第 34 卷 第 2 期 北 京 化 工 大 学 学 报 Vol. 34, No. 2
2007 年 JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF CHEMICAL TECHNOLOGY 2007

·研究简报·

一类混杂构形的特征多项式

董 芸 姜广峰*
(北京化工大学理学院, 北京 100029)

摘 要: 研究了一类由超平面和球面所构成的特殊的混杂构形, 讨论了混杂构形的相交集的交半格以及混杂构形与原超平面构形的 Möbius 函数之间的关系, 接着推广到多于一个球面的较为复杂的混杂构形, 最后给出了混杂构形的特征多项式和房的计算公式。

关键词: 混杂构形; Möbius 函数; 特征多项式
中图分类号: O152. 5

设R 为实数域, V 为R 上的 n 维向量, 任取一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 则R 中任一向量 v 可唯一表示为 $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R$。集合 $H = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b\}$ 叫做一个超平面。R 中有限个超平面的集合叫做超平面构形。由于构形兼有组合与拓扑两种结构, 所以许多数学家都致力于由构形的组合信息来研究它的拓扑结构, 并得到了一些好的结果。首先给出混合构形[1]的定义。

定义 1 混杂构形 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \cdots, A_m\}$ 是 R^l 中的闭子空间(在诱导拓扑下) 的有限集, 满足如下条件:

(1) $\mathcal{A}$ 在相交意义下是闭的;

(2) 每个 A_i 都微分同胚于某一维数的子空间或球面;

(3) 每两个子空间都横截相交(若交不空)。

在一篇即将发表的论文中, 苏丹研究了由中心构形和球面构成的混杂构形的一些组合性质。本文首先研究了由 R^l 中有限个超平面和一个球面构成的混杂构形。用 A 表示 R^l 中这有限个超平面构成的实构形, 用 S_r^{l-1} 表示半径 r 充分大且球心在原点的球面, 这样就构成了混杂构形 $\mathcal{A} = A \cup S_r^{l-1}$。从组合学的角度讨论了混杂构形 $\mathcal{A} = A \cup S_r^{l-1}$ 的相交偏序集, 并给出了混杂构形 $\mathcal{A}$ 与超平面构形 A 的 Möbius 函数之间的关系以及混杂构形的特征多项式和房的计算公式。接着, 在此基础上推广, 研究了由多个球面与超平面构形构成的混杂构形, 并得出了其房的计算公式。

1 预备知识

设 $A = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ 是 R^l 中的实超平面构形, 记 $\mathcal{A} = A \cup S_r^{l-1}$ 为混杂构形, 其中 S_r^{l-1} 是 R^l 中的以原点为球心的 $l-1$ 维球面, 它与 A 中每个平面都横截相交, 且半径 r 充分大, 使得 $L_0(A) = \{X \in L(A) : \dim X = 0\} \subset S_r^{l-1}$。

设 $L = L(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中元素的非空交集合的全体, $X, Y \in L(\mathcal{A})$。定义 L 上的偏序关系: $X \le Y \Leftrightarrow X \supseteq Y$。定义 $L(\mathcal{A})$ 上的秩函数为 $r(X) = \mathrm{codim}(X)$。定义 $L(\mathcal{A})$ 上的交为: $X \wedge Y = \cap\{Z : Z \in L(\mathcal{A}), X \cup Y \subseteq Z\}$; 若 $X \cap Y \ne \varnothing$, 定义并为: $X \vee Y = X \cap Y$。定义 $L(\mathcal{A})$ 上 Möbius 函数:

$$\begin{cases} \mu(X, X) = 1, & X \in L(\mathcal{A}) \\ \sum\limits_{X \le Z \le Y} \mu(X, Z) = 0, & X, Y, Z \in L(\mathcal{A}) \text{ 且 } X < Y \\ \mu(X, Y) = 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设 $\mu(X) = \mu(\varnothing, X)$, 则 $\mu(\varnothing) = 1$。定义特征多项式为 $\chi(\mathcal{A}, t) = \sum\limits_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)}$。[2]

