

旋转的 Bénard 问题中旋转轴偏离重力方向的 线性算子谱研究

周小惠 许兰喜*

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘 要: 应用数值方法研究了边界条件为双固壁, 旋转轴偏离重力方向的 Bénard 问题的线性算子谱问题。记线性化线性算子所有特征值 σ 的实部的最小值为 ξ_0 , 通过改进的 Chebyshev-tau 方法研究了 ξ_0 和临界瑞利数 R_c 与旋转偏向角 β 的关系。计算结果表明: ξ_0 和 R_c 都是 β 的减函数, 此外它们的变化还依赖于 Prandtl 数 Pr 。

关键词: 双固壁; Bénard 问题; 临界瑞利数

中图分类号: O241.82

引 言

由于 Bénard 系统可以很好解释流动稳定性理论和对流问题中的许多物理和数学方面的问题, 因而受到极大的关注。长时间以来, 人们用该系统来模拟大气层中的热对流现象, 并对该系统进行了大量的理论和实验研究^[1-2]。其中线性稳定性分析具有非常重要的意义, 它给出了不稳定的充分条件。线性稳定性分析也称为微扰分析, 它是基于研究扰动方程线性化后线性算子的谱。Chandrasekhar^[3]应用该方法主要对旋转 $\Omega = (0, 0, \Omega_z)^T$ (即绕 z 轴旋转) 的 Bénard 系统进行了分析, 并得出该旋转对基流具有稳定的作用, 即可以抑制对流的产生。杨姝娟等^[4]也得到了在此条件下扰动衰减率的下确界 ξ_0 与旋转速率 Ω_z 之间的关系, 以及该下确界与瑞利数之间的关系。但是当旋转轴偏离重力方向时, 该问题没能得到应有的关注, 所以, 以此为出发点, 本文利用改进的 Chebyshev-tau 方法详细讨论了双固壁边界条件下当 $\Omega = (\Omega_x, 0, \Omega_z)^T$ 时, 旋转轴的偏向角 β 对基流稳定性的影响, 这种情况相当于旋转轴在 xoz 平面上与 z 轴夹角为 β 。

1 旋转的 Bénard 问题数学模型的建立

本文研究的旋转 Bénard 问题模型示意图如图 1

所示。

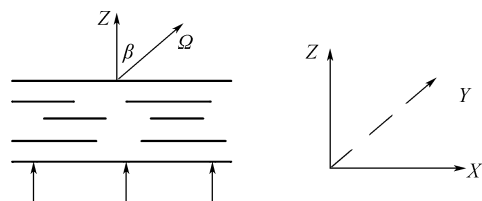


图 1 模型示意图

Fig. 1 Schematic representation of the model
直角坐标系下描写旋转 Bénard 系统的线性化方程组为^[5]

$$\begin{cases} \partial_t (-\Delta) (-\Delta_2) \varphi = -(-\Delta)^2 (-\Delta_2) \varphi + \\ \sqrt{R} (-\Delta_2) \theta + (2\Omega_x \partial_x + 2\Omega_y \partial_y + \\ 2\Omega_z \partial_z) (-\Delta_2) \psi \\ \partial_t (-\Delta_2) \psi = -(-\Delta) (-\Delta_2) \psi + (2\Omega_x \partial_x + \\ 2\Omega_y \partial_y + 2\Omega_z \partial_z) (-\Delta_2) \varphi \\ Pr \partial_t \theta = -(-\Delta) \theta + \sqrt{R} (-\Delta_2) \varphi \\ \partial_t f_1 = -(-\partial_z^2) f_1 + 2\Omega_z f \\ \partial_t f_2 = -(-\partial_z^2) f_2 - 2\Omega_z f \end{cases} \quad (1)$$

其中 $z \in (-1/2, 1/2)$, Pr 为 Prandtl 数, R 是系统控制参数瑞利数, Δ_2 为二维的拉普拉斯算子, φ, ψ, θ 为扰动项。

