

风险谱函数的设计与选择

陶敏静 任小磊 杨永愉*

(北京化工大学 理学院, 北京 100029)

摘要: 研究了风险谱函数的构造及谱风险度量在金融市场中的应用。根据风险厌恶系数和效用函数理论,提出了一种风险谱函数的设计构造方法,得到了指数风险谱函数和幂风险谱函数。实证分析表明,运用这两种谱函数所得到的谱风险度量的结果,差别并不大。最后,提出了以谱风险度量为目标函数的投资组合优化配置模型,并讨论了模型的求解结果。

关键词: 谱风险度量; 风险厌恶系数; 指数风险谱函数; 幂风险谱函数; 投资组合配置

中图分类号: F830.9

引言

风险中的价值(VaR)是 20 世纪 90 年代被广泛应用的一种金融风险度量方法,它成功地将投资组合的风险归纳为单一的数量指标来衡量,使风险度量的结果更便于理解和使用。VaR 表示的是,在正常市场条件下,对某一给定的置信水平,投资者所持有的有价证券或投资组合在一定时期内可能遭受的最大损失值^[1]。由于 VaR 并不满足次可加性,所以人们一直在 VaR 的基础上,寻求更加理想的风险度量方法或工具。Artzner 等^[2]提了风险度量的公理化体系,为金融风险的度量提供了理论框架。公理化体系要求风险度量满足相容性条件——单调性、次可加性、正齐性、变换不变性,有些文献甚至直接将相容性条件作为风险度量的定义^[3-4]。有了风险度量的定义之后,人们开始寻找 VaR 的相容性扩展,提出了期望亏损(ES),它可以看作是一定区间内绝对 VaR 的平均值。ES 是最小的满足相容性要求的风险度量^[5]。与 ES 相比,谱风险度量(SRM)则更具有一般性,它可以看作是 ES 的加权平均^[6]。SRM 除了满足相容性的四条公理化条件之外,还满足规律不变性和共单调可加性^[6],同时,由 SRM 构成的空间是完备的^[3]。在实际应用中,SRM 的风险谱函数,能够很好地反映投资者对风险的厌恶程度。

本文基于风险厌恶系数和效用函数理论给出了风险谱函数的一种构造方法,得到了指数谱风险度量量和幂谱风险度量。并将指数谱风险度量应用于投资组合的优化配置模型。

1 谱风险度量的基本概念

1.1 基本概念

定义 1 设 V 是实值随机变量集合,满足下列条件的函数 $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}$ 被称作风险度量

(1)单调性: $X, Y \in V, Y \geq X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$

(2)次可加性:

$X, Y, X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

(3)正齐性:

$X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$

(4)变换不变性:

$X \in V, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a$ ^[3]

定义 2 设函数 $\phi \in L^1([a, b])$,

(1)若 ϕ 满足 $\forall I \subset [a, b]$ 有 $\int_I \phi(p) dp \geq 0$, 则称函数 ϕ 是正的;

(2)若对 $\forall q \in (a, b), \forall \varepsilon > 0$ 使得 $\int_{q-\varepsilon}^q \phi(p) dp \leq \int_q^{q+\varepsilon} \phi(p) dp$, 则称函数 ϕ 是递增的;

(3)函数 ϕ 的范数为 $\|\phi\| = \int_a^b |\phi(p)| dp$ 。

定义 3 $L^1([0, 1])$ 中的元素 ϕ 若满足是正的, 递增的且范数为 1, 则称函数 ϕ 是容许的。

定义 4 设随机变量 X 有累积分布函数 $F_X(x)$, 对于一个容许性函数 $\phi \in L^1([0, 1])$, 称

收稿日期: 2008-07-15

第一作者: 女, 1986 年生, 硕士生

* 通讯联系人

E-mail: yangyongyu1765@sina.com

$$M_\phi(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(p) \phi(p) dp^{[7]} \quad (1)$$

为由函数 ϕ 生成的谱风险度量(SRM),其中 ϕ 称为风险谱函数,也称为风险厌恶函数。

谱风险度量满足相容性和风险谱函数满足容许性是等价的。

定理 1 谱风险度量能成为风险度量的充分必要条件是风险谱函数是容许的。

证明:充分性。因为 ϕ 是容许的,因此由 $\phi(p)$ 可以得到 $[0,1]$ 区间上的测度 $\mu(\alpha)^{[3]}$,使得

$$\phi(p) = \int_p^1 d\mu(\alpha) \text{ 或 } d\mu(\alpha) = d\phi(p)$$

$$M_\phi(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(p) \phi(p) dp = \int_0^1 F_X^{-1}(p) \int_p^1 d\mu(\alpha) dp = \int_0^1 d\mu(\alpha) \int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp = \int_0^1 d\mu(\alpha) (1-\alpha) ES_\alpha(x)$$