定义超平面 A 的房为补空间 M 的连通分支, 其中 $M = R^l - \bigcup\limits_{H \in A} H$, 用 $C(A)$ 表示 A 的房的集合, 则有 $|C(A)| = (-1)^l \chi(A, -1) = r(A)$, 且有界的房为 $b(A) = (-1)^{l - \dim(A)} \chi(A, 1)$。同样, 定义 $\mathcal{A}$ 的房为补空间 $\mathcal{M}$ 的连通分支, 其中 $\mathcal{M} = R^l - \bigcup\limits_{H \in \mathcal{A}} H - S^{l-1}$, 用 $C(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的房的集合。显然, $\mathcal{A}$ 的房由 A 的有界的房与被球面分开的无界

收稿日期: 2006-03-14
基金项目: 国家自然科学基金(10671009)
第一作者: 女, 1981 年生, 硕士生
*通讯联系人
E-mail: jianggf@mail.buct.edu.cn

的房组成,所以有$|C(\tilde{A})|=2|C(A)|-b(A)$。

2 由一个球面与一组超平面构成的混杂构形

设$\overline{L}(S^{l-1})=\{\overline{X}\cap S^{l-1}:\overline{X}\in L(A)\}$,定义映射$f:L(A)\setminus L_0(A)\to\overline{L}(S^{l-1})$为$f(\overline{X}^{m+1})=S^{l-1}\cap X^{m+1}=S^m$。

引理1 上面定义的映射$f:L(A)\setminus L_0(A)\to\overline{L}(S)^{l-1}$是保序双射。

证明:对$\forall S^m\in L(S^{l-1}),0\le m\le l-1$,则必存在唯一的子空间$X^{m+1}\in L(A)\setminus L_0(A)$包含$S^m$且满足$S_m=S^{l-1}\cap X^{m+1}$。反过来,对$\forall X^{m+1}\in L(A)\setminus L_0(A)$,都$\exists S^{l-1}\cap X^{m+1}\in L(S^{l-1})$。

因此,f是双射,下面证明f也是保序的。对$\forall\overline{X}^{m+1},\overline{X}^{n+1}\in L(A)\setminus L_0(A)$,设$\overline{X}^{m+1}\subseteq\overline{X}^{n+1}$, $n\ge m$,则有$\overline{X}^{m+1}\cap S^{l-1}\subseteq\overline{X}^{n+1}\cap S^{l-1}$,即$S^m\subseteq S^n$。反之,对$\forall S^m,S^n\in\overline{L}(S^{l-1})$,若$S^m\subseteq S^n$,则有$S^m=S^{l-1}\cap\overline{X}^{m+1}\subseteq S^{l-1}\cap\overline{X}^{n+1}=S^n$,即$\overline{X}^{m+1}\subseteq\overline{X}^{n+1}$。所以,$f$是保序映射。证毕。

定理2 $L(\tilde{A})=L(A)\cup\overline{L}(S^{l-1}),L(A)\cap\overline{L}(S^{l-1})=\varnothing$,$L(\tilde{A})$与$\overline{L}(S^{l-1})$都是交半格。

证明:由$\tilde{A}=A\cup S^{l-1}$, $\forall X\in L(\tilde{A})$, X只有两种情况:

(1) 若X是某一子空间,则必$\exists H_1\cdots H_k\in L(A)$,使得$X=\bigcap_{i=1}^{k}H_i$,$1\le k\le n$,所以$X\in L(A)$。

(2) 若X是某一球面,不妨设$\dim X=m$,则存在唯一的子空间$\overline{X}^{m+1}\in L(A)$使得$X^m$是$\overline{X}^{m+1}$子空间内的$m$维球面,并且有$X^m=S^m=\overline{X}^{m+1}\cap S^{l-1}$,所以有$X^m\in\overline{L}(S^{l-1})$。

综上得$L(\tilde{A})=L(A)\cup\overline{L}(S^{l-1})$且$L(A)\cap\overline{L}(S^{l-1})=\varnothing$。

