第 37 卷 第 1 期　　北京化工大学学报(自然科学版)　　Vol. 37, No. 1
2010 年　　Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science)　　2010

基于利率期限结构模型的净现值公式

周荣喜　车　君
(北京化工大学 经济管理学院, 北京　100029)

摘　要: 针对目前净现值计算公式中通常使用固定折现率的情形,提出将折现率分为动态无风险折现率和动态风险折现率。利用国债利率期限结构模型确定无风险折现率,给出了四种情形下的净现值计算公式,并通过两个数值算例给予具体说明。修正后的净现值公式能够对任意时刻的现金流进行准确折现,更加符合投资项目评价的实际。

关键词: 净现值; 动态无风险折现率; 国债利率期限结构; 多项式样条函数
中图分类号: F830.59

引　言

净现值(net present value, NPV)在项目经济评价等方面应用广泛。通常,它是按行业的基准收益率或设定的折现率,将项目计算期内各年净现金流量折现到建设期初的现值之和,是反映项目在整个计算期内的获利能力的综合性指标,其传统表达式为:

$$V = \sum_{t=0}^{n} (I_t - O_t)(1 + r_0)^{-t} \tag{1}$$

其中,V 表示净现值;I_t 表示第 t 年的现金流入;O_t 表示第 t 年的现金流出(包括该年的投资额);r_0 表示基准折现率;n 表示项目寿命。

诸多文献基于式(1)对净现值进行了研究[1-5]。而式(1)中的 r_0 是一个常数,这是有问题的。实际上,文献[2-3,5]从不同角度提出式(1)中的折现率应考虑投资者的风险态度等问题,但他们并没有提出有效的解决方法。

文献[6]对于随机型现金流,提出采用熵值作为度量投资风险的数量指标,给出了风险投资的净现值(率)法中风险补偿率的定值法。文献[7]将其应用到房地产投资项目的净现值计算问题。虽然文献[6-7]没有给出折现率确定的方法,但是考虑到了风险补偿,为净现值计算提供了新思路。文献[8]指出式(1)中的 r_0 应该是一个关于投资年限的变量 $r_0(t)$,并给出了一个净现值的修正计算公式

$$V' = \sum_{t=0}^{n} (I_t - O_t)(1 + i_0(t))^{-t} \tag{2}$$

$$i_0(t) = (1 + Pf)^t (1 + i'_0) - 1 \tag{3}$$

其中,V' 表示修正净现值;$i_0(t)$ 表示第 t 年所要求的投资收益率;f 表示投资项目评价期间的通货膨胀率;P 表示投资者预期的项目外部风险系数;i'_0 为行业基准收益率。

式(2)和(3)将 $i_0(t)$ 视为一个与时间有关的变量,将其转换成两部分求解,其中一部分与通货膨胀率、投资者预期的项目外部风险系数有关;另一部分为行业基准收益率。虽然 P、f、i'_0 具有主观性,但这种思路是可取的。

本文认为无风险折现率应该是与时间有关的一个变量。式(1)和(3)中的行业基准折现率存在问题:式(1)没有考虑未来现金流量的时间因素和风险因素而使用统一固定折现率;式(3)基准折现率实际上已经包含风险因素,如果再加上风险折现率,相当于重复计算。本文将折现率分解为两部分:动态无风险折现率和动态风险折现率,并提出利用国债利率期限结构模型来确定动态无风险折现率,从而对净现值公式进行了重新修正,并给出了四种情形下净现值的计算公式。

1　基于多项式样条函数的净现值公式

利率期限结构是指在相同的风险水平下,利率与到期期限之间的数量关系,或者说是理论上的零

收稿日期: 2009-07-16
基金项目: 国家自然科学基金(70701003);北京化工大学教改项目(B50840)
第一作者: 男,1972 年生,教授,博士
E-mail: zrx103@126.com

息票债券收益率曲线。它是资产定价、金融产品设计、套期保值、套利以及投资等的基础[9]。估计利率期限结构的模型通常分为：均衡模型、无套利模型和曲线拟合法。本文采用文献[9]构建的多项式样条函数模型来拟合出利率期限结构，以此来确定固定折现率中的动态无风险折现率。

