

研究简报

超平面中心构形可约性的研究

程淑华 牛兴文*

(北京化工大学理学院, 北京 100029)

摘要: 讨论了中心构形的可约性。对超平面中心构形 A 构造了拟阵 $M(A)$, 在超平面构形和拟阵之间建立了对应关系。证明了中心本质构形 A 不可约当且仅当对应的拟阵 $M(A)$ 连通; 且每一个超平面中心构形都可以分解成若干个不可约构形的乘积, 并在不计因子次序意义下, 这种分解是惟一的。

关键词: 超平面构形; 可约; 拟阵; 连通拟阵

中图分类号: O157

引言

随着超平面个数的增加, 超平面构形的结构会变得很复杂^[1-2]。为此, 本文希望把中心构形分解为若干个不能再分解的子构形(不可约构形)的乘积, 把对中心构形的研究归结为对它的不可约子构形的研究。因为中心非本质构形能分解为一个空构形和一个中心本质构形的乘积, 从而一定可约。所以本文着重讨论中心本质构形的可约性, 对每一个中心本质构形 A 构造一个拟阵 $M(A)$, 给出了中心本质构形 A 不可约的充分必要条件是对应的拟阵 $M(A)$ 连通, 希望把构形问题转化为拟阵中相应的问题, 使用拟阵论中已有的结论来进行讨论, 得到中心构形因子分解的存在唯一性。

设 V 是域 K (实数域 R 或复数域 C) 上的 l 维仿射空间, V 中余维数为 1 的仿射子空间称为 V 中的一个超平面。设 $A = \{H_1, \dots, H_n\}$ 是 V 中有限个超平面的集合, 称 A 是 V 中的超平面构形, 记为 $A = (A, V)$ 。若构形 A 中所有超平面的交非空, 则称 A 是中心构形, 且称 $T = \bigcap_{H \in A} H$ 为 A 的中心; 否则, 若构形 A 中所有超平面的交为空集时, 则称 A 是非中心构形。若 A 是中心构形, $T(A) = \{0\}$, 则称 A

是本质构形; 否则称 A 是非本质构形。非中心构形与中心构形具有密切的联系, 每一个非中心的超平面构形都可以通过锥化得到一个中心构形^[2]。本文只讨论中心构形的可约性, 以下出现的构形均指中心构形。

设 A 是 V 中的构形, $A = \{H_1, \dots, H_n\}$, $L(A)$ 为构形 A 中的元素的所有非空交集, 则 $L(A) = \{H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_k} \mid H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_k} \neq \emptyset, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ 。这里约定 $V = L(A)$, 理解为 $k=0$ 个超平面的交。对 $X \in L(A)$, 称 X 的余维数, 即 $l - \dim X$ 为 X 的秩, 记为 $r(X)$ 。 $r(X)$ 是使得 $X = H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_m}$ 成立的最少超平面个数。中心的秩称为构形的秩, 记为 $r(T(A)) = r(A)$ 。由本质构形的定义, A 是本质构形当且仅当 $r(A) = l$ 。

设 (A, V) 是构形, 若存在构形 $(A_1, V_1), (A_2, V_2)$ 满足 $V = V_1 \oplus V_2, \dim V_i = 1, i = 1, 2$, 且 $A = A_1 \times A_2 = \{H \oplus V_2 \mid H \in A_1\} \cup \{V_1 \oplus L \mid L \in A_2\}$, 则称 A 可约; 否则称 A 是不可约的。

设 E 是一个有限集合, $I \subseteq 2^E$ 是 E 的子集族, 若有序对 (E, I) 满足以下公理:

(I1) $\emptyset \in I$; (I2) 若 $I \in I$ 及 $I \subseteq J$, 则 $J \in I$; (I3) 若 $I_1, I_2 \in I$ 且 $|I_1| < |I_2|$, 则存在 $e \in I_2 - I_1$ 使得 $I_1 \cup e \in I$ 。则称 (E, I) 是一个拟阵, 记为 $M(E, I)$, 简记为 M 。

集合 I 中的元素称为拟阵 M 的独立集, (I1) - (I3) 称为拟阵的独立集公理。若 $X \subseteq 2^E - I$, 则称 X 为 M 的一个相关集。 2^E 在包含关系下构成偏序