显然,$L(A)$是一交半格,下面证明$\overline{L}(S^{l-1})$也是一交半格。先定义$\overline{L}(S^{l-1})$上的偏序关系:$S^m\le S^n\Leftrightarrow S^m\supseteq S^n$,其中$S^m,S^n\in\overline{L}(S^{l-1})$。若$S^m\cap S^n\ne\varnothing$,则定义$S^m\vee S^n=S^m\cap S^n$;$S^m\wedge S^n=\bigcap\{Z:Z\in\overline{L}(S^{l-1}),S^m\cup S^n\subseteq Z\}$。由定义可知,$S^m\wedge S^m=S^m$, $S^m\wedge S^n=S^n\wedge S^m$。对$\forall S^i,S^j,S^k\in\overline{L}(S^{l-1})$,设$S^i=\overline{X}^{i+1}\cap S^{l-1}$, $S^j=\overline{X}^{j+1}\cap S^{l-1}$, $S^k=\overline{X}^{k+1}\cap S^{l-1}$,则有$S^i\wedge S^j=\bigcap\{S:S\in\overline{L}(S^{l-1}),S^i\cup S^j\subseteq S\}=\bigcap\{\overline{X}^{\dim S+1}\cap S^{l-1}:(\overline{X}^{i+1}\cap S^{l-1})\cup(\overline{X}^{j+1}\cap S^{l-1})\subseteq\overline{X}^{\dim S+1}\cap S^{l-1}\}=(\bigcap\{\overline{X}^{\dim S+1}:\overline{X}^{i+1}\cup\overline{X}^{j+1}\subseteq\overline{X}^{\dim S+1}\})\cap S^{l-1}=(\overline{X}^{i+1}\wedge\overline{X}^{j+1})\cap S^{l-1}\in\overline{L}(S^{l-1})$

因此有$(S^i\wedge S^j)\wedge S^k=((\overline{X}^{i+1}\wedge\overline{X}^{j+1})\wedge\overline{X}^{k+1})\cap S^{l-1}=(\overline{X}^{i+1}\wedge(\overline{X}^{j+1}\wedge\overline{X}^{k+1}))\cap S^{l-1}=S^i\wedge(S^j\wedge S^k)$

所以,$\overline{L}(S^{l-1})$是交半格。

最后证明$L(\tilde{A})$也是交半格。对$\forall\overline{X}^i\in L(A)$, $\forall S^j\in L(S^{l-1})$,设$S^j=X^{j+1}\cap S^{l-1}$, $\overline{X}^{j+1}\in L(A)$,则有$X^i\wedge S^j=\bigcap\{Z\in L(\tilde{A}):\overline{X}^i\cup S^j\subseteq Z\}$, $X^i\wedge X^j=\bigcap\{Z\in L(A):X^i\cup X^j\subseteq Z\}$

显然,$X^i\wedge S^j\subseteq X^i\wedge X^j$。

记$X^i\wedge S^j=Y$,则Y必是一子空间。若不然,设$Y\in L(S^{l-1})$,则存在唯一子空间$\overline{X}^{\dim Y+1}\in L(A)$包含$Y$,并且有$Y=X^{\dim Y+1}\cap S^{l-1}$,由$Y$的定义知$X^i\cup S^j\subseteq X^{\dim Y+1}\cap S^{l-1}$,则有$\overline{X}^i\cup S^j\subseteq\overline{X}^{\dim Y+1}$,而$\overline{X}^i\subseteq S^{l-1}$与$\overline{X}^i\in L(A)$矛盾。所以,$Y$是一子空间,由$S^j\subseteq Y$得知$\overline{X}^{j+1}\subseteq Y$,即有$\overline{X}^i\wedge\overline{X}^j\subseteq\overline{X}^i\wedge S^j$。所以$\overline{X}^i\wedge S^j=\overline{X}^i\wedge\overline{X}^j=\overline{X}^i\wedge(\overline{X}^{j+1}\cap S^{l-1})$。

对$\forall\overline{X}^m,\overline{X}^n\in L(A)$, $\forall S^i,S^j\in\overline{L}(S^{l-1})$,设$S^i=\overline{X}^{i+1}\cap S^{l-1}$, $S^j=\overline{X}^{j+1}\cap S^{l-1}$,则有

$(\overline{X}^m\wedge S^i)\wedge S^j=(\overline{X}^m\wedge\overline{X}^{i+1})\wedge(\overline{X}^{j+1}\cap S^{l-1})=(\overline{X}^m\wedge\overline{X}^{i+1}\wedge\overline{X}^{j+1})\cap S^{l-1}=\overline{X}^m\wedge((\overline{X}^{i+1}\wedge\overline{X}^{j+1})\cap S^{l-1})=\overline{X}^m\wedge(S^i\wedge S^j)$

