第 31 卷 第 6 期　　　　北 京 化 工 大 学 学 报　　　　Vol. 31, No. 6
2004 年　　JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF CHEMICAL TECHNOLOGY　　2004

用最佳椭圆线重建多圆图像

王一多[1]　张　彦[2]

(1. 北京化工大学理学院,北京　100029; 2. 燕山大学理学院,河北 秦皇岛　066004)

摘　要: 文中通过对多圆图像的 Radon 变换曲线的分析,建立了用少量的投影数据(理论上只用两个角度的投影数据)重建多圆图像的最佳椭圆线方法,并针对自定义的一个多圆图像给出了重建结果。

关键词: Radon 变换; 多圆图像; 最佳椭圆线

中图分类号: O320.5

随着计算机层析成像技术(CT)在工业无损探伤领域中的广泛应用,新的问题也不断现出。如在工业探伤中,往往需要对一个批次的大量产品做图像重建,而这些重建图像是有很大的相关性的。有时这些待重建的实物的截面就是由标准的几何体(或几何体的组合)构成[1],如检测钢筋混凝土的浇注是否合格时,重建出来的截面图像就是由一些圆圈组成,对这些比较规则的截面图像,希望能用比较少的投影数据来重建。本文对这类由圆构成的"多圆图像"的少量投影数据重建做了初步的研究。

1　卷积反投影算法与 Radon 变换及逆变换

卷积反投影算法是 CT 图像重建的经典算法之一,原理是利用 Radon 变换及逆变换进行图像重建。设直线 L 的方程为 $p = x\cos\phi + y\sin\phi$,其中 p 为直线 L 与原点的距离,ϕ 为 L 的法线与 x 轴正半轴的夹角,如图 1 所示。则 (p, ϕ) 与 Oxy 平面上的直线 L 一一对应[2]。记 $f(x, y)$ 为待重建图像函数。

$$\hat{f}(p, \phi) = \int f(x, y)\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

称(1)式中 $\hat{f}(p, \phi)$ 为 $f(x, y)$ 的 Radon 变换,相当于一个算子,记为 $\mathbf{R}$。粗略讲,算子 $\mathbf{R}$ 将 (x, y) 空间上的函数 $f(x, y)$ 和 (p, ϕ) 空间上的另一个函数 $\mathbf{R}f$,即 $\hat{f}(p, \phi)$,联系在一起。因为 $[\mathbf{R}f](p, \phi)$ 是沿着 L 的积分,可以认为 (p, ϕ) 空间上的一个点相应于 (x, y) 空间中的一条直线 L(该直线离原点

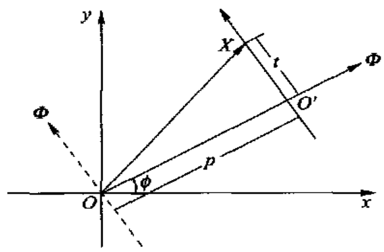

图 1　Radon 变换

Fig. 1　Radon transform

的距离为 p,且和 x 轴正半轴的夹角为 ϕ。

记 $X = (x, y)$,或者 $\begin{cases} x = p\cos\phi - t\sin\phi \\ y = p\sin\phi + t\cos\phi \end{cases}$ 则有

$$\hat{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos\phi - t\sin\phi, p\sin\phi + t\cos\phi)\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

设 $\boldsymbol{\Phi} = (\cos\phi, \sin\phi)$, $\boldsymbol{\Phi}^{\perp} = (-\sin\phi, \cos\phi)$ 则

$$\hat{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\boldsymbol{\Phi} + t\boldsymbol{\Phi}^{\perp})\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

将直线 L 的方程记为: $p - \boldsymbol{\Phi}\cdot X = 0$,则用广义函数将其改写为

$$\hat{f}(p, \phi) = \iint_{R^2} f(X)\,\delta(p - \boldsymbol{\Phi}\cdot X)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

Radon 定理(逆变换公式)[3]

设 $f(X)$ 为 R^2 上的连续函数,当 $|X| > E > 0$ 时,$f(X) = 0$,则

$$f(X) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\partial_p\hat{f})[p, \boldsymbol{\Phi}]}{p - X\cdot\boldsymbol{\Phi}}\mathrm{d}p\right)\mathrm{d}\phi \tag{5}$$

