

研究简报·

扰动 KdV 方程解的先验估计

全雅娜 江新华*

(北京化工大学理学院, 北京 100029)

摘要: 对于带微扰的 KdV 方程 $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = R(u)$, ($\epsilon > 0$), 在初值 $u_0(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时指数衰减的条件下, 分别构造出带两种不同扰动项的 KdV 方程的扰动孤立波解满足的能量关系式, 并运用能量分析方法对扰动的孤立波解进行先验估计, 得到如下结论: (1) $R(u) = \epsilon(t)u$, ($\epsilon(s) \in C[0, +\infty)$), ($\epsilon(0) = 0$), 解在 $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$ 内一致有界; (2) $R(u) = -\epsilon(t)u_{xxx}$, ($\epsilon(0) = 0$), ($\epsilon(s) \in C^1[0, +\infty)$), 解在 $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$ 内一致有界。

关键词: KdV 方程; 先验估计; 扰动的孤立波

中图分类号: O175.29; O29

KdV 方程一直被视为研究孤立子现象的经典方程。1895 年, Korteweg 和 des Vries 在研究浅水波时用这一方程描述浅水波中的孤立波现象, 以后又相继在其它很多领域的研究中发现很多现象可以用 KdV 方程描述^[1-2]。这一非线性方程不仅有象线性波方程那样的周期解^[3-6], 而且它的孤立波解具有象线性波解那样的叠加性质^[1-2]; 此外, 有趣的是 Miura 等发现 KdV 方程有无穷多个守恒律^[7-8]。事实上, 对于 KdV 方程的初值问题

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (|x| \rightarrow \infty \text{ 时}, u, u_x, u_{xx}, \dots \rightarrow 0), \quad (2)$$

可以得到 KdV 方程的前三个守恒律

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx = 0$$

1992~1993 年, Grimshaw 等^[9-10]在研究深海中的孤立波现象时, 发现这类孤立波可以用如下带扰动项的 KdV 方程来描述:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = R(u), \quad (3)$$

其中, $\epsilon \ll 1$ 是一个正数, $R(u)$ 是一个算子, 其典型形式为 $R(u) = \epsilon(t)u$, $R(u) = u_{xx}$ 和 $R(u) = -\epsilon(t)u_{xxx}$, 其中 $\epsilon(0) = \epsilon(\infty) = 0$, 函数 $\epsilon(s) \in C^1$ 。Grimshaw 和 Mitsudera^[10]利用多重尺度法构造了扰动孤立波解的一个近似解析表示式。对这种扰动孤立波的定性的理论研究至今还没有文章涉及。本文就 $R(u) = \epsilon(t)u$ 及 $R(u) = -\epsilon(t)u_{xxx}$ 两种不同的情况, 在初值

$$u(x, 0) = u_0(x) \in C(-\infty, +\infty) \quad (4)$$

当 $|x| \rightarrow \infty$ 时指数衰减的条件下, 分别构造出问题(3)、(4)的解满足的能量关系式, 并利用能量分析方法, 给出扰动孤立波解的界的先验估计, 从而为该问题数值解的研究提供必要的基础。

在本文中, 记

$$c_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{0x}^2 - 2u_0^3) dx$$

1 $R(u) = \epsilon(t)u$ 的情形

此时, 方程(3)即为

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \epsilon(t)u \quad (5)$$

对方程(5)的两边积分得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx + 6 \int_{-\infty}^{+\infty} uu_x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx} dx = \epsilon(t) \int_{-\infty}^{+\infty} u dx,$$

即

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = -\epsilon(t) \int_{-\infty}^{+\infty} u dx \quad (6)$$

收稿日期: 2006-03-06

基金项目: 教育部回国留学人员科研启动基金(JLX200406)

第一作者: 女, 1982 年生, 硕士生

*通讯联系人

E-mail: jiangxh@mail.buct.edu.cn

方程(5)的两边同时乘以 u , 并积分可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t u dx + 6 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u u_{xxx} dx =$$

$$(t) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx,$$

即

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = 2 (t) \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx \quad (7)$$