$(\overline{X}^m\wedge S^i)\wedge\overline{X}^n=(\overline{X}^m\wedge\overline{X}^{i+1})\wedge\overline{X}^n=\overline{X}^m\wedge(\overline{X}^{i+1}\wedge\overline{X}^n)=\overline{X}^m\wedge(S^i\wedge\overline{X}^n)$

由上可知$L(\tilde{A})$是交半格。证毕。

定理3 设$X^m\in L(\tilde{A})$,若$X^m\in L(A)$,则$\mu_{\tilde{A}}(X^m)=\mu_A(X^m)$;若$X^m\in\overline{L}(S^{l-1})$,则存在唯一的子空间$\overline{X}^{m+1}\in L(A)$包含球面$X^m$,且满足$X^m=S^m=\overline{X}^{m+1}\cap S^{l-1}$,则$\mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^m)=-\mu_A(\overline{X}^{m+1})$。

证明:(1)若$X^m\in L(A)$,用归纳法证明。

$m=l$时,$\mu_{\tilde{A}}(X^l)=\mu_{\tilde{A}}(R^l)=\mu_A(R^l)=1$;$m=l-1$时,$\mu_{\tilde{A}}(X^{l-1})=-\mu_{\tilde{A}}(R^l)=-\mu_A(R^l)=\mu_A(H)=-1$。

设$n>m$时有$\mu_{\tilde{A}}(X^n)=\mu_A(X^n)$成立,则有$\mu_{\tilde{A}}(X^m)=-\sum_{Y\le X^m}\mu_{\tilde{A}}(Y)=-\sum_{Y\le X^m}\mu_A(Y)=\mu_A(X^m)$。所以,$\mu_{\tilde{A}}(X^m)=\mu_A(X^m)$成立。

(2) 若$X^m\in\overline{L}(S^{l-1})$,则存在唯一的子空间$\overline{X}^{m+1}\in L(A)$包含球面$X^m$,且满足$X^m=S^m=\overline{X}^{m+1}\cap S^{l-1}$。设$\{Y^{m+1}\in L(\tilde{A}):Y^{m+1}<S^m,S^m\in\overline{L}(S^{l-1})\}=\{\overline{X}^{m+1},S_1^{m+1},\cdots,S_k^{m+1}\}$,即$L(\tilde{A})$中包含$S^m$的所有$m+1$维元为等式右边所列,则有

$S^m = \overline{X}^{m+1} \cap S_1^{m+1} \cap \cdots \cap S_k^{m+1}$。由于 f 是保序双射,故 $\exists\ \overline{X}_1^{m+2}, \cdots, \overline{X}_k^{m+2} \in L(A)$ 满足 $S_i^{m+1} = \overline{X}_i^{m+2} \cap S^{l-1}, i = 1, \cdots, k$,所以有

$$S^m = \overline{X}^{m+1} \cap (\overline{X}_1^{m+2} \cap S^{l-1}) \cap \cdots \cap (\overline{X}_k^{m+2} \cap S^{l-1}) = (\overline{X}^{m+1} \cap \overline{X}_1^{m+2} \cap \cdots \cap \overline{X}_k^{m+2}) \cap S^{l-1} = \overline{X}^{m+1} \cap S^{l-1}$$

所以 $\overline{X}^{m+1} = X^{m+1} \cap X_1^{m+2} \cap \cdots \cap X_k^{m+2} = X_1^{m+2} \cap \cdots \cap \overline{X}_k^{m+2}$。

假设还存在 $X_{k+1}^{m+2} \in L(A)$ 满足 $X^{m+1} \subseteq X_{k+1}^{m+2}$,由 f 是双射知 $\exists\ S_{k+1}^{m+1} \in L(S^{l-1})$ 使得 $S_{k+1}^{m+1} = \overline{X}_{k+1}^{m+2} \cap S^{l-1}$。又 $S^m \subseteq X^{m+1} \subseteq X_{k+1}^{m+2}, S^m = X^{m+1} \cap S^{l-1}$,所以 $S^m \subseteq X_{k+1}^{m+2} \cap S^{l-1} = S_{k+1}^{m+1}$,即 $S^m \subseteq S_{k+1}^{m+1}$与所设矛盾,所以包含 X^{m+1}的 $m+2$ 维子空间只有 $\overline{X}_1^{m+2}, \cdots, \overline{X}_k^{m+2}$。