期中 E 是一个常数。(注意,微分算子 ∂_p 是对 Radon 变换 $\hat{f}(p, \boldsymbol{\Phi})$ 的第一个变量做微分运算的。)这个逆变换公式是卷积反投影算法的核心,即由已知的 $\hat{f}(p, \boldsymbol{\Phi})$(投影数据)来重建 $f(X)$。

收稿日期: 2004-03-10

基金项目: 河北省博士基金(2002131)

第一作者: 男,1976 生,硕士,助教

E-mail: wang760706@sohu.com

2 多圆图像的 Radon 变换

圆心为 (x_0, y_0)，半径为 r 的圆盘的方程为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad (6)$$

$f(x,y)$ 沿着法方向为 $\Phi=\Phi_0$ ($\Phi_0=(\cos\phi_0, \sin\phi_0)$)、与原点的距离为 t 的一族直线作 Radon 变换，构成一个关于 t 的一元函数

$$g(t)=2\sqrt{r^2-(t-X_0\cdot\Phi_0)^2} \qquad (7)$$

它相当于在 $f(x,y)$ 的 Radon 变换 $[\mathbf{R}f](p,\phi)$ 中令 $\phi=\Phi_0$，令 p 为 t 而得到的函数。此函数相当于长半轴为短半轴 2 倍的椭圆的上半部[4]。即

$$\frac{g(t)^2}{4^2}+\frac{(t-X_0\cdot\Phi_0)^2}{r^2}=1 \qquad g(t)\ge 0$$

给定由一些圆(各圆互不相交)组成的图像，如图 2a 所示。对其作某个角度 Φ_0 的 Radon 变换后得到的图像如图 2b，它是由一些半椭圆线叠加而成。

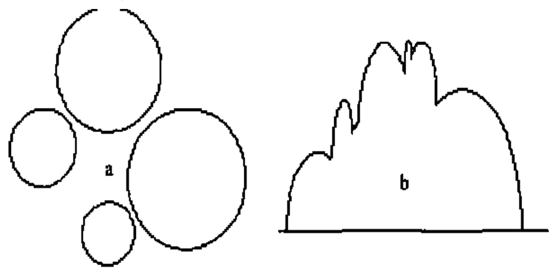

图 2 多圆图像及其 Ranod 变换

Fig. 2 Multi-circle image and it's Radon transform

3 半椭圆线与多圆图像 Radon 变换

定义一个半椭圆线族 $E^a=\left\{e(t)\ge 0\left|\frac{e(t)^2}{4r^2}+\frac{(t-(a+r))^2}{r^2}=1, r\in(0,R)\right.\right\}$

其中 R 为待重建的多圆图像沿某个角度做 Radon 变换后的信号长度。显然，这个半椭圆族中的每个半椭圆线的最左端点都是 $(a,0)$。重建图像时，得到的是各个角度的投影数据值，即类似上面图 2b 所示的一维曲线，当然这些曲线都是由一系列的半椭圆线构成的，如果能确定叠加成这条曲线的那些半椭圆线，则相当于在某个角度上确定了这些圆的位置。如果，在两个角度上确定了这些圆的位置，则在二维重建区域中的这些圆的位置就能确定了[5]。

假设待重建的多圆图像位于圆心为 $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right)$，半径为 $\frac{R}{2}$ 的区域内，称其为待重建区域。取某个角度 Φ_1 的投影数据，记为：$P^1_{\Phi_1}(t)$，显然定义域为 $(0,R)$。设 $P^1_{\Phi_1}(t)$ 的支集为 (a_1,b_1)，则有 $(a_1,b_1)\subset(0,R)$。取 E^{a_1} 的一个子集 $\widetilde{E}^{a_1}$ 定义如下

$$\widetilde{E}^{a_1}=\{e'(t)\mid e'(t)\in E^{a_1},\text{且 } e'(t)\le P^1_{\Phi_1}(t), \forall t\in(a_1,b_1)\}$$

令 $\|e'(t)\|=\max\{e'(t)\in\widetilde{E}^{a_1}, t\in(a_1,b_1)\}$ 则有

定理 1 必有某一个 $e_0'\in\widetilde{E}^{a_1}$ 使得 $\max\limits_{t\in(a_1,b_1)} e_0'(t)=\|e'(t)\|$，且此 e_0 即为此多圆图像从 Φ_1 角度上看最靠左边的那个圆做 Radon 变换得到的半椭圆线。