在线性化问题中任何一个扰动均可以表示为某些模态的叠加, 而这些模态都具有形式 $\varphi(z, t) \exp \{i(ak_1x + bk_2y)\}$, 其中 $(k_1, k_2)^T \in \mathbb{Z}^2$, 假设扰动 φ, ψ, θ 有如下形式

收稿日期: 2009-03-24

第一作者: 男, 1986 年生, 硕士生

* 通讯联系人

E-mail: xulx@mail.buct.edu.cn

$$\begin{aligned}\varphi &= \bar{\varphi}(z) \exp[i(k_1 ax + k_2 by) - \sigma t] \\ \psi &= \bar{\psi}(z) \exp[i(k_1 ax + k_2 by) - \sigma t] \\ \theta &= \bar{\theta}(z) \exp[i(k_1 ax + k_2 by) - \sigma t]\end{aligned}\quad (2)$$

由于旋转轴在 xoz 平面上与 z 轴的夹角为 β , 所以取定 $\Omega = \Omega(\sin\beta, 0, \cos\beta)^T$ 后由(1)可以得到

$$\begin{cases} (-\Delta)(-\Delta - \sigma)\varphi - \sqrt{R}\theta - \sqrt{T}(\sin\beta \partial_x + \cos\beta \partial_z)\psi = 0 \\ (-\Delta - \sigma)\psi - \sqrt{T}(\sin\beta \partial_x + \cos\beta \partial_z)\varphi = 0 \\ (-\Delta - \sigma Pr)\theta - \sqrt{R}(-\Delta_2)\varphi = 0 \\ \sigma f_1 = (-\partial_z^2)f_1 - 2\Omega_z f_2 \\ \sigma f_2 = (-\partial_z^2)f_2 + 2\Omega_z f_1 \end{cases}\quad (3)$$

这里 $T = 4\Omega^2$, 称为 Taylor 数。

因为变量 (f_1, f_2) 和变量 (φ, ψ, θ) 在方程(3)中相互独立, 前 3 个方程没有变量 (f_1, f_2) 出现, 所以只考虑由其前 3 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)(-\Delta - \sigma)\varphi - \sqrt{R}\theta - \sqrt{T}(\sin\beta \partial_x + \cos\beta \partial_z)\psi = 0 \\ (-\Delta - \sigma)\psi - \sqrt{T}(\sin\beta \partial_x + \cos\beta \partial_z)\varphi = 0 \\ (-\Delta - \sigma Pr)\theta - \sqrt{R}(-\Delta_2)\varphi = 0 \end{cases}\quad (4)$$

对应的双固壁时边界条件变为

$$\varphi = \partial_z \varphi = \psi = \theta = 0, z = \pm 1/2$$

将(2)代入到(4)中并令

$$\bar{\varphi}(z) = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 i, \bar{\psi}(z) = \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 i, \bar{\theta}(z) = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 i \text{ 得到}$$

$$\begin{cases} [\partial_z^4 - (2r^2 - \sigma)\partial_z^2 + r^2(r^2 - \sigma)]\bar{\varphi}_1 - \sqrt{R}\bar{\theta}_1 - \sqrt{T}\cos\beta \partial_z \bar{\psi}_1 + \sqrt{T}\sin\beta \bar{\psi}_2 = 0 \\ [\partial_z^4 - (2r^2 - \sigma)\partial_z^2 + r^2(r^2 - \sigma)]\bar{\varphi}_2 - \sqrt{R}\bar{\theta}_2 - \sqrt{T}\cos\beta \partial_z \bar{\psi}_2 - \sqrt{T}\sin\beta \bar{\psi}_1 = 0 \\ (r^2 - \sigma - \partial_z^2)\bar{\psi}_1 - \sqrt{T}\cos\beta \partial_z \bar{\varphi}_1 + \sqrt{T}\sin\beta \bar{\varphi}_2 = 0 \\ (r^2 - \sigma - \partial_z^2)\bar{\psi}_2 - \sqrt{T}\cos\beta \partial_z \bar{\varphi}_2 + \sqrt{T}\sin\beta \bar{\varphi}_1 = 0 \\ (r^2 - \sigma Pr - \partial_z^2)\bar{\theta}_1 - r^2 \sqrt{R}\bar{\varphi}_1 = 0 \\ (r^2 - \sigma Pr - \partial_z^2)\bar{\theta}_2 - r^2 \sqrt{R}\bar{\varphi}_2 = 0 \end{cases}\quad (5)$$