1.1　多项式样条折现函数

假设 $B(t,s)$ 表示动态折现（贴现）因子，即表示在时间 s 支付 1 元零息票国债在时间 t 的价格，显然 $B(t,t)=1$，用 $t=0$ 表示现在时刻，且假设 $B(0,s)=B(s)$。通常的三次多项式样条折现函数的简化形式为

$$B(s)=\begin{cases}B_{t_1}(s)=1+c_1s+b_1s^2+a_1s^3,\ s\in[0,t_1]\\ B_{t_i}(s)=B_{t_1}(s)+\sum\limits_{j=2}^{i}(a_j-a_{j-1})(s-t_{j-1})^3\\ s\in[t_{i-1},t_i],i=2,\cdots,n\end{cases}\tag{4}$$

当不存在套利机会时，未来发生的一系列确定性现金流的现值一定等于它们各自折现值之和。因此，如果知道折现因子，就可以对产品定价，当然也就可以求得项目的净现值。应用时必须借助息票国债的市场价格来推出零息票国债利率期限结构。

1.2　零息票国债利率期限结构模型

假设：n 表示用于估计零息票国债利率期限结构的息票国债数目；T_j 表示第 j 种息票国债的到期期限，$j=1,\cdots,n$；$\boldsymbol{P}_t^j$ 表示第 j 种息票国债在时间 t 的市场价格，$\boldsymbol{P}_t=(\boldsymbol{P}_t^j)$ 表示其市场价格向量；$\widehat{\boldsymbol{P}}_t^j$ 表示第 j 种息票国债在时间 t 的理论价格，$\widehat{\boldsymbol{P}}_t=(\widehat{\boldsymbol{P}}_t^j)$ 表示其理论价格向量；F_s^j 表示第 j 种息票国债在时间 s 支付的利息或本息和，$s\geqslant t$；α_l^j 表示第 j 种息票国债产生现金流的时间，$l=1,\cdots,M_j$，M_j 表示现金流产生的次数，且 $\alpha_{M_j}^j=T_j$；$B(0,s)$ 和 $B(s)$ 含义同前；$\boldsymbol{\beta}$ 表示要估计折现函数的系数向量；$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ 表示在多元线性样条回归下 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计值；$\boldsymbol{Q}$ 表示所建立的多项式样条回归模型中的系数矩阵；$R(s)$ 表示距现在 $t=0$ 为 s 时刻且以连续复利计息的零息票国债利率。因此，有

$$\widehat{\boldsymbol{P}}_t^j=\sum_{s=\alpha_1^j}^{T_j}F_s^jB(t,s),\ j=1,\cdots,n$$

国债的市场价格与理论价格关系可表为

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_t=\widehat{\boldsymbol{P}}_t+\varepsilon,\ \boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_j,\cdots,\varepsilon_n)^{\mathrm T}\\ \mathrm{E}(\varepsilon_j)=0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon_j)=\sigma^2\overline{\omega}_j^2,\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_j,\varepsilon_{j'})=0\\ j\neq j'\end{cases}$$

其中 $\sigma\in\mathbf{R}$，$\Omega=\mathrm{diag}[\overline{\omega}_1^2,\cdots,\overline{\omega}_n^2]=\mathrm{diag}[T_1^2,\cdots T_n^2]$。

进一步得：$\min\limits_{\beta}\sum\limits_{j=1}^{n}(P_t^j-\widehat{P}_t^j)^2$，用矩阵可表为 $\min\limits_{\beta}\|\boldsymbol{P}_t-\widehat{\boldsymbol{P}}_t\|^2$，运用广义最小二乘法，得

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{P}_t\tag{5}$$

式(5)即为 $\boldsymbol{\beta}$ 的最优估计，从而可求得 $B(s)$ 中的系数向量，再利用折现因子 $B(s)$ 与零息票国债利率 $R(s)$ 之间的关系式

$$R(s)=-\frac{1}{s}\ln[B(s)]\tag{6}$$

可得零息票国债利率期限结构。然后根据式(7)将其转化为年复利利率 $r(s)$。

$$r(s)=e^{R(s)}-1\tag{7}$$

1.3　修正的净现值公式

由式(7)确定的利率可视为动态无风险利率，可作为式(1)中的无风险折现率。显然，该折现率是时间的函数，本文称之为动态无风险折现率，相应的净现值为动态无风险净现值。下面分别给出有风险和无风险，确定型和随机型现金流对应的 4 种情形下的净现值计算公式。