其中, $ES_\alpha(x) = (1-\alpha)^{-1} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp^{[7]}$ 。

将 $(1-\alpha)ES_\alpha(x)$ 视为文献[3]中命题 2.2 的 ρ_α ,即

$M_\phi(X) = \int_0^1 d\mu(\alpha) \rho_\alpha$, 由该命题结论可知, $M_\phi(X)$ 是风险度量。

必要性,可参见文献[3]。

1.2 谱风险度量的离散表达

定义 4 给出了基于分位数函数,即累积分布函数的反函数的谱风险度量表达式,这是一个理论表达式。在实际计算 M_ϕ 时,是通过样本数据计算其估计量 $M_\phi^{(N)}$,这就是谱风险度量的离散表达式。

定义 5 设 X_1, X_2, \dots, X_N , 其中 $N \in \mathbf{N}$ 是来自随机变量 X 的独立同分布样本, $\phi_{i=1,2,\dots,N} \in \mathbf{R}$ 是一个 N 元数组,统计量

$$M_\phi^{(N)}(X) = \sum_{i=1}^N X_{i:N} \phi_i \quad (2)$$

称为由 $\phi_{1,2,\dots,N}$ 生成的谱风险度量,其中 $X_{i:N}$ 为样本的顺序统计量。

需要指出的是,如果将连续函数 ϕ 看成是某一分布的概率密度,那么式(1)是分位数函数期望,即 $E[F_X^{-1}(X)]$ 。因此,当分布为离散型时,相应概率就是 $\phi_{i=1,2,\dots,N}$,此时的分位数函数是由顺序统计量构成的阶梯函数。所以,离散状态下的谱风险度量,如式(2)所示。

离散谱函数的容许性条件为:

定义 6 1 个 N 元数组 $\phi_{i=1,2,\dots,N} \in \mathbf{R}$ 若满足以下 3 个条件,则称此 N 元数组是容许性的。

(1) $\phi_i \geq 0, (i=1,2,\dots,N)$, 即 $\phi_{i=1,2,\dots,N}$ 是正的;

(2) 若 $i < j$, 则有 $\phi_i < \phi_j$, 即 $\phi_{i=1,2,\dots,N}$ 是递增的;

$$(3) \sum_{i=1}^N \phi_i = 1.$$

对于离散型的谱风险度量,也存在类似于定理 1 的结论。

定理 2 统计量 $M_\phi^{(N)}(X)$ 是一个谱风险度量的充分必要条件是 N 元数组 $\phi_{i=1,2,\dots,N} \in \mathbf{R}$ 是满足容许性的。^[3]

2 风险谱函数的构造

根据风险厌恶系数概念与效用函数理论,构造符合容许性条件的谱函数,使得谱风险度量的结果依赖于投资者对风险的厌恶程度,这是谱风险度量与其他金融风险度量相比较的最重要的特色。

定义 7 设 $u(c)$ 为效用函数,则称

$$ARA_u(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)} \quad (3)$$

为绝对风险厌恶系数。

定义 8 设 $u(c)$ 为效用函数,则称

$$RRA_u(c) = -\frac{cu''(c)}{u'(c)} \quad (4)$$

为相对风险厌恶系数。^[8]

式(3)和(4)表明,风险厌恶系数是用效用函数来定义的,它与效用函数的形式与收益的大小有关,而与损失无关。因此,令表达式(3)和(4)中的绝对/相对风险厌恶系数取定值,以此反映投资者对风险的态度,同时解出相应的效用函数。基于这样的效用函数,来构造符合容许性条件的风险谱函数。

2.1 指数风险谱函数

首先假定绝对风险厌恶系数为一个常数值,即

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)} = a,$$

其中 $a > 0$ 。

设 $y(c) = u'(c)$, 可得效用函数

$$u = \frac{a_1}{-a} e^{-ac} + a_2$$

设 $\phi(p) = \lambda e^{-a(1-p)}$

当 $\lambda > 0$ 时, $\phi(p)$ 在 $[0,1]$ 上满足风险谱函数容许性的前 2 个条件,通过系数调整,使其满足第 3 个条件(即范数为 1)。

$$\|\phi\| = \int_0^1 |\phi| dp = \lambda \int_0^1 e^{-a(1-p)} dp = \frac{\lambda}{a}$$

$$e^{-a(1-p)}|_0^1 = \frac{\lambda}{a}(1 - e^{-a}) = 1$$

故可得 $\lambda = \frac{a}{1 - e^{-a}}$, 由此得到指数风险谱函数

$$\phi(p) = \frac{ae^{-a(1-p)}}{1 - e^{-a}} \quad (5)$$

绝对风险厌恶系数 a 的取值越大, 表示投资者对风险的厌恶程度越高, 从而对风险的规避就有更高的要求。

与式(5)相应的离散表达形式如下:

设 $\phi_i = \lambda e^{-a\left(1 - \frac{i}{N}\right)}$, 其中 $\lambda > 0$ 。显然, ϕ_i 为正的且递增的, 再由 $\sum_i \phi_i = 1$ 可得

$$\lambda \sum_i e^{-a\left(1 - \frac{i}{N}\right)} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sum_i e^{-a\left(1 - \frac{i}{N}\right)}}$$

其中 N 是样本容量。

由此得到指数风险谱函数的离散表达式

$$\phi_i = \frac{e^{-a\left(1 - \frac{i}{N}\right)}}{\sum_i e^{-a\left(1 - \frac{i}{N}\right)}} \quad (a > 0)$$

2.2 幂风险谱函数

从相对风险厌恶系数出发, 采用同样的方法, 可以得到幂风险谱函数。

设 $y(c) = u'(c)$, 令相对风险厌恶系数为常数 a , 则有

$$-\frac{cu''(c)}{u'(c)} = a \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a \frac{dc}{c} \Rightarrow y = \frac{a_1}{c^a}$$

当 $a \neq 1$ 时, $u = \frac{a_1}{1-a} c^{1-a}$ 。

$$\text{设 } \phi(p) = \lambda(1-p)^{-a} \quad (6)$$

显然, 式(6)中的 $\phi(p)$ 在 $[0, 1]$ 上满足正的和递增的条件。根据范数为 1 的条件, 有

$$\|\phi\| = \int_0^1 |\phi(p)| dp = \lambda \int_0^1 (1-p)^{-a} dp = -\frac{\lambda}{(1-a)}(1-p)^{1-a}|_0^1 = \frac{\lambda}{(1-a)} = 1$$

故 $\lambda = (1-a)$, 由此可得幂风险谱函数的表达式

$$\phi(p) = (1-a)(1-p)^{-a} \quad (0 < a < 1)$$

为得到相应的离散表达式, 设 $\phi_i = \lambda \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{-a}$, 其中 $\lambda > 0$ 。显然, ϕ_i 为正的且递增的, 再由 $\sum_i \phi_i = 1$ 可得

$$\lambda \sum_i \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{-a} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sum_i \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{-a}}$$

这样, 幂风险谱函数的离散表达式为

$$\phi_i = \frac{\left(1 - \frac{i}{N}\right)^{-a}}{\sum_i \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{-a}} \quad (0 < a < 1)$$

3 实证分析

3.1 谱风险度量中不同谱函数的比较

选取上证综合指数从 2005-11-28 到 2008-04-29 中每个交易日的收盘值, 数据采自大智慧证券信息平台 Internet 版 5.6。采用日对数收益率, 对上海证券交易所作谱风险度量, 考察不同的谱风险函数对 SRM 的结果所产生的影响。

图 1(a) 与 (b) 分别给出了采用两种不同的风险谱函数所得到的 SRM 与相应的风险厌恶系数 a 的变化关系。需要指出的是, 不同的风险厌恶系数所对应的横坐标尺度是不同的。

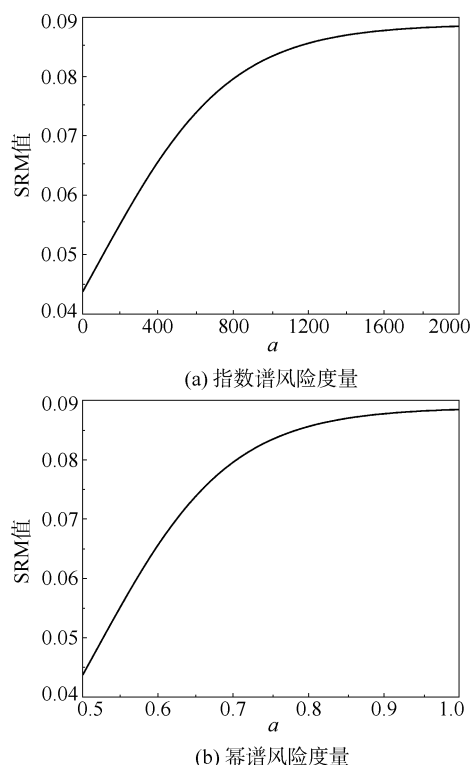


图 1 不同风险谱函数下上证综指的 SRM 值

Fig. 1 The SRM value of the Shanghai Trading Desk calculated using different risk spectra