下面再用归纳法证明:

$m = l-1$ 时,$\mu_{\tilde{A}}(S^{l-1}) = -\mu_{\tilde{A}}(R^l) = -\mu_A(R^l) = -1$;

假设 $n > m$ 时已有结论 $\mu_{\tilde{A}}(X^n) = -\mu_A(\overline{X}^{n+1})$成立,其中 $X^n = \overline{X}^{n+1} \cap S^{l-1}$,则有 $\mu_{\tilde{A}}(X^m) = -\sum_{Y<X^m} \mu_{\tilde{A}}(Y) = -(\mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^{m+1}) + \sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{A}}(S_i^{m+1}) + \sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^{m+2}) + \sum_{i\in E} \mu_{\tilde{A}}(S_i^{m+2}) + \sum_{i\in E} \mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^{m+3}) + \cdots + \mu_{\tilde{A}}(S^{l-1}) + \mu_{\tilde{A}}(R^l))$,由假设知 $\sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{A}}(S_i^{m+1}) + \sum_{i=1}^k \mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^{m+2}) = 0, \cdots, \sum_{i\in E} \mu_{\tilde{A}}(S_i^{m+2}) + \sum_{i\in E} \mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^{m+3}) = 0, \cdots, \mu_{\tilde{A}}(S^{l-1}) + \mu_{\tilde{A}}(R^l) = 0$,故上式 $= -\mu_{\tilde{A}}(\overline{X}^{m+1}) = -\mu_A(\overline{X}^{m+1})$。证毕。

推论 4　$\chi(\tilde{A}, t) = (1 - \frac{1}{t})\chi(A, t) + \frac{1}{t}\sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, t)$

证明:设 $\chi(A, t) = t^l + a_1 t^{l-1} + a_2 t^{l-2} + \cdots + a_{l-2}t^2 + a_{l-1}t + \sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, t)$,则有

$$\chi(\tilde{A}, t) = \chi(A, t) - (t^{l-1} + a_1 t^{l-2} + a_2 t^{l-3} + \cdots + a_{l-2}t + a_{l-1}) = \chi(A, t) - \frac{1}{t}(\chi(A, t) - \sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, t)) = (1 - \frac{1}{t})\chi(A, t) + \frac{1}{t}\sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, t)$$

证毕。

推论 5　$|C(\tilde{A})| = (-1)^l\chi(\tilde{A}, -1) - |\chi(A, 1)| + (-1)^l\sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, -1)$

3　由多个球面与一组超平面构成的混杂构形

对上面所讨论的混杂构形 A 作进一步推广,若 $L_0(A) \neq \varnothing$,不妨记 $L_0(A) = \{p_i \in A, i = 1, \cdots, k\}$,令 $A_i = \{H \in A | p_i \in H\}, i = 1, \cdots, k$。然后在 R^l 中分别以 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为球心,$r_1, r_2, \cdots, r_k$ 为半径,作 k 个 $l-1$ 维的小球面 $S_{r_1}^{l-1}, S_{r_2}^{l-1}, \cdots, S_{r_k}^{l-1}$。让半径 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 充分小,使所有小球面都包含在大球面内,并且任意两个小球面都互不相交。由此,可以得到 k 个小混杂构形 $\tilde{B}_1 = \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_1\right) \cup S_{r_1}^{l-1}, \tilde{B}_2 = \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_2\right) \cup S_{r_2}^{l-1}, \cdots, \tilde{B}_k = \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_k\right) \cup S_{r_k}^{l-1}$。这样就构成了新的复杂的混杂构形 $\tilde{B} = \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{B}_j\right) \cup S_r^{l-1}$,下面的定理给出了混杂构形 $\tilde{B}$ 的性质。

定理 6　混杂构形 $\tilde{B}$ 的房的个数为:$|C(\tilde{B})| = (-1)^l\chi(\tilde{A}, -1) - |\chi(A, 1)| + (-1)^l\sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, -1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (-1)^l\chi(B_i, -1)$。