收稿日期: 2006-01-10

基金项目: 国家自然科学基金(10271023); 教育部留学回国人员科研启动基金

第一作者: 女, 1981 年生, 硕士生

*通讯联系人

E-mail: niuxw@mail.buct.edu.cn

集,称极小的相关集为极小圈,拟阵 M 的全体极小圈组成的集合记为 $C(M)$ 。

设 M 是 E 上的拟阵。对任意 $e_1, e_2 \in E$, 定义 $e_1 \sim e_2$ 当且仅当 $e_1 = e_2$ 或有 $C \in C(M)$, 使 $e_1, e_2 \in C$, 则 \sim 是 E 上的等价关系。设 E_1, \dots, E_c 是 $E(M)$ 上的 \sim 等价类, 对每个 $i (1 \leq i \leq c)$, 称 $M(E_i)$ 是 M 的一个连通分支。如果 $E(M)$ 只有一个连通分支, 则称 M 为连通拟阵, 或 M 是连通的; 否则 $E(M)$ 中至少有两个连通分支, 称 M 是不连通的。更多超平面构形和拟阵的介绍可以参考文献[2]和[3]。

1 构形决定的拟阵

下面把超平面构形对应于拟阵。

定理 1 设 V 是 l 维仿射空间, $A = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 是 V 中的中心构形。若 $E = A, I = \left\{ \{H_{i1}, \dots, H_{ik}\} \mid \dim\left(\bigcap_{j=1}^k H_{ij}\right) = l - k, 0 \leq k \leq n \right\}$, 则 (E, I) 是一个拟阵。这里约定 $k = 0$ 时, $\{H_{i1}, \dots, H_{ik}\} = \phi, \bigcap_{j=1}^k H_{ij} = V$ 。

证明 显然 $I \subseteq 2^E$ 。下面验证 (E, I) 满足独立集公理。

显然, $\phi \in I, |\phi| = k = 0, \dim\left(\bigcap_{j=1}^k H_{ij}\right) = \dim V = l - k$, 所以 $\phi \in I$ 。

设 $I \in I, I \subseteq I$ 。下证 $I \in I$ 。

不妨设 $I = \{H_1, \dots, H_k\}, I = \{H_1, \dots, H_k, H_{k+1}, \dots, H_m\}, (k < m)$ 。由 $I \in I$, 得

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^m H_i\right) = l - m. \quad (1)$$

下证

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right) = l - k. \quad (2)$$

设 W 是 V 的一个 m 维线性子空间, H 是 V 中的一个超平面。由维数公式^[4]可得

$$\dim(W \cap H) + \dim(W + H) = \dim W + \dim H.$$

因为 $H \subseteq W + H \subseteq V$, 所以 $l - 1 = \dim H = \dim(W + H) - \dim W = l$, 从而

$$\dim(W \cap H) = \dim W + \dim H - \dim(W + H)$$

$$= \dim W + (l - 1) - l = \dim W - 1.$$

归纳地, 对任意自然数 t , 有

$$\dim\left(W \cap \bigcap_{i=1}^t H_i\right) = m - t. \quad (3)$$

由(3)式可得

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^m H_i\right) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i \cap \bigcap_{i=k+1}^m H_i\right)$$

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right) = (m - k) \quad (4)$$

在(3)式中取 $t = k, W = V$ 得

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right) = l - k \quad (5)$$

反设(2)式不成立, 则

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right) > l - k \quad (6)$$

将(6)式代入(4)式得 $\dim\left(\bigcap_{i=1}^m H_i\right) > l - m$, 与(1)式矛盾。所以(2)式成立, $I \in I$ 。

设 $s = \{H_1, \dots, H_k\}, \dim s = \dim\left(\bigcap_{i=1}^k H_i\right)$, 则由(5)式, 有 $r(s) = l - \dim s = |s|$; 当且仅当等号成立时 s 独立, 即 $s \in I$ 。要证明(I3)成立, 即若 $s_1, s_2 \in I$, 且 $|s_1| < |s_2|$, 则 $\exists H \in s_2 - s_1$, 使得 $s_1 \cup \{H\} \in I$ 。

反设(I3)不成立, 则 $\forall H \in s_2 - s_1, s_1 \cup \{H\} \notin I$, 即 $s_1 \cup \{H\}$ 相关, 于是有 $r(s_1 \cup \{H\}) < |s_1 \cup \{H\}|$, $r(s_1 \cup \{H\}) = |s_1| = r(s_1)$, 归纳地, $|s_2| = r(s_2) = r(s_1) = |s_1|$, 与题设 $|s_1| < |s_2|$ 矛盾。

于是 (E, I) 满足三条独立集公理, 是一个拟阵。这个拟阵是由中心构形 A 决定的, 可记为 $M(A)$, 集合 I 中的元称为拟阵 $M(A)$ 的独立集。证毕。

2 可约性

若 A 是中心非本质构形, 则 $T(A) = \{0\}$ 。记 A_1 为 $T(A)$ 中的空构形, 则存在中心本质构形 A_2 使得 $A = A_1 \times A_2$, 所以非本质构形一定可约, 从而只需讨论中心本质构形的可约性。下边用拟阵术语来刻画中心本质构形的可约性, 如没有特殊约定, 以下出现的构形 A 都是指中心本质构形。