(i) 无风险情况下确定型现金流的净现值公式

$$V_1=\sum_{t=0}^{n}(I_t-O_t)(1+r(t))^{-t}\tag{8}$$

其中，V_1 表示净现值；I_t、O_t 含义同式(1)；t、n 不必为整数；$r(t)$ 表示动态无风险折现率，由式(7)确定。

(ii) 有风险情况下确定型现金流的净现值公式

$$V_2=\sum_{t=0}^{n}(I_t-O_t)(1+r(t)+g(t))^{-t}\tag{9}$$

其中，V_2 表示净现值；I_t、O_t、$r(t)$、t、n 含义同式(8)。风险折现因子 $g(t)$ 可以采用文献[8]中的方法确定，即

$$g(t)=[1+r(t)][(1+Pf)^t-1]\tag{10}$$

显然，如果 $g(t)=0$，式(9)转化成式(8)。

(iii) 无风险情况下随机型现金流的净现值公式

$$V_3=\int_0^{\infty}E[(I_t-O_t)](1+r(t))^{-t}\mathrm{d}t\tag{11}$$

其中，V_3 表示净现值；I_t、O_t、$r(t)$、t 含义同式(8)。由于式(11)中现金流是随机型，因此采取求其期望值作为净现金流量。这时又有 2 种情形：离散型和

连续型。离散型现金流的期望值容易求得,连续型现金流需要知道其分布。通常净现金流量本质上是一个服从正态分布的连续随机变量[10],从而解决了连续型现金流的期望值问题。

(iv)有风险情况下随机型现金流的净现值公式

$$V_4 = \int_0^{\infty} E[(I_t - O_t)](1 + r(t) + g(t))^{-t}\mathrm{d}t \tag{12}$$

其中,V_4 表示净现值;I_t、O_t、$r(t)$、t 含义同式(8),风险折现因子 $g(t)$ 可采用文献[6]中的方法确定,即通过计算现金流的分布的熵值,利用熵值来度量其不确定(风险补偿),其公式为

$$g(t) = \lambda h(X) \tag{13}$$

如果现金流为离散型,则现金流的熵值为 $h(X) = -\sum_{t=1}^{n} p(x_t)\ln p(x_t)$;如果现金流为连续型,则现金流的熵值为 $h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_t)\ln p(x_t)\mathrm{d}t$;其中 λ ($\lambda > 0$)为风险折扣系数,由决策者主观确定,λ 越大,表明决策者越反对风险。显然,如果 $g(t) = 0$,式(12)转化成式(11)。

2 模型的应用

下面给出具体数例来说明修正净现值公式的应用,分别考虑确定型和随机型现金流的情形。

2.1 确定型现金流的情形

假定在 2009 年 4 月 24 日有 2 个寿命期均为 8 年,初始投资额均为 100 万的项目 A 和 B,其净现金流量如表 1,试用净现值法评价 A 和 B 的优劣。

表 1 项目 A 和 B 的净现金流

Table 1 Net cash flows of project A and B

项目	时间/a	净现金流量/万元	项目	时间/a	净现金流量/万元
A	1	15	B	0.8	15
	2	15		2.5	25
	3.25	20		3.5	25
	4	15		4.25	20
	5.25	22		5	13
	6.5	20		6	16
	7.5	18		7	15
	8	16		8	15

2.1.1 推导投资决策日的国债利率期限结构

利用文献[9]中的方法,选取 2009 年 4 月 24 日上交所 24 只息票国债为样本(债券代码:(010)004,110,112,203,210,215,301,307,308,311,404,407,408,410,503,505,509,511,513,601,605,613,618,707)。假定多项式样条折现函数为

$$B(t) = \begin{cases} B_0(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3, t \in [0,1] \\ B_1(t) = B_0(t) + (\alpha_4 - \alpha_3)(t - \xi_1)^3, t \in [1,3] \\ B_2(t) = B_1(t) + (\alpha_5 - \alpha_4)(t - \xi_2)^3, t \in [3,8] \end{cases}$$