方程(5)的两边同时乘以 u^2 , 然后再积分可得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^3 dx =$$

$$3 (t) \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx \quad (8)$$

方程(5)的两边同时乘以 u_{xx} , 积分可得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + 6 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^3 dx =$$

$$2 (t) \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \quad (9)$$

综合(8)、(9)两式可得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx =$$

$$(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (2u_x^2 - 6u^3) dx \quad (10)$$

式(6)、(7)、(10)表明,在这种情况下质量和能量不再守恒。由(7)式可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = e^{2 \int_0^t (s) ds} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx =$$

$$u_0^2 e^{2 \int_0^t (s) ds} \quad (11)$$

设 $t \in T$ 为有界量, 则 (t) 为有界量。由(10)式可得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx = 2 (t) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 -$$

$$2u^3) dx = -2 (t) \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx,$$

因此,

$$e^{-2 \int_0^t (s) ds} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{0x}^2 -$$

$$2u_0^3) dx = -2 \int_0^t \left[(s) e^{-2 \int_0^s (s) ds} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx \right] d$$

$$2 \int_0^t \left[\left| (s) \right| e^{-2 \int_0^s (s) ds} M(s) e^{2 \int_0^s (s) ds} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2$$

$$dx \right] d = 2 \max_{[0, t]} (M(s)) u_0^2 \int_0^t \left| (s) \right| ds,$$

这里 $M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx (-\infty, +\infty)$ 。于是有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx \leq \left[c_0 + 2 \max_{[0, t]} (M(s)) \cdot$$

$$u_0^2 \int_0^t \left| (s) \right| ds \right] e^{2 \int_0^t (s) ds}$$

因而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx + \left[c_0 + 2$$

$$\max_{[0, t]} (M(s)) u_0^2 \int_0^t \left| (s) \right| ds \right] e^{2 \int_0^t (s) ds}$$

$$\left[c_0 + 2 \max_{[0, t]} (M(s)) u_0^2 \left(1 + \int_0^t \left| (s) \right| ds \right) \right] \cdot$$

$$e^{2 \int_0^t (s) ds} \quad (12)$$

利用(11)、(12)两式,有

$$M^2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq c_0 +$$

$$u_0^2 + 2 \max_{[0, t]} (M(s)) u_0^2 \left(1 + \int_0^t \left| (s) \right| ds \right)$$

$$e^{2 \int_0^t (s) ds} = 2 \max_{[0, t]} (M(s)) c_1(t) + c_2(t),$$

由上式可得

$$\left(\max_{[0, t]} M(s) \right)^2 \leq 2 \max_{[0, t]} (M(s)) \max_{[0, t]} (c_1(s)) +$$

$$\max_{[0, t]} (c_2(s))$$

于是对于任意满足 $0 \leq t \leq T$ 的 t , 都有

$$\max_{[0, t]} (M(s)) \leq \max_{[0, t]} (c_1(s)) +$$

$$\sqrt{\max_{[0, t]} (c_2(s)) + \left(\max_{[0, t]} (c_1(s)) \right)^2} \left[u_0^2 \cdot \left(1 + \int_0^t \left| (s) \right| ds \right) \right] +$$

$$\sqrt{c_0 + u_0^2 + u_0^4 \left(1 + \int_0^t \left| (s) \right| ds \right)^2} \cdot$$

$$e^{2 \int_0^t (s) ds} \quad (13)$$

故有

$$M(t) \leq \left[u_0^2 \left(1 + \int_0^t \left| (s) \right| ds \right) + \right.$$

$$\left. \sqrt{c_0 + u_0^2 + u_0^4 \left(1 + \int_0^t \left| (s) \right| ds \right)^2} \right] \cdot$$

$$e^{2 \int_0^t (s) ds}$$

综合上面的讨论,可得

定理 1 如果 $(s) \in C[0, +\infty)$, 则对任一给定的 $T > 0$, 问题(4)、(5)的解在 $-\infty < x < +\infty$,