图 1 表明, 两种风险谱函数所得的 SRM 值都随着风险厌恶系数 a 的增加而增大, 而且图 1(a) 与

图 1(b) 曲线变化趋势是基本一致的。这说明虽然风险厌恶系数不同,但是两者所得到的 SRM 值差别并不大。必须指出,在作风险比较时,应该选择相同的风险谱函数。

3.2 投资组合的优化配置

金融风险度量的重要应用之一,是构建投资组合的优化配置模型。本文研究如何将 SRM 应用于投资组合配置的最优化问题。假设有 n 支股票,编号为 $1, \dots, n$, 且编号为 i 的股票历史收益率为 $\{r_1^i, \dots, r_T^i\}$ 。假设投资组合的配置向量为 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 满足 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 那么投资组合收益率可表作: $\Pi(x)_t = x_1 r_t^1 + \dots + x_n r_t^n, 1 \leq t \leq T$, 相应的顺序统计量: $\Pi(x)_{1:T} \leq \Pi(x)_{2:T} \leq \dots \leq \Pi(x)_{T:T}$, 由式 (2) 可得离散谱风险度量:

$M_\phi^T = \sum_{t=1}^T \Pi(x)_{t:T} \phi_t$ 。选择 ϕ_t 为指数风险谱, 即

$$M_\phi^T = \sum_{t=1}^T \Pi(x)_{t:T} \frac{e^{-a \frac{t}{T}}}{\sum_{t=1}^T e^{-a \frac{t}{T}}}$$

投资组合的优化配置模型表作

$$\begin{aligned} \min \quad & M_\phi^T \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Pi(x)_t \geq r_0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中, r_0 为投资组合的期望收益率, 这是由投资者的个人偏好决定的值, 但是它的取值只有介于这 n 支股票的最大平均收益率和最小平均收益率之间才有意义。

在算例中, 选择了 4 支股票: 万科 A、中信证券、工商银行和贵州茅台, 构成一个纯股票型的投资组合。数据为 2007 年 2 月至 2008 年 5 月的 301 个交易日的收盘价, 采用日对数收益率, 数据的描述统计结果如表 1 所示。每只股票收益率的风险度量采用指数谱风险度量, 风险厌恶系数为 50。每支股票的谱风险度量值见表 1 的最后一行。

根据表 1 中给出的各支股票收益率的均值, 设定优化模型 (7) 中的投资组合期望收益率 r_0 的取值依次为: $-0.000042, 0.0006, 0.0012, 0.0014, 0.0016, 0.00165, 0.0017, 0.00175, 0.0018,$

表 1 4 支股票的对数收益率统计描述

Table 1 Descriptive statistics for returns of the four stocks

股票	均值	标准差	峰度	偏度	SRM*
万科 A	0.0023	0.0383	0.0873	3.16348	0.0837
中信证券	-0.000042	0.058	-6.515	3.0714	0.1852
工商银行	0.000648	0.0266	0.4234	4.6434	0.0606
贵州茅台	0.001885	0.0271	0.616	3.6112	0.0495

* $a = 50$

0.00185, 0.0019, 0.00195, 0.002, 0.00205, 0.0021, 0.00215, 0.0022, 0.00225, 0.0023 和 0.00234, 共计 20 个。运用 Matlab6.5 的优化工具包, 对每一个期望收益率的取值, 求解式 (7), 得到 20 组投资组合的优化配置结果, 见表 2 所示。

表 2 20 组规划的最优化结果

Table 2 Optimization results of twenty programs with different expected returns

r_0	x_1	x_2	x_3	x_4	SRM	实际 r_0
-0.000042	0.0874	0.0234	0.3232	0.5661	0.0370	0.00148
0.00060	0.0874	0.0234	0.3232	0.5661	0.0370	0.00148
0.00120	0.0874	0.0234	0.3232	0.5661	0.0370	0.00148
0.00140	0.0982	0.0225	0.3001	0.5791	0.0370	0.00151
0.00160	0.1239	0.0212	0.2434	0.6115	0.0372	0.00160
0.00165	0.1357	0.0192	0.2104	0.6347	0.0376	0.00165
0.00170	0.1555	0.0008	0.2061	0.6377	0.0382	0.00170
0.00175	0.1787	0	0.1755	0.6458	0.0389	0.00175
0.00180	0.2110	0	0.1471	0.6419	0.0397	0.00180
0.00185	0.2330	0	0.1148	0.6522	0.0406	0.00185
0.00190	0.2499	0	0.0807	0.6694	0.0418	0.00190
0.00195	0.2700	0	0.0478	0.6822	0.0431	0.00195
0.00210	0.4677	0	0	0.5323	0.0497	0.00210
0.00215	0.5765	0	0	0.4235	0.0554	0.00215
0.00220	0.6853	0	0	0.3147	0.0622	0.00220
0.00225	0.7941	0	0	0.2059	0.0694	0.00225
0.00230	0.9028	0	0	0.0972	0.0768	0.00230
0.00234	1	0	0	0	0.0837	0.00234