定理 2 中心本质构形 A 可约时, 拟阵 $M(A)$ 不连通。

证明 要证 $M(A)$ 是不连通拟阵, 则 $E = A$ 上至少有 2 个连通等价类。显然, $M(A)$ 不连通当且仅当存在非空子集 E_1 和 E_2 , 使得 $E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \phi$, 且 $\forall H \in E_1, L \in E_2$, 不存在极小圈 $C, \{H, L\} \subseteq C$ ^[5]。

由 A 可约, 设 $A = A_i \times A_i$, 其中 $A_i = (A_i, V_i)$, 由 A 是本质构形, 可得 A_i 非空, $i = 1, 2$ 。取 $E_1 =$

$\{H \oplus V_2 | H \in A_1\}$, $E_2 = \{V_1 \oplus L | L \in A_2\}$, 则不存在极小圈 C , 使得 $\{H \oplus V_2, V_1 \oplus L\} \subseteq C$ 。反设存在这样的极小圈 C 和 $\{H \oplus V_2, V_1 \oplus L\}$, 则 $H \oplus L \subseteq H \oplus V_2, H \oplus L \subseteq V_1 \oplus L$, 从而有 $H \oplus L \subseteq (H \oplus V_2) \cap (V_1 \oplus L)$ 。反之, $\forall (x, y) \in (H \oplus V_2) \cap (V_1 \oplus L)$, 有 $(x, y) \in H \oplus V_2$ 且 $(x, y) \in V_1 \oplus L$, 所以 $x \in H, y \in L$, 即 $(x, y) \in H \oplus L$, 可得 $(H \oplus V_2) \cap (V_1 \oplus L) \subseteq H \oplus L$ 。综上, 即有 $(H \oplus V_2) \cap (V_1 \oplus L) = H \oplus L$ 。

设 $\dim V_i = l_i, i = 1, 2$, 则得 $l - \dim((H \oplus V_2) \cap (V_1 \oplus L)) = l_1 + l_2 - \dim(H \oplus L) = (l_1 - \dim H) + (l_2 - \dim L) = 2$, 有 $\{H \oplus V_2, V_1 \oplus L\} \subseteq I_0$ 。

此时, $C = (C \cap E_1) \cup (C \cap E_2)$, 下证 $C \cap E_1 \in I$ 或 $C \cap E_2 \in I$ 。

反设不然, 由 $C \cap E_1 \notin I$ 可得 $r(C \cap E_1) = |C \cap E_1|$; 同理可得 $r(C \cap E_2) = |C \cap E_2|$ 。

设 $C \cap E_1 = \{H_1 \oplus V_2, \dots, H_k \oplus V_2\}$, $C \cap E_2 = \{V_1 \oplus L_1, \dots, V_1 \oplus L_l\}$, 则 $r(C \cap E_1) = k, r(C \cap E_2) = l, C = (H_1 \dots H_k) \oplus (L_1 \dots L_l)$, 所以 $\dim C = \dim(H_1 \dots H_k) + \dim(L_1 \dots L_l)$, 从而 $l_1 + l_2 - r(C) = l_1 - r(C \cap E_1) + l_2 - r(C \cap E_2)$ 。

于是 $r(C) = r(C \cap E_1) + r(C \cap E_2) = |C \cap E_1| + |C \cap E_2| = |C|$, 这与 C 是极小圈矛盾。

不妨设 $C \cap E_1 \in I$, 则由 C 是极小圈, 可得 $C \cap E_1 = C$ 。于是 $C \subseteq E_1$, 有 $V_1 \oplus L \subseteq C \subseteq E_1$, 与 $E_2 = \phi$ 矛盾。所以 $M(A)$ 不连通, 定理 2 成立。证毕。

定理 3 拟阵 $M(A)$ 不连通时, 中心本质构形 A 可约。

证明 由不连通的定义, 存在非空子集 E_1, E_2 , 使得 $A = E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \phi$, 且 $\forall H \in E_1, L \in E_2$, 不存在极小圈 $C \ni \{H, L\}$ 。

设 $A_1 = \{(E_2) \cap H_i | H_i \in E_1\}, V_1 = (E_2) \cap A_2 = \{(E_1) \cap L_j | L_j \in E_2\}, V_2 = (E_1) \cap A_1, i = 1 \dots k, j = 1 \dots l$ 。下证 $(E_2) \cap H_i$ 是 V_1 中的超平面。

由(3)式, 得 $\dim((E_2) \cap H_i) = \dim(E_2) - 1$, 所以 $l - r((E_2) \cap H_i) = l - r(E_2) - 1$, 于是 $r((E_2) \cap H_i) = r(E_2) + 1$ 。(7)

