

基于 VaR 控制下的动态优化投资组合

王锦玉 杨永愉*

(北京化工大学理学院, 北京 100029)

摘要: 本文应用的动态优化投资组合模型是在 VaR 的约束下, 调整投资组合的配置, 使期望收益达到最大。基于投资组合中每一种资产的收益率序列, 模型在不断变化的数据窗口下, 首先估计模型参数, 然后求解优化模型, 得到每日投资组合中风险资产在 VAR 约束下的最优配置和借贷比率。这种方法对构筑新的风险资产投资组合的决策, 以及对已有投资组合中资产配置的优化具有重要的指导意义。选取中国 A 股市场的 4 只股票, 在收益率服从正态分布的假定下, 确定投资组合中的资产配置以及借贷比率, 并且讨论了模型参数的敏感性。

关键词: VaR; 投资组合; 动态; 优化

中图分类号: F830.91

引言

1952 年 Markwitz 提出的均值-方差模型, 是现代投资理论的基础。1963 年, Sharpe 提出了单指数模型和多因素模型, 并创立了目前在投资组合理论中占据重要地位的资本资产定价模型 (CAPM)。1976 年, Ross 建立了崭新的套利定价理论 (APT)。1997 年, Jorion 将 VaR^[1] (Value at Risk, “处于风险中的价值”, 是指在正常的市场波动条件下, 对给定的置信水平, 金融资产或证券组合在未来特定的一段时间内所面临的最大可能损失) 定义为对给定的置信水平, 在确定的投资期限内的最大损失。2004 年, Rengifo, Rombouts 提出了在 VaR 限制下的动态优化投资组合模型^[2], 这个模型将 2001 年 Campbell, Huisman 和 Koedijk 提出的 CHK 模型^[3]推广到动态的优化投资组合模型。

本文方法的主要思想是, 随着时间的变化, 首先考查投资组合中每一种资产的基本统计特征, 由此决定最优化模型中的参数估计方法^[4], 并且估计模型中的参数, 然后求解资产配置的优化模型, 最后确定借贷比率。作为实证分析, 选取中国股票 A 股市场的数据进行研究和讨论, 应用动态优化投资组合模型预测投资组合的配置, 以及相应的借入或借出

货币的数量和比率。

1 动态优化投资组合模型

本文提出的模型是基于 VaR 约束下的资产组合优化模型, 研究的是离散的多周期模型, 以 VaR 作为风险度量, 在给定置信水平的 VaR 约束下, 调整投资组合中各项资产的配置, 使期望回报达到最大。在模型的求解过程中, 将约束条件吸收到模型中, 从而得到无约束条件的优化问题。同时考虑在无风险市场利率的条件下投资者对资产的借入和借出的可能性及数量。

定义 W_t 为 t 时刻投资者的资产, 由于优化周期为 1 d, 我们用 t 时刻的数据来预测 $t+1$ 时刻的投资组合的配置, 所以在每一个优化过程中 W_t 为不变量。 b_t 为在无风险利率 $V_{t,a}$ 下借入 ($b_t > 0$) 和借出 ($b_t < 0$) 的货币数量。记 n 种资产中第 i 种资产在 t 时刻的价格为 $p_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。定义 $x_{i,t}$ 为第 i 种资产在 t 时刻的权重 ($\sum_{i=1}^n x_{i,t} = 1$)。记 $i_{i,t} = x_{i,t} (W_t + b_t) / p_{i,t}$ 为 t 时刻第 i 种资产所占的份额。于是投资者的投资预算可以表示为

$$W_t + b_t = \sum_{i=1}^n i_{i,t} p_{i,t} = \sum_{i=1}^n i_{i,t} p_t \quad (1)$$

$t+1$ 时刻投资组合的价值为

$$W_{t+1}(\tau) = (W_t + b_t) (1 + R_{t+1}(\tau)) - b_t (1 + r_f) \quad (2)$$

其中 $R_{t+1}(\tau)$ 是到期日投资组合的回报率, $\tau = (1, t, 2, t, \dots, n, t)$, $p_t = (p_{1,t}, p_{2,t}, \dots, p_{n,t})$ 。