根据式(5)估计得

$\alpha_0 = 1.0013, \alpha_1 = -0.0052, \alpha_2 = -0.0070,$

$\alpha_3 = 0.0009, \alpha_4 = 0.00008, \alpha_5 = 0.0068$。

再根据式(7)可得年复利利率。

2.1.2 计算两项目的净现值

下表 2 给出了固定行业基准折现率从 0.03 变化到 0.11 相应的净现值,依据净现值判断准则,项目 B 均要优于项目 A。如果采用由国债利率期限结构确定的动态无风险折现率,利用式(8)可得项目 A、B 的净现值分别为 51.99 万元和 48.50 万元,表明从无风险的角度项目 A 要优于项目 B,这实际上给出了两个项目的净现值的上确界。在项目实际评价中,项目现金流所用的真实折现率是要考虑风险因素。采用文献[8]中确定风险折现率的方法,由于 2009 年 4 月份的通货膨胀率为 -1.5%,投资者预期的两个项目外部风险系数为 1.6(通常根据专家主观评估)。根据式(9),此时项目 A 和 B 的净现值分别为 48.34 万元和 44.93 万元,表明从风险大小的角度评价,项目 A 要优于项目 B。虽然后两者的结论与用固定行业基准折现率所得结论相反,但是更符合项目评价的实际情况。

表 2 项目 A 和 B 的净现值

Table 2 Net present value of project A and B

基准折现率	项目的净现值/万元		基准折现率	项目的净现值/万元	
	A	B		A	B
0.03	22.59	26.70	0.08	-1.09	4.03
0.04	17.23	21.61	0.09	-5.00	0.24
0.05	12.21	16.82	0.10	-8.68	-3.36
0.06	7.49	12.31	0.11	-12.14	-6.75
0.07	3.07	8.05			

2.2 随机型现金流的情形

考虑随机型现金流的净现值计算,采用文献[6]中的例子。某企业拟进行某项投资,初步筛选

出 A、B 两个方案(假定投资决策日期为 2009 年 4 月 24 日),具体数据见表 3、4,试用净现值(率)法评价方案 A 和 B 的优劣。(取 $\lambda = 0.5$)

表 3　A 方案投资额和净现金流量

Table 3　Investment amount and net cash flows of project A

年限	净现金流量 X_{ij}			概率分布 P_{ij}			投资额
i	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
0							5000
1	6000	3000	−1000	0.5	0.3	0.2	5000
2	5000	3000	2000	0.6	0.3	0.1	
3	3000	2000		0.7	0.3		

表 4　B 方案投资额和净现金流量

Table 4　Investment amount and net cash flows of project B

年限	净现金流量 X_{ij}				概率分布 P_{ij}				投资
i	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	额
0									10000
1	10000	8000	5000	1000	0.3	0.4	0.2	0.1	
2	10000	4000			0.9	0.1			
3									

方案 A 的期望净现金流量及对应的风险折现因子为:$E_A(X_0) = -5000$,$E_A(X_1) = 3700$, $E_A(X_2) = 4100$, $E_A(X_3) = 2700$;$g_A(X_1) = 0.22$, $g_A(X_2) = 0.19$, $g_A(X_3) = 0.13$。

方案 B 的期望净现金流量及对应的风险折现因子为:$E_B(X_0) = -10000$,$E_B(X_1) = 7300$, $E_B(X_2) = 9400$;$g_B(X_1) = 0.28$,$g_B(X_2) = 0.07$。

根据 2.1.1 推导出的国债利率期限结构,利用式(11)可得项目 A 和 B 的净现值分别为:$V_A = 2612$,$V_B = 3633$。方案 A 和 B 的总现金投资额的现值及其净现值率分别为:$I_P(A) = 9950$,$I_P(B) = 10000$;$K_P(A) = 26.25\%$, $K_P(B) = 36.33\%$。因此,方案 A 劣于方案 B。

而原文假定 $r = 0.06$ 得到方案 A 和 B 的净现值率分别为 22% 和 28%,即方案 A 劣于方案 B。虽然两种方法得到的结果一致,原因是两方案未来的现金流的时间较短。因此从动态折现率的角度来看差别不大。如果未来的现金流的时间较长,将净现值中的折现率分为动态无风险折现率和风险折现率能更好地反映未来资金的时间价值和风险价值。