证明：由 $\widetilde{E}^{a_1}$ 的定义可知，$\forall e'(t)\in\widetilde{E}^{a_1}$，其图像都位于 $P^1_{\Phi_1}(t)$ 之下。即 $\forall e'(t)\in\widetilde{E}^{a_1}$ 有 $\max\limits_{t\in(a_1,b_1)} e'(t)\le\|e'(t)\|$，又由于，从 Φ_1 角度上看最靠左边的那个圆做 Radon 变换得到的半椭圆线 $\widetilde{e}_0(t)$ 显然是以 a_1 为最左端点的，而且，它即是构成 $P^1_{\Phi_1}(t)$ 的一部分，而 $P^1_{\Phi_1}(t)$ 又是由一些半椭圆线叠加而成，故必有 $\widetilde{e}_0'(t)\in\widetilde{E}^{a_1}$，且它是与 $P^1_{\Phi_1}(t)$ 最紧密的半椭圆线，则有 $\widetilde{e}_0'(t)=\|e'(t)\|$。证毕。

将满足定理 1 的 $e_0'(t)$ 称为：与角度 Φ_1 相关的第一条最佳半椭圆线。

将找到的第一条半椭圆线 $e_0^1(t)$ 从 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 中减掉，得到新的投影数据 $P^2_{\Phi_1}9t)$，设 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 的支集为 (a_2,b_2)，显然 $(a_2,b_2)\in(a_1,b_1)$。而 $e_0^1(t)$ 的支集中点坐标 $\left(X^1_{\Phi_1}, Y^1_{\Phi_1}\right)$ 即为前面确定圆的圆心坐标在角度 Φ_1 上的投影。设 $e_0^1(t)$ 的支集长度为 r_1，则 r_1 即为该圆的直径，用 $C\left(X^1_{\Phi_1}, Y^1_{\Phi_1}; r^1_{\Phi_1}\right)$ 记录这三个信息。

对新的投影数据 $P^2_{\Phi_1}(t)$，与其对应的半椭圆线族为

$$E^{a_2}=\left\{e(t)\ge 0\left|\frac{e(t)^2}{4r^2}+\frac{(t-(a_2+r))^2}{r^2}=1, r\in(0,R)\right.\right\}$$

同样取一个 E^{a_2} 的一个子集 $\widetilde{E}^{a_2}$

$$\widetilde{E}^{a_2}=\{e'(t)\mid e'(t)\in E^{a_2},\text{且 } e'(t)\le P^2_{\Phi_1}(t), \forall t\in(a_2,b_2)\}$$

令 $\|e'(t)\|=\max\{e'(t)\in\widetilde{E}^{a_2}, t\in(a_2,b_2)\}$，继续用定理 1，即可以找到去掉第一个圆后，剩下的圆中最靠近左边的那个圆，并确定其圆心坐标在角度 Φ_1 上的投影值及其直径的长度，将这三个信息记为：$C\left(X^2_{\Phi_1}, Y^2_{\Phi_1}; r^2_{\Phi_1}\right)$，然后再从 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 中减去确定 $C\left(X^2_{\Phi_1}, Y^2_{\Phi_1}; r^2_{\Phi_1}\right)$ 的那个最佳半椭圆线 $e_0^2(t)$，得到

新的投影数据 $P^3_{\Phi_1}(t)$。按上面的过程依次进行下去,便可以得到所有圆的圆心坐标在角度 Φ_1 上的投影值及直径长度 $C\left(X^i_{\Phi_1}, Y^i_{\Phi_1}, r^i_{\Phi_1}\right)$, $i = 1 \cdots n$。