边界条件为

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \partial_z \bar{\varphi}_1 = \partial_z \bar{\varphi}_2 = \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = 0, z = \pm 1/2$$

其中 $r = a^2 k_1^2 + b^2 k_2^2, c = k_1 a$ 。

2 数值方法计算旋转的 Bénard 问题

本文采用了改进的 Chebyshev-tau 方法^[6]对方程组(5)进行数值计算。与一般的 tau 方法相比, Chebyshev-tau 方法具有更快的收敛速度, 并且它消去了伪特征值, 因而显得更加优越。

将此方法运用到方程组(5)上时, 令 $\phi_1 = \partial_z^2 \varphi_1, \phi_2 = \partial_z^2 \varphi_2$ 后, 对 $\phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$ 分别进行 Chebyshev 展开, 将其带入到(5)中并进行推导和化简后, 就可以得到 $Tx = \sigma Ax$, 其中 T 和 A 为含有 r, c, R, T, Pr 和 Chebyshev 展开项的个数 N 的 $6N+2$ 阶的方阵, x 为 $\phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$ 展开后的展开项系数构成的向量, 给定初始条件后, 就可以从中解出特征值 σ , 从而得到其实部的最小值 ξ_0 。另外还可以算出在本方法中被作为收敛指数的 tau 系数, 由于该问题中计算出来的 tau 系数很小, 所以可以看出该算法的收敛性和稳定性都非常良好。

为确保计算的精确性, 将 Chebyshev 多项式展开至第 15 项。应用 MATLAB7.0 对计算结果不断的观察后选择 r 的循环为 0 到 15, 步长为 0.05, 由于 $r = a^2 k_1^2 + b^2 k_2^2, c = ak_1$, 所以 c 的循环为 0 到 r , 步长亦为 0.05。

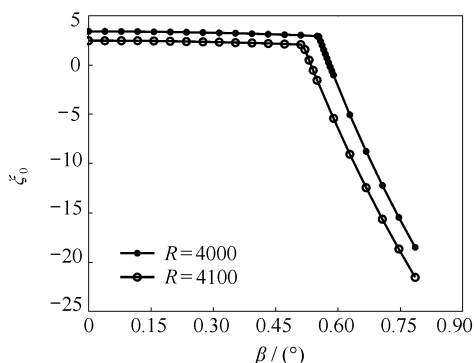
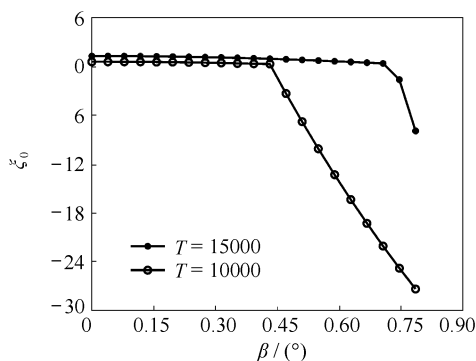
3 数值计算的结果与讨论