3　结论

通过利率期限结构模型来推导无风险利率,进而修正净现值公式,使得新公式能够对任意时刻的现金流进行折现,能够准确地反映不同时期的现金流对项目净现值的影响,更好地体现了投资项目未来现金流的时间价值和风险价值,更加符合投资项目评价和财务管理的实际情况。所采取的研究思路可用来改进通常实物期权模型中的恒定折现率。关于动态风险折现率的确定具有一定的主观因素,因此如何更合理确定动态风险折现率仍值得进一步研究。

参考文献:

[1] Neumann K, Zimmermann J. Procedures for resource leveling and net present value problems in project scheduling with general temporal and resource constraints[J]. European Journal of Operational Research, 2000,127(2):425 – 443.

[2] 吕长江. 净现值法与内含报酬率法冲突的协调[J]. 数量经济技术经济研究, 1998(4):51 – 54.
Lv C J. Coordination of the conflict between net present value and the internal rate of return[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 1998(4):51 – 54. (in Chinese)

[3] 李心愉. 净现值法和内部收益率法的比较法分析[J]. 数量经济技术经济研究, 1998(12):31 – 34.
Li X Y. Comparison analysis between net present value and the internal rate of return[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 1998(12):31 – 34. (in Chinese)

[4] Bert D R, Zeger D, Roger V. Project options valuation with net present value and decision tree analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184(1):341 – 355.

[5] 许仁青. 对净现值法中折现率的一点思考[J]. 经济问题探索, 2003(5):107 – 108.
Xu R Q. Thoughts about discount rate of net present value[J]. Inquiry Into Economic Issues, 2003(5):107 – 108. (in Chinese)

[6] 陶菊春. 风险性投资决策的一种分析方法[J]. 数量经济技术经济研究, 1993(11):52 – 55.
Tao J C. Analysis method of risk investment decision [J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 1993(11):52 – 55. (in Chinese)

[7] 罗福周, 孔凡楼. 带投资风险度的随机净现值分析方法[J]. 西安建筑科技大学学报, 2006,38(3):441 – 444.
Luo F Z, Kong F L. Analysis method of random net pres-

ent value with degree of investment risk[J]. Xi'an Univ of Arch & Tech: Natural Science, 2006,38(3):441 - 444. (in Chinese)

[8] 王岩, 蔡小军. 净现值指标的进一步分析及其修正算法研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2004(12):70 - 75.
Wang Y, Cai X J. The further analysis about NPV and the study of NPV modify arithmetic[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2004(12):70 - 75. (in Chinese)

[9] 周荣喜, 邱菀华. 基于多项式样条函数的利率期限结构模型实证比较[J]. 系统工程, 2004,22(6):39 - 43.
Zhou R X, Qiu W H. Empirical comparison of term structure of interest rate based on polynomial spline functions[J]. Systems Engineering, 2004, 22(6):39 - 43. (in Chinese)

[10] 于艳萍, 钱争鸣. 投资项目现金流量估计和风险度量研究[J]. 厦门大学学报:哲学社会科学版, 2002(4): 38 - 43.
Yu Y P, Qian Z M. Cash flow and risk in investment projects: Calculation and Measurement[J]. Journal of Xiamen University: Arts & Social Sciences, 2002(4):38 - 43. (in Chinese)

Formulae of net present value based on a term structure model of interest rates

ZHOU RongXi CHE Jun

(School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: At present, the fixed discount rate is mostly used to compute net present value (NPV). This paper proposes the new idea that the discount rate should be divided into a risk-free discount rate and a risk discount rate. The risk-free rate can be determined by using the term structure model of treasury interest rates, and gives formulae for NPV under four different situations. The cash flows over arbitrary time can be accurately discounted with the modified formulae for NPV, and correspond to the actual situations pertaining in investment project evaluation and financial management. Finally, two numerical examples are presented to illustrate the practicality of the formulae derived.

Key words: net present value; dynamic risk-free discount rate; term structure of treasury interest rate; polynomial spline function