$0 \leq t \leq T$ 内一致有界。进一步地, 若 $\int_0^t \left| (s) \right| ds$ 收敛, 则解在 $-\infty < x < +\infty$, $t \rightarrow 0$ 时一致有界。

2 $R(u) = - (t) u_{xxx}$ 的情形

此情况下, 方程(3)可写为

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = - (t) u_{xxx}, \quad (0) = 0$$

(14)

同前两种情况类似, 可以得到

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} (t) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \quad (16)$$

由式(15)可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx \quad (17)$$

对(16)式两边关于 t 积分可得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 - 2u^3) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{0x}^2 - 2u_0^3) dx = - \\ & \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (t) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx = - \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \\ & 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx dt, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & [1 + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \\ & u_0^3 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0x}^2 dx + 2 \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right] dt = \\ & 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (u - u_0) (u^2 + uu_0 + u_0^2) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0x}^2 dx + \\ & 2 \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (u - u_0) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right] dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \\ & (u - u_0) \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + uu_0 + u_0^2) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0x}^2 dx + \\ & 2 \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (u - u_0) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right] dt = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} (u - u_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \\ & (u + u_0) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + 2 \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (u - u_0) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ & \left. u_x^2 dx \right] dt \end{aligned}$$

设 $t \in [0, T]$ 为有界量, $0 \leq t \leq T$ 时, 有 $0 < u_1 \leq 1 + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx$ 。记

$$\begin{aligned} & (t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx, \text{Var}_{[0, t]}(\cdot) = \\ & \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (s) |ds \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & u_1(t) \leq 6 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx + \\ & (0) + 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (s) |ds \quad (18) \end{aligned}$$

又由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dx \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u| |u_x| dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

所以

$$u \leq L \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \quad (19)$$

$$u_0 \leq L \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \quad (20)$$

将式(19)、(20)代入式(18), 得

$$\begin{aligned} & u_1(t) \leq 6 \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} \left[\left(\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \right] + \\ & (0) + \text{Var}_{[0, t]}(\cdot) \max_{[0, t]}(\cdot), \end{aligned}$$

对上式两边取最大值可得

$$\begin{aligned} & u_1 \max_{[0, t]}(\cdot) \leq 12 \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} \max_{[0, t]}(\cdot)^{\frac{3}{4}} + \\ & (0)^{\frac{3}{4}} \max_{[0, t]}(\cdot)^{\frac{1}{4}} + \text{Var}_{[0, t]}(\cdot) \max_{[0, t]}(\cdot) \\ & [1 - \text{Var}_{[0, t]}(\cdot)] \left[\max_{[0, t]}(\cdot) \right]^{\frac{3}{4}} \leq 12 \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} + \left(\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx \right)^{\frac{3}{4}}$$

即

$$\begin{aligned} & [1 - \text{Var}_{[0, t]}(\cdot)] \left[\max_{[0, t]}(\cdot) \right]^{\frac{3}{4}} \leq 12 \sqrt{2} \\ & \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} + \left(\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

对任一固定的 $T > 0$, 存在 $\epsilon_1 > 0$, 使得当 0

$\epsilon_1 > 0$, 即充分小时, 有 $1 - \text{Var}_{[0, \epsilon_1]}(\cdot) > 0$, 从而

$$\max_{[0, \epsilon_1]}(\cdot) \leq \left[\frac{12 \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} + \left\| u_{0x} \right\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}}{1 - \epsilon_1 \text{Var}_{[0, \epsilon_1]}(\cdot)} \right]^{\frac{4}{3}}$$

结合(19)式, 则有

$$u \leq L \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{12 \sqrt{2} \left\| u_0 \right\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} + \left\| u_{0x} \right\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}}{1 - \epsilon_1 \text{Var}_{[0, \epsilon_1]}(\cdot)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