3.1 扰动衰减率下确界 ξ_0 与旋转偏向角 β 的关系

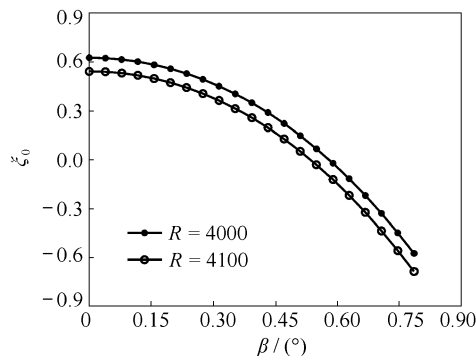
当 $Pr_{\text{汞}} = 0.025$ 时, 下面对取定 $T_1 = 10^4, R$ 分别取 $R_1 = 4000, R_2 = 4100$ 和取定 $R_3 = 4300, T$ 分别取 $T_1 = 10^4, T_2 = 1.5 \times 10^4$ 两种情况进行数值计算从而得到扰动衰减率的下确界 ξ_0 与旋转偏向角 β 之间的关系, 如图 2 和图 3。

从图 2 可以看出, 当取 $Pr_{\text{汞}}$ 时, 取定 T 和 R 后, ξ_0 是 β 的减函数, 即随着旋转偏向角的逐渐增大, 流动越来越容易失稳, 还可看出, R 值越大, 所求得的 ξ_0 越小, 即随着瑞利数的增大, 流动更容易失稳。

从图 3 可以看出, 当取 $Pr_{\text{汞}}$ 时, 取定 T 和 R 后, ξ_0 是 β 的减函数, 还可看出, T 值越大, 所求得的 ξ_0 越大, 即旋转对基流具有稳定的作用。从图 2 和图 3 对比看出当 β 较小时, ξ_0 变化甚微, 当 β 超过某个临界值时, ξ_0 会急剧减小, 计算表明该临界值与瑞利数和 Taylor 数有关。

图 2 $Pr=0.025, T=10^4$ 时 ξ_0 与 β 的关系图Fig. 2 The dependence of ξ_0 on β when $Pr=0.025, T=10^4$ 图 3 $Pr=0.025, T=4300$ 时 ξ_0 与 β 的关系图Fig. 3 The dependence of ξ_0 on β when $Pr=0.025, T=4300$

当 $Pr_{\text{水}}=7.5$ 时,下面对取定 T_1, R 分别取 R_1, R_2 和取定 R_3, T 分别取 T_1, T_2 两种情况进行数值计算从而得到 ξ_0 与 β 之间的关系,如图 4 和图 5。

图 4 $Pr=7.5, T=10^4$ 时 ξ_0 与 β 的关系图Fig. 4 The dependence of ξ_0 on β when $Pr=7.5, T=10^4$

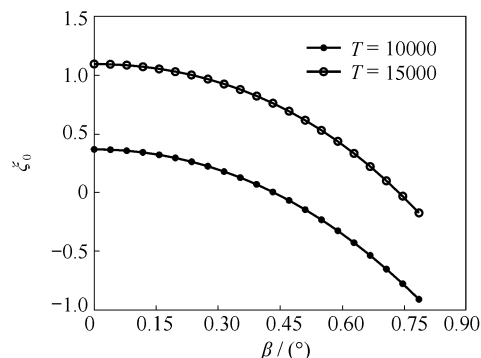
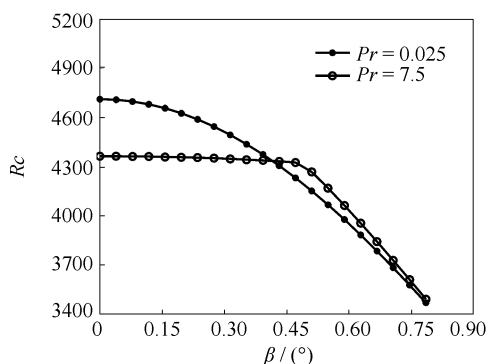
从图 4 和图 5 可以看出,当取 $Pr_{\text{水}}$ 时,取定 T 和 R, ξ_0 仍是 β 的减函数,还可以看出, R 越大, ξ_0 越小, T 越大, ξ_0 越大。