另一方面, 任意取 E_2 中的独立集 s , 则 $r(s) = l - \dim s = |s|$ 。由于 $\forall H \in E_1, L \in E_2$,

不存在极小圈 $C \ni \{H, L\}$, 所以 $s \cap \{H_i\} \in I$, 即 $r(s \cap H_i) = r(s \cap H_i) = |s| + 1$ 。特别地, 取 s 为 E_2 的极大独立集, 可得

$$r((E_2) \cap H_i) > r(E_2)。(8)$$

由(7)和(8)得

$$r((E_2) \cap H_i) = r(E_2) + 1。$$

这样证得 $(E_2) \cap H_i$ 是 V_1 中的超平面。同理可证 $(E_1) \cap L_j$ 是 V_2 中的超平面。

令 $H_i = (E_2) \cap H_i, L_j = (E_1) \cap L_j$, 有构形 $(A_1, V_1), (A_2, V_2)$ 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $A = A_1 \times A_2 = \{H_i \oplus V_2 | H_i \in A_1\} \cup \{V_1 \oplus L_j | L_j \in A_2\}$, 所以 A 可约。证毕。

由定理 2 和定理 3, 给出中心本质构形可约的充要条件。

定理 4 设 A 是中心本质构形, 则 A 是可约构形当且仅当 $M(A)$ 不连通; 等价地, A 是不可约构形当且仅当 $M(A)$ 是连通拟阵。

3 构形的因子分解

由前所述, 若中心构形 A 是非本质的, 则 A 可分解为一个空构形和一个本质构形的乘积; 当这个本质构形可约时, 由维数的有限性, 总可以分解为若干个不可约构形的乘积。所以任何一个中心构形都可以分解为有限个不可约构形的乘积。根据拟阵中的相关定理, 由连通拟阵的性质^[5]: 若 $M(A)$ 的连通分支为 $M|X_1, M|X_2, \dots, M|X_c (c \geq 1)$, 则 $M(A)$ 可分解为连通分支的直和, 即 $M(A) = (M|X_1) \oplus (M|X_2) \oplus \dots \oplus (M|X_c)$, 且在不计因子次序意义下, 分解形式惟一。可以证明, 与此拟阵 $M(A)$ 对应的可约构形 A 在不计因子次序意义下, 分解形式也是惟一的, 即因子分解存在且惟一。

参 考 文 献

- [1] Richard P. An introduction to hyperplane arrangements [M]. America: Park City Mathematics Series, 2004:1 - 39.
- [2] Orlik P, Terao H. Arrangements of hyperplanes [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992:1 - 57.
- [3] 赖虹建. 拟阵论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002:6 - 94.
- [4] Jacobson N. Basic algebra [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- [5] 刘桂真, 陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994:1 - 72.

(下转第 105 页)

- 机叶片模态分析[J]. 电气防爆, 2004, 2: 16 - 18.
- [3] 王麟, 盛德仁, 陈坚红, 等. 国产 300 MW 汽轮机叶片模态分析与故障识别[J]. 汽轮机技术, 2003, 45(3): 168 - 169.
- [4] 廖日东, 左正兴, 邹文胜, 等. 增压器涡轮叶片模态特性研究[J]. 内燃机学报, 1998, 16(4): 421 - 429.
- [5] 罗剑斌, 袁立平, 郑万泔, 等. 汽轮机整圈连接叶片轮系振动模态试验与研究[J]. 中国电力, 2002, 35(7): 8 - 12.
- [6] 姬晋廷, 陈国强, 涂玉. 轴流式水轮机叶片的刚强度及模态有限元分析[J]. 长江工程职业技术学院学报, 2004, 21(4): 27 - 29.

Natural frequency measurement and analysis of a pitched-blade turbine

GU Xiang MA Xin LIU Xin-wei CUI Wen-yong

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: By using the fundamental theory of modal analysis, the method of modal measurement is derived and a way to measure the modal parameters of a pitched-blade turbine is given. Comparison of the results from modal analysis and finite element analysis shows that the natural frequencies are almost identical, indicating that modal measurement is a viable method for analysis of the natural frequency of a pitched-blade turbine.

Key words: hammer testing; natural frequency; impeller; modal analysis

(上接第 102 页)

The reducibility of central hyperplane arrangements

CHENG Shu-hua NIU Xing-wen

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: In this study, a matroid $M(A)$ is constructed from a given arrangement A , and the correspondence between arrangements and matroids is investigated. It is proved that a central essential arrangement A is irreducible if, and only if, the matroid $M(A)$ is connected. Furthermore, each central hyperplane arrangement can be decomposed into the product of several irreducible arrangements, and this decomposition is unique if the order of the factor is disregarded.

Key words: hyperplane arrangement; reducible; matroid; connected matroid