收稿日期: 2006-06-02

第一作者: 女, 1977 年生, 硕士生

*通讯联系人

E-mail: yangyongyu@sohu.com

对给定的置信水平 α , 以 VaR 作为风险度量, 在给定约束条件下的投资组合优化配置的数学模型可表作

$$\begin{aligned} & \max_{b_t} (W_t + b_t) (1 + E_t R_{t+1}(\cdot)) - b_t \\ & \text{s. t.} \begin{cases} W_t + b_t = \sum_{i=1}^n x_{i,t} p_{i,t} = W_t \\ P_t [W_{t+1}(\cdot) - W_t - V^*] \leq 1 - \alpha \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $E_t R_{t+1}(\cdot)$ 表示投资组合在给定 t 时刻信息时的期望回报率。 $x_{i,t}$ 是使投资回报最大时的各资产的配置份额。其中 $P_t(\cdot)$ 表示 t 时刻的概率, V^* 是投资者所能承受的 VaR 水平。经适当变形, 模型(3)可转化为无约束条件的优化问题。即

$$E_t W_{t+1}(\cdot) = \sum_{i=1}^n x_{i,t} (E_t R_{t+1}(\cdot) - r_f) + W_t (1 + r_f) \quad (4)$$

(4) 式表明, 如果投资组合的期望回报大于无风险利率, 风险厌恶的投资者会将资产的一部分进行风险投资。将式(4)代入式(3)得到

$$P_t \left[\sum_{i=1}^n x_{i,t} (R_{t+1}(\cdot) - r_f) + W_t (1 + r_f) - V^* \right] \leq 1 - \alpha \quad (5)$$

于是可得

$$P_t \left[R_{t+1}(\cdot) - r_f - \frac{V^* + W_t r_f}{W_t} \right] \leq 1 - \alpha \quad (6)$$

定义 $q(\cdot, \cdot)$ 为投资组合回报率 $R_{t+1}(\cdot)$ 的分布所对应的 α 分位数, 那么投资预算可以表达为

$$x_{i,t} p_{i,t} = \frac{V^* + W_t r_f}{r_f - q(\cdot, \cdot)} \quad (7)$$

将(7)式代入(4)式, 并且在式子两端同时除以初始资产 W_t 得到

$$\frac{E_t (W_{t+1}(\cdot))}{W_t} = \frac{V^* + W_t r_f}{W_t r_f - W_t q(\cdot, \cdot)} \cdot (E_t R_{t+1}(\cdot) - r_f) + (1 + r_f) \quad (8)$$

显然, (8) 式中右边的两项 $V^* + W_t r_f$ 和 $1 + r_f$ 并不影响(8)式的极大化过程, 因此, 最终的极大化目标函数可表作

$$b_t^* = \arg \max \frac{E_t R_{t+1}(\cdot) - r_f}{W_t r_f - W_t q(\cdot, \cdot)} \quad (9)$$

投资者所需借入或借出的货币数量可以表示为

$$b_t = \frac{V^* + W_t q(\cdot, \cdot)}{r_f - q(\cdot, \cdot)} \quad (10)$$

在求解(9)式的过程中, 我们假定投资期限是有限的。如果选取的投资期限 T 较长, 则将这个较长的时间分成较短的时间分别进行优化。例如, 如果

$t = 30$ d, 以 1 d 作为优化周期, 优化 30 次, 从而获得最终优化配置。由于模型中参数每天的变化比较小, 所以, 根据投资期限的长短, 可以考虑以 5 d, 10 d, 15 d, 甚至 20 d 作为优化周期。

假定初始投资额为人民币 10 万元, 取无风险利率为 1.3%, 在置信水平为 95% 的情况下, 求解(9)式, 得到投资组合优化配置的结果。

2 参数估计

2.1 投资组合回报的估计

$$R_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

其中, μ_t 为 t 时刻的条件均值, 它可以用回报的样本均值估计, ε_t 是误差项, 它是均值为零, 条件方差为 σ_t^2 的随机量, 其分布要根据回报序列的统计特征来确定。

2.2 条件方差 σ_t^2 的估计

将误差项 ε_t 分解为 $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, 其中 $z_t (t = 1, 2, \dots, T)$ 是均值为零, 方差为 1 的独立同分布的随机变量。采用下列三种不同的方法估计条件方差 σ_t^2