由图 2 和图 4 以及图 3 和图 5 的对比可以看出,在取定了同样的 R, T 后,随着 β 的增加大 Prandtl 数时曲线变化的更加平稳,这说明 ξ_0 的大小还依赖于 Prandtl 数 Pr 。

3.2 临界瑞利数 R_c 与旋转偏向角 β 的关系

在取定 T_1 后,就 $Pr_{\text{汞}}$ 和 $Pr_{\text{水}}$ 这两种情况进行数值计算从而得到线性稳定的临界瑞利数 R_c 与偏向角 β 之间的关系。

在图 6 中可以看出,当取定 Pr 和 T 后, R_c 是 β 的减函数,即随着旋转偏向角的逐渐增大,流动越来越容易失稳,还可以看出,存在一个临界角度 β^* ,当 $\beta < \beta^*$ 时,小 Prandtl 数情况下求得的 R_c 要比大 Prandtl 数时的大,但是当 $\beta > \beta^*$ 时,情况正好相反。这就说明临界瑞利数 R_c 还依赖于 Prandtl 数 Pr 。

图 5 $Pr=7.5, T=4300$ 时 ξ_0 与 β 的关系图Fig. 5 The dependence of ξ_0 on β when $Pr=7.5, T=4300$ 图 6 $T=10^4$ 时 R_c 与 β 的关系图Fig. 6 The dependence of R_c on β when $T=10^4$

4 结论

本文研究了边界条件为双固壁,旋转轴偏离重力方向的 Bénard 系统。在取定了其他参数后,扰动衰减率的下确界 ξ_0 和临界瑞利数 R_c 都是旋转轴偏向角 β 的减函数,这说明随着旋转轴的偏向角的

增大,流动越来越容易失稳,并且 ξ_0 和 R_c 的大小还依赖于 Prandtl 数 Pr 。当取定 Pr, T, β 后, ξ_0 随 R 的增大而减小;当取定 Pr, R, β 后, ξ_0 随 T 的增大而增大。

参考文献:

- [1] 许兰喜. 高等应用数学——非线性分析[M]. 北京:化学工业出版社,2003: 106.
Xu L X. Higher applied mathematics—nonlinear analysis [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2003: 106. (in Chinese)
- [2] Galdi G P, Straughan B. A nonlinear analysis of the stability effect of rotation in the Bénard problem[J]. London: Proc Royal Soc A, 1985, 402:257–283.
- [3] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability[M]. New York: Dover Publications, 1961: 1–143.
- [4] 杨姝娟,李俊华,许兰喜. 旋转的 Bénard 问题中线性算子谱的研究[J]. 水动力学研究与进展: A 辑,2008,23(3): 239–243
Yang S X, Li J H, Xu L X. On the estimate of the decay rate of disturbances of Bénard Problem[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics: A, 2008,23(3): 239–243. (in Chinese)
- [5] Xu L X. On the nonlinear stability of some hydrodynamic problems[D]. Bayreuth: Department of Mathematics and Physics, Bayreuth University, 1997: 3–19.
- [6] David R G, Steven A T, Rod W D. A modified tau spectral method that eliminates spurious eigenvalues[J]. Journal of Computational Physics, 1989, 80: 137–167.

On the spectrum of linearized operator of rotating Bénard problem when the rotation axis and gravity act in different directions

ZHOU XiaoHui XU LanXi

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The linearized spectral problem of rotating Bénard convection with rigid boundary conditions when rotation frequency Ω and gravity g act in different directions is studied. Let ξ_0 be the minimum value of the real parts of the eigenvalues σ in the spectrum problem ($\xi_0 = \min \{ \operatorname{Re} \sigma \}$). The dependence of ξ_0 and the critical Rayleigh number R_c on the angle β between Ω and g is given for some parameters by the modified Chebyshev-tau method. It is shown that both ξ_0 and R_c decrease with increasing angle β . Moreover, ξ_0 is dependent on the Prandtl number.

Key words: rigid boundary; Bénard convection; Rayleigh number