证明:由观察很容易发现$|C(\tilde{B})| = |C(\tilde{A})| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k |C(\tilde{B}_i)|$,而$|C(\tilde{B}_i)| = (-1)^l\chi(A_i, -1)$,所以可得$|C(\tilde{B})| = (-1)^l\chi(\tilde{A}, -1) - |\chi(A, 1)| + (-1)^l\sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, -1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (-1)^l\chi(B_i, -1)$。证毕。

4　应用举例

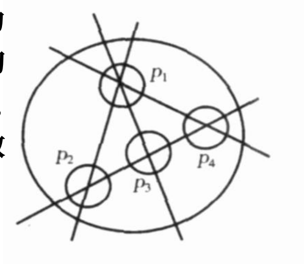
例 1　若 A 是中心构形,则由上面的推论可以得到 $\chi(\tilde{A}, t) = (1 - \frac{1}{t})\chi(A, t) + \frac{1}{t}\mu_A(\hat{1})$,$|C(\tilde{A})| = (-1)^l\chi(\tilde{A}, -1) + (-1)^l\mu_A(\hat{1})$。

例 2　对 n 维一般位置构形 $A = \{H_1, H_2, \cdots, H_m\}\ (m \geq n)$,有[3] $\chi(A, t) = t^n - C_m^1 t^{n-1} + C_m^2 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_m^n$,$|C(A)| = r(A) = C_m^0 + C_m^1 + \cdots + C_m^n$,$b(A) = C_{m-1}^n$,所以由推论可得到:

$$\chi(\tilde{A}, t) = (1 - \frac{1}{t})\chi(A, t) + \frac{1}{t}\sum_{X\in L_0(A)} \mu_A(X, t) =$$

$C^0_{m+1}t^n - C^0_{m+1}t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}C^n_{m+1} + (-1)^nC^n_m$，$|C(\tilde{A})| = 2|C(A)| - b(A) = 1 + C^1_{m+1} + C^2_{m+1} + \cdots + C^n_{m+1} + 2C^n_m - C^n_{m-1}$。

例 3　如右图所示为一 R^2 中的复杂的混杂构形 $\tilde{B}$，$L_0(A) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$，**计算其房的个数** $|C(\tilde{B})|$。



由定理 6 可得：

$C|(\tilde{B}_1)| = 6$，$|C(\tilde{B}_2)| = 4$，$|C(\tilde{B}_3)| = 4$，$|C(\tilde{B}_4)| = 4$，**所以有** $|C(\tilde{B})| = 18 + 6 + 4 + 4 + 4 = 36$。

参考文献：

[1] HU Yi. On the homology of complements of subspaces and spheres[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1994, 122: 285 - 290.

[2] ORLIK P, TERAO H. Arrangements of Hyperplanes[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[3] STANLY R P. An introduction to hyperplane arrangements[M]. Washington: IAS/Park City Mathematics Series, 2004.

The characteristic polynomials of a class of mixed arrangements

DONG Yun　JIANG GuangFeng

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The lattice properties of a mixed arrangement A consisting of hyperplanes and spheres in R^l have been postulated and proved. The Möbius function of the mixed arrangement μ_A was subsequently derived. A class of mixed arrangements with more than one sphere was studied and, finally, the characteristic polynomials and the formulae for the number of chambers were obtained.

Key words: mixed arrangement; Möbius function; characteristic polynomial

(上接第 199 页)

Synthesis of diglycerides by enzymatic esterification using immobilized lipase from *Candida* sp. 99-125 in a solvent-free system

HU Sun[1,2]　WANG Fang[1,2]　TAN TianWei[1,2]

(1. Beijing Key Laboratory of Bioprocess; 2. College of Life Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Enzymatic synthesis of diolein using oleic acid and glycerol as substrates for immobilized lipase from *Candida* sp. 99-125 has been studied in a solvent-free system. The immobilized lipase from *Candida* sp. 99-125 and different commercial lipases were compared under same reaction conditions. Of three ways of removing water produced in the reaction, spontaneous evaporation was found to be most effective. After optimization of reaction conditions, the conversion of oleic acid can reach a maximum of 92.64 % and the amount of diacylglycerol (DAG) in the product can reach 66.16 % when using a substrate ratio (oleic acid to glycerol) of 2∶1, reaction temperature of 50 ℃, and enzyme dosage of 0.60 g/5.65 g oleic acid.

Key words: diglycerides; lipase-catalyzed; esterification