CHK 模型: 用前 $(t-1)$ d 的回报序列数据的样本方差估计;

$$\text{GARCH}(1, 1) \text{ 模型, } \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2;$$

$$\text{APARCH}(1, 1) \text{ 模型, } \sigma_t = \omega + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| -$$

$$n \sigma_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}.$$

这里的参数有 $\omega, \alpha_1, \beta_1, n$ 。参数 $n (> 0)$ 是 ε_t 的 Box-Cox 变换。参数 $n (-1 < n < 1)$ 反映了杠杆作用。如果 $n = 2, \beta_1 = 0$, 就得到了 GARCH(1, 1) 模型。

2.3 VaR 的估计

在无参数模型中, VaR 用给定置信水平 α 的经验分布的分位数来估计。在参数模型中, t 时刻置信水平为 α 的 VaR_t , 记为 $V_{t,\alpha}$, 可用下式计算 $V_{t,\alpha} = \mu_t + \sigma_t q_{1-\alpha}$

其中 μ_t 和 σ_t 分别是用到 $t-1$ 时刻的数据预测的条件均值和方差。 $q_{1-\alpha}$ 是分布在 $1-\alpha$ 处的分位数。

2.4 风险投资组合的优化配置

一旦决定了风险投资组合的 VaR, 就可使用式(9)获得优化投资组合中各资产所占的比例, 这样的优化配置可以保证在 VaR 控制下的期望回报最大化。同时, 通过式(10)可以决定在优化配置下需要借入还是借出货币及其数量。

3 实例分析

选取深圳股票交易所 A 股市场的 4 只股票：金

融街，华联控股，深南电 A，中集集团 1996-06-13 ~ 2005-03-15 各 2000 个数据进行分析。表 1 为这 4 支股票对数收益率的统计描述。

表 1 4 支股票的对数收益率统计描述
Table 1 Descriptive statistics for returns of the four stocks

股票	最大值	最小值	均值	标准差	峰度	偏度
金融街	0.1382	- 0.7568	0.000259	0.0353	3.5297	0.2818
华联控股	0.1386	- 0.6303	0.000237	0.0344	2.7728	- 0.0784
深南电 A	0.1109	- 0.5714	0.000220	0.0299	4.7522	0.0594
中集集团	0.0957	- 0.4983	0.000339	0.0293	3.9132	- 0.0081

根据统计描述的结果，可以认为对数收益率服从正态分布。

表 2 为这 4 只股票优化投资组合配置。

表 2 4 只股票优化投资组合配置
Table 2 Percentages of the four stocks in an optimal portfolio

股票	份额
金融街	22
华联控股	14
深南电 A	19
中集集团	45

按照模型中的 (10) 式，当无风险利率为 1.3 % 时，得到 $b_t = 53\%$ ，这表明此时应借入初始投资额 53 % 的资金作为风险投资。这是由于无风险利率低于风险投资的收益，投资者应该考虑借入资金，扩大风险投资的规模，以获取更大的收益。

在此基础上，选取 2005-03-15 ~ 2005-04-26 共 30 d 的数据继续应用模型，得到 30 d 的优化结果，如图 1 所示。

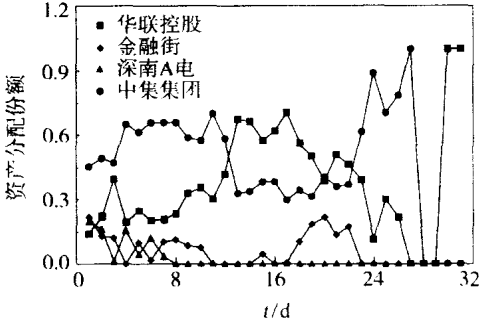


图 1 4 只股票 30 d 的投资组合优化配置
Fig. 1 Variation in the percentage of the four stocks over an optimal portfolio over thirty days

从图 1 中可以看到，当收益率变化时，相应的投资组合的配置也发生了变化。由于投资组合中的资产 3 (深南电 A) 的收益率持续下滑甚至变为负值，因此在优化过程后期它的投资份额保持为零。而资产 4 (中集集团) 和资产 2 (华联控股) 在 30 d 内收益率相对在较高水平，因此它们在不同时间都相应给与了较高的份额。另外，从图 1 的结果发现，模型对收益率的变化相当敏感，有效地规避了风险。而当选取了不同的无风险利率，例如 0.8 %，1.7 % 等，优化的结果并无明显变化，这说明无风险利率对该模型的影响较小。

