

基于 BGM 模型的具有可变执行利率的利率期权定价

周荣喜

(北京化工大学经济管理学院, 北京 100029)

摘要: 在连续远期利率期限结构 Brace, Gatarek and Musiela (BGM) 模型框架下研究了一类新的利率期权, 即具有可变执行利率的利率上限、利率下限和利率双限的定价问题, 并分别给出它们价格的解析解, 进一步拓宽了 Black-Scholes 期权定价公式的应用。

关键词: 可变执行利率; 利率上限定价; 市场模型; BGM 模型

中图分类号: F830.59

引言

如何对利率衍生品定价一直是金融理论与实务工作者研究的主课题之一。由于决定利率衍生品价格的主要变量为利率, 因此大量文献通过构建利率期限结构模型来研究其定价问题。利率期限结构模型通常有两大类: 一类是均衡模型, 这类模型通过假设短期利率服从某一特定的随机过程, 模型中参数通过历史数据估计, 再用解析的方法推导出整个利率期限结构, 最后来对利率衍生品定价, 如文献[1]中的模型, 该类模型的缺陷是可能存在套利机会。另一类是无套利模型, 这类模型通过构建与当前市场期限结构相一致的模型, 从而排除了套利机会, 较适合于利率衍生品定价, 如文献[2-3]等, 但此类模型很难得到利率衍生品价格的解析解或者模型中隐含利率为负值的概率大于零。为了克服这些缺陷, 文献[4-5]建立了一类新的无套利模型——市场模型。这类模型现已被广泛用于利率衍生品的定价与风险管理, 如文献[6-10]等。文献[11]设计了一类新的利率衍生品, 即具有可变执行利率的利率上限、利率下限和利率双限, 并基于文献[4]中的 Miltersen, Sandmann and Sondermann (MSS) 模型研究了其定价问题。由于 MSS 模型是简单远期利率模

型, 本文在文献[5]中的连续远期利率 BGM 模型框架下探讨其定价, 并对两种模型框架下的定价结果进行简要比较, 研究结论进一步丰富了 Black-Scholes 期权定价理论。

1 连续远期利率 BGM 模型及其主要结果

文献[5]证明了市场实际情况与无套利期限结构模型相一致, 以及连续季度或半年度远期利率满足对数正态分布, 而模型仍保持无套利等良好性质。其建模假设和主要结果如下:

记 $r(t, x)$ 为 t 时确定的, 在 $[t+x, t+x+dx]$ 上的连续复合远期利率。显然, 在文献[2]的 (Heath, Jarrow and Morton) HJM 模型框架下, 有 $r(t, x) = f(t, t+x)$ 。则对于 $T > 0$, 到期期限为 T 的零息票债券价格可表为

$$P(t, T) = \exp \left[- \int_0^{T-t} r(t, u) du \right] = \exp \left[- \int_t^T f(t, u) du \right], \quad 0 \leq t \leq T$$

假设贴现函数可由过程 $\{D(t, x); t \geq 0, x \geq 0\}$ 刻画, 且满足 $D(t, x) = P(t, t+x) = \exp \left[- \int_0^x r(t, u) du \right]$; 假设所有过程定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t; t \geq 0\}, P)$, 其中 $\{F_t; t \geq 0\}$ 是由 d 维布朗运动 $W = \{W(t); t \geq 0\}$ 生成的自然滤波, 并假设过程 $\{r(t, x); t \geq 0, x \geq 0\}$ 满足

$$dr(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(r(t, x) + \frac{1}{2} | \sigma(t, x) |^2 \right) dt + \right]$$

收稿日期: 2006-04-04

基金项目: 国家自然科学基金(70372011); 北京化工大学青年教师基金(QN0521)

第一作者: 男, 1972年生, 讲师

E-mail: zrx103@buaa.edu.cn

$(t, x) dW(t) \Big] \quad (1)$
其中对于任意 $x \geq 0$, 波动率过程 $\{r(t, x); t \geq 0\}$ 是 F_t 可适的, 取值于 R^d 中。

引理 1^[5] 假定函数 (t, x) 关于 x 是绝对连续, 其中 $(t, 0) = 0$, $(t, x) = \frac{\partial (t, x)}{\partial x}$ 是 $R_+^2 \times$ 上有界。则有 $dD(t, x) = D(t, x) [r(t, 0) - r(t, x)] dt - (t, x) dW(t)$ 。

