引用格式:南嘉欣,王利. 双 Lévy 跳扩散模型下的欧式期权定价[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2021,48(6):118-122.
NAN JiaXin, WANG Li. Pricing of European options in double Lévy jump-diffusion models[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2021,48(6):118-122.

双 Lévy 跳扩散模型下的欧式期权定价

南嘉欣 王 利*
(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘 要: 主要讨论在带 Lévy 跳的 Vasicek 随机利率模型下,当标的资产的价格也由带 Lévy 跳的模型给出时,用标的资产和零息债券两种计价单位对相应的欧式期权进行定价。计算中主要用到计价单位转换原理,即将风险中性测度下的计算转换到两种计价单位对应的概率测度下进行,得到了双 Lévy 跳扩散模型下的欧式期权定价公式。

关键词: Lévy 跳扩散模型; 零息债券; 计价单位; 测度变换; 期权定价
中图分类号: O211.6 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2021.06.015

引 言

金融衍生产品的定价问题是金融界的热门研究问题,而由利率市场变化引发的衍生产品定价问题成为目前金融理论研究和实践研究的一个热点。Deng 等[1]研究了 Vasicek 利率模型下的零息债券和无红利股票期权的定价问题;Carr 等[2]研究了 Lévy 跳扩散过程下的期权定价并给出定价公式;郭精军等[3]研究了 Vasicek 随机利率和标的资产服从次分数布朗运动环境下的欧式期权定价公式;钱晓松[4]选取不同计价单位以及相应的概率测度,简化了一些期权定价中复杂的理论,得到了连续随机利率模型下欧式期权的定价公式。由于 Lévy 过程具有左极右连及无限可分的特性,可以更好地刻画金融市场中随时都在发生的小幅跳跃行为及罕见的大幅波动行为,因此本文在文献[4]的基础上研究了当利率与标的资产均由带 Lévy 跳的随机模型给出时的欧式看涨期权的定价问题。

1 带 Lévy 跳的利率与标的资产模型

1.1 带 Lévy 跳的 Vasicek 利率模型

设有一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_{t\{0\leq t\leq T\}}, Q)$, $\mathscr{F}_t$ 是 t 时刻的满足通常条件的域流,即 $\mathscr{F}_t$ 是右连续且单调增的,Q 是风险中性概率测度。Vasicek[5]于 1977 年提出的利率结构模型为

$$\mathrm{d}r(t)=k(\varepsilon-r(t))\mathrm{d}t+v\mathrm{d}W(t), t\geqslant 0 \tag{1}$$

式中,$r(t)$ 为短期利率,$W(t)$ 为布朗运动,k、ε、v 均为大于 0 的常数,其中 k 为拉力,ε 为利率的长期平均水平。之后,Björk 等[6]将其推广至由泊松点过程和布朗运动两个不确定因素联合驱动的利率结构模型,即利率 $r(t)$ 满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}r(t)=k(a-r(t))\mathrm{d}t+\sigma_r\mathrm{d}W_1(t)+\int_{-1}^{+\infty}y(N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)-\lambda_1 q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t), t\geqslant 0 \tag{2}$$

$r(0)=r$,式(2)即为带 Lévy 跳的 Vasicek 利率模型。其中,k、a、σ_r 均为大于 0 的常数;$\{W_1(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为标准布朗运动;$N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=\sum_{t>0}\delta_{(t,U_j)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 为 $[0,T]\times(-1,+\infty)$ 上对等于一个复合泊松过程 $(N_1(t),(U_j)_{j\geqslant 1})$ 的时齐泊松随机测度,记为 $\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)-\lambda_1 q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$;$\lambda_1 q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$ 为 $N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 的补偿测度;常数 λ_1 为泊松过程 $N_1(t)$ 的强度;$(U_j)_{j\geqslant 1}$ 为平方可积的独立同分布随机变量序列;$q(\mathrm{d}y)$ 为相应的概率测度;$(U_j)_{j\geqslant 1}$ 表示跳跃的幅度且 $U_j>-1$。

1.2 标的资产

在风险中性测度 Q 下,考虑期权标的资产的价格 $S(t)$ 为[7]

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)[r(t)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_2(t)+c\mathrm{d}\widetilde{N}_2(t)], t\geqslant 0 \tag{3}$$

式中,σ 是大于 0 的常数,$\{W_2(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为标准布朗运

收稿日期: 2020-12-07
第一作者: 女,1994 年生,硕士生
*通信联系人
E-mail: wangli@mail.buct.edu.cn

动，$r(t)$为式(2)的解，$\{N_2(t)\}_{t\geqslant 0}$是强度为 λ_2 的泊松过程，c 为常数，$\widetilde{N}_2(t)=N_2(t)-\lambda_2 t$。由 Itô 公式[7]有

$$S(t)=S(0)(1+c)^{N_2(t)}\exp\left\{\int_0^t(r(s))\mathrm{d}s+\sigma W_2(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t-c\lambda_2 t\right\},t\geqslant 0 \tag{4}$$

即 $c>-1$ 时，$S(t)$是一个严格正的价格过程。令 $N_2(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$为由 $c\widetilde{N}_2(t)$对应的泊松随机测度，强度为 $\lambda_2\mathrm{d}t\boldsymbol{v}(\mathrm{d}x)$，很容易得到 $\boldsymbol{v}(\mathrm{d}x)$是集中在$\{c\}$上的点测度。