4 结论

通过上述的实例分析可以看出，这个动态优化模型是可以应用于中国股票市场的。根据模型，选取 $(t - 1)$ d 的数据就可以预测出 t 时刻的投资组合的配置，而且模型对投资组合中各资产的收益率变化比较敏感，随着数据窗口的移动，相应的优化结果也有一定的变化，可以满足实际应用的需要。同时，模型考虑了借入和借出的情况，从而更贴近中国股票市场实际投资者的需求，因此该模型和方法具有一定的实用价值。

参考文献：

[1] 王春峰. 金融市场风险管理 [M]. 天津：天津大学出版社，2001：75 - 79.
[2] HUISMAN R, KOEDIJ K G K, POWNALL A J R. Asset allocation in a Value-at-Risk framework [EB/OL]. [2006-04-15]. [http: www. glorimundi. org/picsresources/ rhkkipc. pdf](http://www.gloriamundi.org/picsresources/rhkkipc.pdf).
[3] CAMPBELL R, HUISMAN R, KOEDIJ K G. Optimal Portfolio Selection in a Value-at-Risk Framework

[J]. Journal of Banking and finance, 2001, 25: 1789 - 1804.

应用[J]. 华南理工大学学报:自然科学版, 2004, 32 (2): 85 - 88.

[4] 罗军, 何春雄. 基于风险测度的投资组合优化模型及

Dynamic optimal portfolio in a VaR framework

WANG Jin Yu YANG Yong Yu

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: A dynamic portfolio model that maximizes expected returns subject to a Value-at-Risk constraint by adjusting the set of portfolio weights, has been investigated. Parameters of the model were first investigated by several methods based on the return serials of each financial asset in the portfolio along with the movement of the data windows. Then, by solving for the optimal model, the best daily allocations of the optimal portfolio and the rate of borrowing and lending subject to a Value-at-Risk constraint were obtained. The results are of value in setting up a new risk portfolio and optimizing the daily portfolio allocations. Four shares in the Chinese A stock market were selected and, with the assumption of a normal distribution of the returns, the daily portfolio allocations and the rate of borrowing and lending were obtained. The sensitivity of the model parameters are also discussed in this paper.

Key words: VaR; portfolio; dynamic; optimal

下 期 预 告

纳米缓释型阿维菌素粉剂新剂型研究	李剑峰等	新型锂电池正极材料多硫化碳炔的研究	李晓林等
NaY沸石膜组件中苯渗透特性的预测	王会东等	气相色谱-质谱法测定茶叶中 42 种残留农药	董金斌等
EVA-g-MAH 和改性纳米碳酸钙增韧 PC/ABS 合金的研究	查留锋等	紫外光引发丙烯酸胺沉淀聚合的研究	严 艳等
N ₂ O 和苯在 Fe-ZSM-5 分子筛表面吸附的原位漫反红外光谱研究	郭泉辉等	基于改性亚麻籽油的紫外光固化杂化膜的性能及显微形貌	贺建芸等
高压下 CO ₂ -异丙醚体系的汽液相平衡	朱彩凤等	香豆素-3-甲酸与 9-蒽甲酸共插层锌铝水滑石的制备和表征	文 征等
纳米二氧化锡粉体的超重力-水热法制备与表征	李振昊等	(1-3)-D-葡聚糖的季铵盐合成及其抗菌活性的研究	王天奇等
旋转填充床内微观混合的沿程实验研究	杨海健等	葡萄糖氧化酶在管状空心二氧化硅载体上的固定化研究	蒋利伟等
具有 C _{2v} 对称性二苯并噻吩衍生物的合成及光学特性	庄俊鹏等	-己内酰胺双封端异氰酸酯的合成及鉴定	汪 琛等
反气相色谱法测定燃料乙醇专用吸附剂对水和乙醇的吸附	韩秀丽等	两步法实现 STEP-NC 到 XML 的转化	张莉彦等
高纯度液体环氧树脂的结构表征及固化动力学研究	罗 毅等	两种策略实现 1,3-丙二醇关键酶基因的共表达	曲荟锦等
力场效应在 PAN 分子热分解环化初期的作用	刘子铭等	超平面构形的 3 不变量的一个算法	张 曦等
多直线分光光度法快速测定化学需氧量	张建刚等	聚合物驱注入与产出聚丙烯酰胺的对比研究	由 庆等
促渗剂对左炔诺孕酮透皮性能的研究	杜洪光等	不同负载方法制备 Ni 金属有序介孔 Al ₂ O ₃ 催化剂结构及催化性能研究	李翠平等