由表 2 可知, 当投资者对投资组合的收益率要求不高时 (不大于 0.0012), 最优化的结果保持恒定不变, 而且此时式 (7) 中关于“期望收益率不小于 r_0 ”这一约束条件不起作用。这说明如果将投资组合进行合理配置, 不仅能降低风险, 而且还能获得一定的收益 (该收益远大于 4 支股票中收益均值最低的中信证券)。随着投资者对收益的期望值增大 (特别是超过 0.0016) 时, 式 (7) 中的约束条件 r_0 的作用, 逐渐凸现出来, 投资组合的配置比例倾向于收益率均值高的股票, 当约束条件 r_0 的值超过一定范围 (表 2 中为大于 0.0017) 时, 4 支股票中收益率均值

为负的中信证券的配置降为0。

由表1,表2可得以下结论:

(1)中信证券是投资组合中最不被看好的一支股票。其SRM值最大且平均收益率为负值,所以 x_2 一直都是配置向量的4个值中最小的,几乎等于0。

(2)当投资者对期望收益率 r_0 的要求很低而更关注风险时, x_3 和 x_4 的值比较大,也就是说投资者更多地投资于风险较小的工商银行和贵州茅台这两支股票。

(3)随着投资者对 r_0 要求的增加,其承受风险的能力也随之增加, x_1 的值逐渐增大,即投资者更倾向于收益率最高,风险较大的万科A。当收益期望值 r_0 达到并超过万科A的收益率均值时,整个投资比例都集中在股票万科A上,而不会给其他股票作任何的投资。表2中的最后一行,是根据每一个配置向量计算得到的投资组合的平均收益率,它与给定的收益期望值 r_0 保持一致。

4 结论

(1)本文从效用函数和风险厌恶系数出发,构造了两种风险谱函数。只要选择恰当的风险厌恶系数,无论是选择幂风险谱函数还是指数风险谱函数,都对SRM值影响不大。

(2)以极小化谱风险度量为目标函数的优化配置模型中,投资者的期望收益率对模型结果有显著影响。如果选择合适的期望收益率,不仅风险小,还

能获得不错的收益。随着投资者期望收益率的增加,要承担的风险也随之增大。

(3)采用谱风险度量对投资组合进行资产配置,得到了合理的优化配置,与实际情况吻合。这反映了选择不同的风险厌恶系数,能够使谱风险度量满足对风险厌恶程度不同的投资者的需求。

参考文献:

- [1] Crouhy M, Galai D, Mark R. 风险管理[M]. 曾刚, 罗晓军, 卢爽, 译. 北京: 中国财政经济出版社, 2005.
- [2] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, et al. Coherent measures of risk[J]. Mathematical Finance, 1999, 9(3): 203–228.
- [3] Acerbi C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7):1505–1518.
- [4] Szegö G. Measures of risk[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7):1253–1272.
- [5] Acerbi C, Tasche D. On the coherence of expected shortfall[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7): 1487–1503.
- [6] Adam A, Houkari M, Laurent J P. Spectral risk measures and portfolio selection[J]. Journal of Banking and Finance, 2008, 32(9):1870–1882.
- [7] Tasche D. Expected shortfall and beyond[J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26(7):1519–1533.
- [8] Cotter J, Dowd K. Exponential spectral risk measures[J]. The Icfai Journal of Financial Economics, 2007, 5(4):57–66.

Construction and choice of risk spectrum function

TAO MinJing REN XiaoLei YANG YongYu

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: We focus on the construction of risk spectra and the application of spectral risk measures to the financial markets. According to the risk aversion coefficient and the utility theory, we demonstrate a method to construct a risk spectrum and set up two forms of spectra, the exponent risk spectrum and the power risk spectrum. Subsequent empirical tests showed that different selections of the two functions have a negligible effect on the value of the spectral risk measure. Finally, we optimize the allocation of a portfolio based on spectral risk measure. The optimization results are fully explained.

Key words: spectral risk measure; risk aversion coefficient; exponent risk spectrum; power risk spectrum; portfolio selection