引理 1 给出了贴现函数 $\{D(t, x); t \geq 0\}$ 的动态变化过程, 注意到引理 1 中 (t, x) 可视为价格波动率, 显然有 $(t, 0) = 0$, 这与实际相符合。根据式 (1) 不难得到即期利率过程 $\{r(t, 0); t \geq 0\}$ 满足。

$$dr(t, 0) = \frac{\partial r(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} dt + \frac{\partial (t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} dW(t)$$

显然, 从一般意义上讲, 它不满足无后效性。

由连续复合利率性质可知, $(t) = \exp \left[\int_0^t r(s, 0) ds \right]$, $t \geq 0$ 表示 0 时刻以即期利率 $r(s, 0)$, $0 \leq s \leq t$ 连续投资 1 单位在 t 时刻积累的资金数量。

在式 (1) 假设下, 易得

$$\frac{P(t, T)}{(t)} = P(0, T) \exp \left[- \int_0^t (s, T-s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |(s, T-s)|^2 ds \right]。$$

引理 2^[5] 对于 $T \geq 0$, $\{P(t, T)/ (t); 0 \leq t \leq T\}$ 是测度 P 下的一个鞅。

引理 2 揭示了市场模型的无套利的鞅性特征。显然, 由于 $T \geq 0$, $\{P(t, T)/ (t); 0 \leq t \leq T\}$ 是测度 P 下的一个鞅, 从而使得所有零息票债券与积累贴现因子 (t) 之间不存在套利机会, 这充分体现了无套利期限结构模型中的无套利特征。

根据引理 1 和引理 2, 有 $dP(t, T) = P(t, T) [r(t, 0) dt - (t, T-t) dW(t)]$, 该等式给出了零息票债券价格和即期利率之间的关系, 也为分析贴现函数 $\{D(t, x); t \geq 0\}$ 变化过程提供了另一种途径。

下面给出 LIBOR 利率过程的表达式。在式 (1) 假设下, 由于 LIBOR 利率过程为季度或半年时间段。固定 $\Delta > 0$, 对于 $x \geq 0$, LIBOR 利率过程 $\{L(t, x); t \geq 0\}$ 定义为

$$1 + L(t, x) = \exp \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] \quad (2)$$

且有一个对数正态波动结构, 即

$$dL(t, x) = \dots dt + L(t, x) (t, x) dW(t) \quad (3)$$

其中确定性函数 $R_+^2 \times R^d$ 是有界、分段连续的。注意到式 (3) 无需限制该 Ito 过程的漂移项。

根据 Ito 引理和式 (1), 有

$$\begin{aligned} dL(t, x) &= \frac{1}{L(t, x)} d \left\{ \exp \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{L(t, x)} \exp \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] d \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] + \frac{1}{2} \\ &\quad \exp \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] | (t, x + \Delta) - (t, x) |^2 dt = \frac{1}{L(t, x)} \exp \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] \left\{ \left[r(t, t + \Delta) - r(t, x) + \frac{1}{2} | (t, x + \Delta) - (t, x) |^2 - \frac{1}{2} | (t, x) |^2 \right] dt + \right. \\ &\quad \left. [(t, x + \Delta) - (t, x)] dW(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{L(t, x)} \exp \left[\int_x^{x+\Delta} r(t, u) du \right] | (t, x + \Delta) - (t, x) |^2 dt = \left\{ \frac{\partial L(t, x)}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{L(t, x)} [1 + L(t, x)] (t, x + \Delta) [(t, x + \Delta) - (t, x)] \right\} dt + \frac{1}{L(t, x)} [1 + L(t, x)] [(t, x + \Delta) - (t, x)] dW(t) \right\}。 \end{aligned}$$

对于 $x \geq 0$, 结合式 (3) 得

$$(t, x + \Delta) - (t, x) = \frac{L(t, x)}{1 + L(t, x)} (t, x) \quad (4)$$

进一步有

$$\begin{aligned} dL(t, x) &= \left[\frac{\partial L(t, x)}{\partial x} + L(t, x) (t, x) (t, x + \Delta) \right] dt + L(t, x) (t, x) dW(t), \\ \text{只要 } (t, x) \text{ 定义在 } 0 \leq x < \infty, \text{ 对于 } x \geq 0, \text{ 可由递归} \\ \text{关系定义文献 [4] 中 HJM 波动率过程 } (t, x), \text{ 对于 } 0 \leq x < \infty, \text{ 设 } (t, x) = 0; \text{ 对于 } x < 0, \text{ 解式 (4) 得} \\ (t, x) &= \lim_{k \rightarrow -1} \frac{L(t, x - k)}{1 + L(t, x - k)} (t, x - k) \quad (5) \end{aligned}$$

