x, y_i, y_{-i}) = \min_{y_i \in Q(x)} f_i(x, y_i, y_{-i})\}$$

其次证明 $M_i(\cdot)$ 在点 \bar{x} 是闭的。假设 $x^k \rightarrow \bar{x}, (y_i^k, y_{-i}^k) \in M_i(x^k), (y_i^k, y_{-i}^k) \rightarrow (\bar{y}_i, \bar{y}_{-i})$ 。既然

$M_i(x, y_{-i})$ 在点 (\bar{x}, \bar{y}_{-i}) 是闭的, 且 $y_i^k \in M_i(x, y_{-i}^k), \bar{y}_{-i} \in M_i(\bar{x}, \bar{y}_{-i})$, 因此, $(\bar{y}, \bar{y}_{-i}) \in M_i(\bar{x})$ 。所以, $M(\cdot)$ 在点 \bar{x} 是闭的。

由于 $M(x) = M_i(x)$, 所以 $M(\cdot)$ 在点 \bar{x} 是闭的。

下面证明 $M(\cdot)$ 在点 \bar{x} 是开的。

由于 f_i 是严格凸的, 故 $M_i(x, y_{-i})$ 就是单点集, 所以 $M_i(x, y_{-i})$ 在 (\bar{x}, y_{-i}) 是连续的。从而, $M_i(x, y_{-i})$ 在 (\bar{x}, y_{-i}) 是开的。假设 $x^k \rightarrow \bar{x}, (y_i, y_{-i}) \in M_i(x)$, 由于 $M_i(x, y_{-i})$ 在 (\bar{x}, \bar{y}_{-i}) 对任何的 $y_{-i}^k \rightarrow \bar{y}_{-i}$ 是开的, 故存在 $y_i^k \in M_j(x^k, y_{-i}^k)$ 满足 $y_i^k \rightarrow \bar{y}_i \in M_i(\bar{x}, \bar{y}_{-i})$ 。显然, $(y_i^k, y_{-i}^k) \in M_i(x^k)$ 。所以 $M_i(x)$ 在 \bar{x} 是开的。又因为 $M(x) = M_i(x)$, 所以 $M(\cdot)$ 在是开的。

由文献[9]中定理 A2 和该文中定理 1 可以得到: $RMNIPES(x)$ 在 \bar{x} 是闭的。证明完毕。

参 考 文 献

[1] Dempe S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical program with equilibrium constraints[J]. Optimization 2003, 52(3): 333 - 359

[2] Dempe S. Foundations of Bilevel Programming [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002

[3] Bard J F. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998

[4] Migdalas A, Pardalos P M, Värbrand P. Multilevel Optimization: Algorithms and Applications[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998

[5] Shimizu K, Ishizuka Y, Bard J F. Nondifferentiable and Two-level Mathematical Programming [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997

[6] Liu Guoshang, Han Jiye. Optimality conditions for non-convex bilevel programming problems[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 1997, 10(2): 183 - 192

[7] Wang Q, Yang F M, Wang S Y, et al. Bilevel programs with multiple followers[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 2000, 13(3): 265 - 276

[8] Smart D R. Fixed Point Theorems[M]. London: Cambridge University Press, 1974

[9] Hogan W. Directional derivatives for extremal value functions with applications to the completely convex cases[J]. Operations Research, 1973, 21: 188 - 209

A new concept of bilevel programming problem with multiple followers and some properties

YANG Long-bao YANG Feng-mei

(College of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: A bilevel programming problem with multiple followers was concerned. Based on the concept of an equilibrium in Game Theory and the idea of Goal Programming, a Nash-ideal-point conception was introduced, and the new Nash conception for the problem was obtained. This is an efficient way to avoid the uncertainty caused by the multiple potential reactions. In the same time it may simplify the mathematical model. The existence of a solution is proven under some mild conditions. A property of the solution set was also discussed.

Key words: bilevel programming; multiple followers; Nash solution

(责任编辑 曾宪玉)