图 3 所示为找前两个圆的过程,由 a 到 b 是找

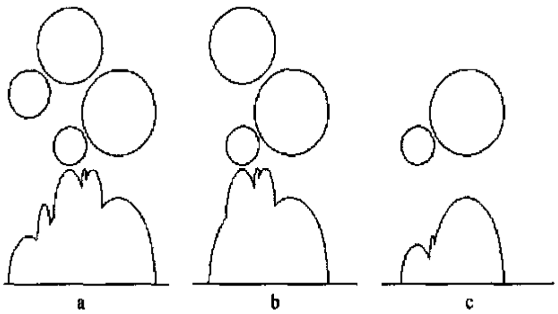

图 3　分离最左边的两个圆的步骤

Fig. 3　Process of separating the two circles from left

第一个圆的过程,b 到 c 为找第二圆的过程。对于这个例子来讲进行三次就可以得到四个圆的圆心坐标在角度 Φ_1 上的投影值及直径长度 $C(X^i_{\Phi_1}, Y^i_{\Phi_1}; r^i_{\Phi_1}$, $i = 1,2,3,4$。换一个角度 Φ_2,用类似的方法求出这四个圆的圆心坐标在角度 Φ_2 上的投影值及直径长度 $C\left(X^i_{\Phi_2}, Y^i_{\Phi_2}; r^i_{\Phi_2}\right)$, $i = 1,2,3,4$。再将 $C\left(X^i_{\Phi_1}, Y^i_{\Phi_1}; r^i_{\Phi_1}\right)$ 与 $C\left((X^i_{\Phi_2}, Y^i_{\Phi_2}; r^i_{\Phi_2}\right)$ 按照半径相等(即第三个量)的原则匹配起来。例如,若有 $r^3_{\Phi_1}$ 与 $r^1_{\Phi_2}$ 相等,如图 4a 所示。则 $\left(X^3_{\Phi_1}, Y^3_{\Phi_1}\right)$ 与 $\left(X^1_{\Phi_2}, Y^1_{\Phi_2}\right)$ 即为同一个圆的圆心坐标分别在 Φ_1 和

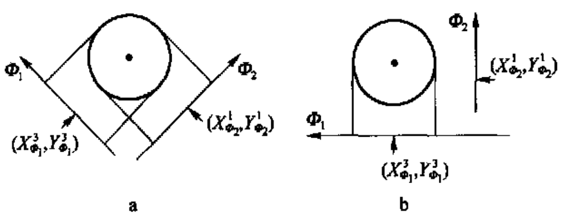

图 4　用匹配法确定圆心

Fig. 4　Get the center of circle by matchting method

Φ_2 角度上的投影坐标,则由 $\left(X^3_{\Phi_1}, Y^3_{\Phi_1}\right)$ 与 $\left(X^1_{\Phi_2}, Y^1_{\Phi_2}\right)$ 便可以求出相应的圆的圆心坐标,由于其半径已经知道,为:$r^3_{\Phi_1}$(或 $r^1_{\Phi_2}$),那么相当于这个圆就可以确定下来了。在实际算法实现时为了简单,可以将角度 Φ_1, Φ_2 分别选为 0 和 90°,如图 4b 所示。则此时,$Y^i_{\Phi_1}$, $X^i_{\Phi_2}$ $i = 1,2 \cdots n$ 均为 0,则 $X^i_{\Phi_1}$, $Y^i_{\Phi_2}$分别是各圆的横坐标和纵坐标。只需按上面的直径相等的匹配思想将其对应的匹配起来,便得到了各圆的圆心坐标,再加上已知的直径信息,就可以将这个多圆图像画出来了。

以上给出的是理想情形,但是,在实际应用中投影数据难免会有误差,对此重新将 $\widetilde{E}^{a_1}$定义为

$$\widetilde{E}^{a_1} = \{ e'(t) \mid e'(t) \in E^{a_1}, \text{且} \ \| e'(t) - P^1_{\Phi_1}(t) \|_2 \leq \alpha, \forall t \in (a_1, b_1) \}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 为 2-范数,α为允许误差最大值。当将第一条半椭圆线 $e^1_0(t)$ 从 $P^2_{\Phi_2}(t)$ 中减掉时,由于误差,新得到的投影数据 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 的第一个非零值未必应该包含在 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 的支集中,即需要去除一些位于前面的残差信号。对 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 中的信号点(在实际应用中 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 显然是离散信号)若其后连续 N_1 个点具有递增性质,称其为 N_1 连续递增点,选取 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 的 N_1 连续递增点中最小的做为信号 $P^2_{\Phi_1}(t)$ 的起始点 a_1。相应的定理 1 需修改为