因此, 过程 $\{L(t, x); t \geq 0\}$ 必须满足下列方程

$$\begin{aligned} dL(t, x) &= \left[\frac{\partial L(t, x)}{\partial x} + L(t, x) (t, x) (t, x) + \frac{L^2(t, x)}{1 + L(t, x)} | (t, x) |^2 \right] dt + L(t, x) (t, x) dW(t) \quad (6) \end{aligned}$$

上述过程通过假设 LIBOR 利率 $L(t, x)$ 具有对数正态波动结构, 对固定 $\Delta > 0$ 和任意 $x \geq 0$, 如式 (2) 所定义, 可得到 $L(t, x)$ 的波动结构式 (5) 和连续过程式 (6)。文献 [5] 利用引理 1 和引理 2 等相关知识证明了随机微分方程式 (6) 的解的存在性和唯

一性。而式(6)正是本文研究利率上限等利率期权定价的出发点。

2 基于BGM模型的具有可变执行利率的利率期权定价

下面基于式(6),对具有不同复合频率(季度或半年)的LIBOR的利率上限等进行定价分析。关于具有可变执行利率的利率上限、利率下限与利率双限的定义可参见文献[11]。

定理1 考虑具有可变执行利率 k_j , 本金为1单位, 支付日期为 $T_j = T_0 + j$, $j = 1, \dots, n$ 的一个利率期权。如果连续远期利率过程满足式(6), 那么在 $t = T_0$ 时, 由该利率期权组成的利率上限、利率下限和利率双限的价格分别为

$$Caps(t) = \sum_{j=1}^n P(t, T_j) \{ K(t, T_{j-1}) N[h(t, T_{j-1})] - k_j N[h(t, T_{j-1}) - (t, T_{j-1})] \},$$

$$Floors(t) = \sum_{j=1}^n P(t, T_j) \{ k_j N[h(t, T_{j-1}) - K(t, T_{j-1})] - N[h(t, T_{j-1})] \},$$

$$Collars(t) = \sum_{j=1}^n P(t, T_j) [L(t, T_{j-1}, 0) - k_j]。$$

证明: 由于一个上限期权在 T_j 时现金流为 $[L(t, T_{j-1}, 0) - k_j]^+$ 或 $[k_j - L(t, T_{j-1}, 0)]^+$ 。在 $t = T_0$ 时, 由其组成的利率上限的价格为

$$Caps(t) = \sum_{j=1}^n E \left[\frac{(t)}{(T_j)} [L(t, T_{j-1}, 0) - k_j]^+ | F_t \right] = \sum_{j=1}^n P(t, T_j) E_{T_j} \{ [L(t, T_{j-1}, 0) - k_j]^+ | F_t \},$$

其中 E_T 表示在远期测度 P_T 下的期望算子, P_T 满足

$$P_T = \exp \left[- \int_0^T (t, T-t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T |(t, T-t)|^2 dt \right]_P$$

令过程 $K(t, T) = L(t, T-1), 0 \leq t \leq T$, 根据式(6), 有

$$\begin{aligned} dK(t, T) &= K(t, T) \left[(t, T-t) \left(\frac{K(t, T)}{K(t, T)} (t, T-t) + (t, T-t) \right) dt + dW(t) \right] \\ &= K(t, T) \left[(t, T-t) \left((t, T-t) dt + dW(t) \right) \right], \end{aligned}$$

而且过程 $W_T(t) = W(t) + \int_0^t (s, T-s) ds$ 是测

度 P_T 下布朗运动。因此有

$dK(t, T) = K(t, T) (t, T-t) dW_{T+}(t)$, 即 $K(t, T)$ 在测度 P_{T+} 下是对数正态分布。根据期权定价鞅方法^[12], 进一步有

$$E_{T+} \{ [L(T, 0) - k_j]^+ | F_t \} = E_{T+} \{ [K(T, T) - k_j]^+ | F_t \} = K(t, T) N[h(t, T)] - k_j N[h(t, T) - (t, T)]$$

$$\text{其中 } h(t, T) = \left[\ln \frac{K(t, T)}{k_j} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \right] / \sigma(t, T), \quad \sigma^2(t, T) = \int_t^T |(s, T-s)|^2 ds, \text{ 得证结论。}$$