因此, 有

定理 2 如果 $(s) \in C^1[0, +\infty)$, $(0) = 0$, 则对任一给定的 $T > 0$, 存在 $\epsilon_1 > 0$, 使得问题(4)、(14)的解在 $-\epsilon_1 < x < +\epsilon_1$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq u_1$ 内一致有界。进一步地, 若 (s) 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 且 $\int_0^+ \int_{-\infty}^{+\infty} (s) |ds < +\infty$, 则 $\exists \epsilon_2 > 0$ 存在, 使得 $0 \leq t \leq \epsilon_2$ 时, 问题(4)、(14)的解在 $-\epsilon_2 < x < +\epsilon_2$, $t \geq 0$ 上一致有界。

致谢 在此论文的撰写过程中, 黄晋阳教授提

出了有益的建议,在此表示衷心的感谢。

参考文献:

- [1] MIURA R M. The Korteweg-de Vries equation: a survey of results[J]. SIAM Review, 1976, 18(3): 419 - 424.
- [2] SCOTT A, CHU F, MCLAUGHLIN D. The soliton: a new concept in applied science [J]. Proceeding of the IEEE, 1973, 61(10): 1443 - 1474.
- [3] LIU Guanting, FAN Tianguo. Periodic solutions of 2 + 1 dimensional nonlinear evolution equations[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University, 2004, 33(4): 345 - 352.
- [4] 李晓燕, 张令元. (2 + 1) 维 KdV 方程的周期波解和孤立波解[J]. 兰州理工大学学报, 2005, 33(1): 138 - 140.
- [5] JIANG Xinhua, WONG R. Asymptotic analysis of a perturbed periodic solution of the KdV equation[J]. Studies in Applied Mathematics, 2006, 116: 21 - 33.
- [6] 李向正, 王明亮, 李晓燕. 应用 F 展开法求 KdV 方程地周期解[J]. 应用数学, 2005, 18(2): 303 - 307.
- [7] MIURA R M, GARDNER C S, KRUSKAL M D. The Korteweg-de Vries equation and generalizations, Existence of conservation laws and constants of motion [J]. Journal of Mathematical physics, 1968, 9: 1204 - 1209.
- [8] 崔艳芬, 茅德康. 一个解 KdV 方程的满足两个守恒律的差分格式[J]. 应用数学与计算数学学报, 2005, 19(2): 15 - 22.
- [9] AKYLAS T R, GRIMSHAW R. Solitary internal waves with oscillatory tails[J]. The Journal of Fluid Mechanics, 1992, 242: 279 - 298.
- [10] GRIMSHAW R, MITSUDERA H. Slowly varying solitary wave solution of the perturbed Korteweg-de Vries equation revised [J]. Studies in Applied Mathematics, 1993, 90: 75 - 86.

Priori estimates for the solutions of perturbed Korteweg-de Vries Equation

TONG YaNa JIANG XinHua

(School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Energy equalities are constructed for the perturbed solitary wave solutions corresponding to two kinds of perturbations for the perturbed KdV equation

$$u_t + 6uu_x + u_{xx} = R(u), \quad (\epsilon > 0),$$

under the condition that the initial data $u_0(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ decay exponentially as $|x| \rightarrow \infty$. Priori estimates of the bound of the solutions are obtained via the method of energy analysis: (1) if $R(u) = \epsilon(t)u$, $\epsilon(s) \in C[0, +\infty)$ and $\epsilon(0) = 0$, the solutions are uniformly bounded in the region $-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T$; (2) in the case of $R(u) = -\epsilon(t)u_{xxx}$, $\epsilon(0) = 0$, $\epsilon(s) \in C^1[0, +\infty)$, the solutions are uniformly bounded in the region $-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \epsilon_1$ for some positive small ϵ_1 .

Key words: KdV Equation; priori estimates; perturbed solitary waves