定理 1 必有某一个 $e_0' \in \widetilde{E}^{a_1}$使得 $\| e_0' - e'(t) \| \leq \alpha$,且此 e_0即为此多圆图像从 Φ_1 角度上看最靠左边的那个圆做 Radon 变换得到的半椭圆线。

然后按两个角度 Φ_1, Φ_2 利用定理 1 将最佳椭圆线一条一条的从 $P^1_{\Phi_1}(t)$ 中剥离,同时也将依次找到最左边的圆的坐标及直径信息,最后将其匹配起来,便得到该多圆图像。

4　实例图像结果分析与结论

本文构造了一个含有五个半径不同的圆的多圆图像如图 5a 所示。用数值积分的办法模拟投影数

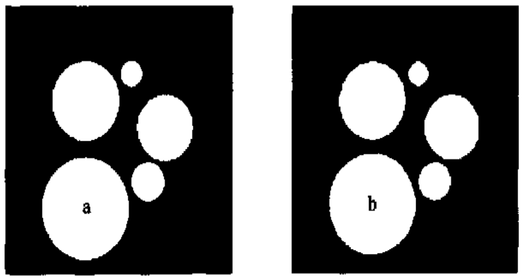

图 5　多圆位图图像及重建结果

Fig. 5　Bitmap image of multi-circle and it 's reconstructed result

据,共"采集"了 360 个角度(将(0,π)分成 360 份),每个角度"采集"500 个"数据",每个数据用矩形公式算数值积分(采用 1 000 个分划)。重建图像由图 5b 所示,各圆的大小及位置关系本上是与原图无异的,只是在位置上有 2～3 个像素的偏差,圆的半径

大小上有 1～2 个像素的偏差,证明用最佳椭圆线法重建多圆图像是可行的。

参 考 文 献

[1] Wang S, liu B, Kulkarni S R. Model-based reconstruction of multiple circular and elliptical objects from a Limited Number of Projection[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2000,5(9):1386 - 1392

[2] Barrett H H, Swindell W. Radiological imaging: The theory of imaging formation detection and processing[M]. New York: Academic Press, 1981

[3] Herman G T. Image reconsruction from projection: the fundamentals of computerized tomography[M]. New York: Academic Press, 1980

[4] 王一多. 快速滤波反投影算法研究[D]. [硕士学位论文]. 吉林:吉林大学,2002

[5] 温俊海,卜凡亮,程敬之. 有限角投影下的快速重建算法[J]. 西安交通大学学报,2001,34(4):33-36

Reconstruction of a multi-circles image by optimal-ellipse-curves

Wang Yi-duo Zhang Yan

(1. College of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;
2. College of Science, Yan Shan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: By analysing the Radon-transform of multi-circles image, a new algorithm called optimal-ellipse-curve for reconstructing multi-circles image was proposed. Theoretically, the new algorithm only needs two angle's projection data. In addition, an example of multi-circles image with five different circles and the reconstructed result have proved the validity of the new algorithm.

Key words: Radon-transform; multi-cirlcles image; optimal-ellipse-curve

(责任编辑 曾宪玉)

(上接第 90 页)

[3] 杨勋年. 基于几何逼近的曲线曲面造型技术研究[D]. [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学,1998

[4] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, *et al*. Piecewise smooth surface reconstruction[C]. //Proceedings of SIGGRAPH'94, ACM-SIGGRAPH. Orlando Florida: Lynn Finch, 1994, 295 - 302

[5] Peter Comninos. An interpolating piecewise bicubic surface with shape parameters[J]. Computers & Graphics, 2001, 25:463 - 481

[6] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理样条[M]. 北京:高等教育出版社,2001,143 - 162

[7] 戈卢布·G·H,范洛恩 C·F. 矩阵计算[M]. 北京:科学出版社,2001,61 - 65

Shape reconstruction of twin-crew surfaces

Li Xiao-hua Liu Hui

(College of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Rotating of a cross-section curve is a typical method for constructing a twin-screw. A method for reconstructing a shape of twin-screw with a bicubic Bezier surface was proposed, which offers better theoretical foundations for CAM. Besides, a method was presented for abstracting and pre-processing of data points while modeling. The result of error analysis shows the method is suitable for reconstruction of the general screw surfaces.

Key words: cross-section curve; Bezier surface; reconstruction; screw surface

(责任编辑 曾宪玉)