同理, 可得相应的利率下限价格表达式, 而一个利率双限可表为一个利率上限多头与一个利率下限空头的组合, 将两者定价公式相减, 合并即得。

3 结论

本文在连续远期利率BGM模型下得到了具有可变执行利率的利率上限等的价格解析解。不难看出, 本文的定价公式与文献[5]中的普通利率上限定价公式, 以及文献[11]的MSS模型框架下所求得具有可变执行利率的利率上限定价公式形式一样, 均与基于鞅方法的Black-Scholes期权定价公式形式一致, 只是其波动结构不同。此外, 本文设计的利率上限能够发挥其持有者的信息优势, 尤其对于一些具有较强研究能力的金融机构, 这在利率市场化日臻完善的今天显得更有价值。更有意义的是, 当利率上限中的可变执行利率也用一随机过程来刻画, 也即是研究双随机过程的利率期权定价问题, 这显得更具有挑战性。当然, 文献[11]与本文的研究思路方法完全可以用于分析诸如具有可变执行利率的利率互换、互换期权等利率衍生品的定价, 甚至相应的利率风险计量与控制等问题。总之, 本文的研究结果对于提高我国金融机构的产品设计与定价能力具有一定的参考价值。

参考文献

- [1] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. *Econometrica*, 1985, 53(2): 385 - 407.
- [2] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology[J]. *Econometrica*, 1992, 60: 77 - 105.
- [3] 周荣喜, 邱苑华. BDT模型的扩展及应用研究[J]. *数量经济技术经济研究*, 2005(2): 87 - 94.

- [4] Miltersen K, Sandmann K, Sondermann D. Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates[J]. The Journal of Finance, 1997, 52: 409 - 430.
- [5] Brace A, Catarek D, Musiela M. The market model of interest rate dynamics[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(2): 127 - 155.
- [6] Tang Y, Lange J. A Non-exploding bushy tree technique and its application to the multifactor interest rate market model[J]. The Journal of Computational Finance, 2001 (4): 5 - 31.
- [7] Christiansen C, Charlotte S H. Implied volatility of interest rate options: an empirical investigation of the market model[J]. Review of Derivative Research, 2002(5): 51 - 80.
- [8] Glasserman P, Nicholas M. Cap and swaption approximations in LIBOR market models with jumps[J]. The Journal of Computational Finance, 2003(7): 1 - 36.
- [9] Shively P A. Time-varying risk components in the single-factor market model: an exact most powerful invariant test[J]. Applied Financial Economics, 2004, 14(13): 945 - 952.
- [10] Shin J M, Mikkil S. Efficient control variates and strategies for bermudan swaptions in a LIBOR market model[J]. Journal of Derivatives, 2005, 12(4): 20 - 33.
- [11] 王新哲, 周荣喜, 邱菀华. 具有可变执行利率的利率上限定价研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2006(1): 116 - 118.
- [12] 邵宇. 微观金融学及其数学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003, 11: 240 - 243.

Study of pricing interest rate options with changeable exercise interest rates based on BGM model

ZHOU Rong-xi

(College of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this paper, under the framework of Brace, Catarek and Musiela (BGM) model for term structure of continuous forward interest rate, the pricing problem of a new kind of interest rate options, namely caps, floors and collars with changeable exercise interest rates are discussed, and analytic solutions of their price are given. The results extend the application of Black-Scholes pricing formulas.

Key words: changeable exercise interest rates; caps; market model; BGM model

(上接第 100 页)

Preparation of porous glass balls with photocatalytic activity

LI Xiao-juan ZUO Sheng-li LIU Jian-jun ZHANG Jing-chang

(Institute of Modern Catalysis Research, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Buoyant porous glass balls loaded with nanocrystalline TiO_2 have been prepared. The effect of varying the preparation conditions on the strength and buoyancy of the porous glass balls was investigated. The optimal ratio of starting materials, calcination temperature and processing conditions were determined. The morphology of the samples was characterized by SEM. The photocatalytic activity was investigated by degradation of methylene blue solution.

Key words: porous glass; titania dioxide; photocatalytic degradation