2　泊松随机测度

在给定的市场与概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_{t\{0\leqslant t\leqslant T\}},Q)$中，短期利率 $r(t)$. $\mathscr{F}_t$ 可测。设置局部无风险资金账户 $B(t)=\exp\left\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\}$，取定 Q 为一个风险中性鞅测度，即对市场上任意资产的价格过程 $\psi(t)$，其贴现过程 $\psi(t)/B(t)$为 Q 鞅。

引理 1[7]　设在测度 Q 下，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$为标准布朗运动，$N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$是定义在$[0,T]\times R$ 上的强度为 $\lambda\mathrm{d}t\boldsymbol{v}(\mathrm{d}x)$的泊松随机测度，$H(x)$满足 $\int_R|H(x)|\cdot\boldsymbol{v}(\mathrm{d}x)<\infty$，则存在与测度 Q 等价的鞅测度 $\widetilde{Q}$，若有

$$\xi_t=\exp\left\{\sigma W_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\left(\int_R \lg H(x)N((0,t],\mathrm{d}x)-t\int_R(H(x)-1)\boldsymbol{v}(\mathrm{d}x)\right)\right\} \tag{5}$$

使得$\left.\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{Q}}{\mathrm{d}Q}\right|\mathscr{F}_t=\xi_t$，且在 $\widetilde{Q}$ 测度下 $\widetilde{W}_t=W_t-\sigma t$ 为标准布朗运动，$\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)-\lambda\mathrm{d}tH(x)\boldsymbol{v}(\mathrm{d}x)$为泊松测度。

引理 2[7](Doleans-Dade 指数公式)　若$\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$是一个跳扩散过程，那么 X 的 Doleans-Dade 指数公式有如下形式

$$Z^X(t)=\exp\left\{X^c(t)-\frac{1}{2}[X^c,X^c](t)\right\}\prod_{0\leqslant s\leqslant t}(1+\Delta X(s)),t\geqslant 0 \tag{6}$$

这个过程是满足初始条件 $Z^X(0)=1$ 的随机微分方程 $\mathrm{d}Z^X(t)=Z^X(t-)\mathrm{d}X(t)$的解。

引理 3[1]　在上述概率空间中，若利率 $r(t)$满足式(2)，则到期日为 T 的零息债券在时刻 t 的价格 $b(t,T)=\exp\{A(t,T)+G(t,T)r(t)\}$，$b(T,T)=1$。其中 $G(t,T)=\dfrac{1}{k}[-1+\mathrm{e}^{-k(T-t)}]$，且 $A(t,T)$满足

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t}+\frac{\partial G(t,T)}{\partial t}r+\frac{1}{2}\sigma_r^2G^2(t,T)+kaG(t,T)-krG(t,T)-r+\lambda_1[\mathrm{e}^{G(t,T)y}-1-yG(t,T)]=0 \tag{7}$$

$\{W_1(t)\}_{t\geqslant 0}$，$\{W_2(t)\}_{t\geqslant 0}$，$\{N_1(t)\}_{t\geqslant 0}$，$\{N_2(t)\}_{t\geqslant 0}$，$(U_j)_{j\geqslant 1}$是相互独立的，利率由式(2)给出，以标的资产 $S(t)$与零息债券 $b(t,T)$两种计价单位来对欧式看涨期权进行定价。

3　定理及证明

定理　在市场利率和标的资产的价格分别由式(2)、(3)给出的双 Lévy 跳的市场环境中，到期时间为 T，执行价格为 K，欧式看涨期权在零时刻的价格

$$C(0,S(0))=E^Q[B^{-1}(T)(S(T)-K)^+]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)T}(\lambda_1 T)^m(\lambda_2 T)^n}{m!\ n!}[S(0)E[\Phi(d_1^{m,n})]-\mathrm{e}^{-\lambda_1 UT}Kb(0,T)E[\Phi(d_2^{m,n})\ \mathrm{e}^{G(t,T)\sum_{j=1}^{m}U_j}]] \tag{8}$$

式中，$E[\cdot]$为对独立同分布随机变量序列$(U_j)_{j\geqslant 1}$的函数期望，$\Phi(y)=(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ 为标准正态分布的累计分布函数，有

$$E(\widetilde{U}_1)=\int_{-1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{G(t,T)y}-1)q(\mathrm{d}y)$$

$$\Delta(t)=\sqrt{\sigma^2+G^2(t,T)\sigma_r^2}$$

$$\widetilde{W}(t)=\int_0^t\frac{-\sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_2(s)+G(s,T)\sigma_r\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s)}{\Delta(s)}\mathrm{d}s$$

$$d_1^{m,n}=\left[\ln\frac{S(0)}{Kb(0,T)}+\frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t-\lambda_1 T\cdot E(\widetilde{U}_1)-\lambda_2(1+c)T-\ln\left[\prod_{j=0}^{m}\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}\cdot\left(\frac{1}{1+c}\right)^n\right]\right]\Big/\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$d_2^{m,n}=\left[\ln\frac{S(0)}{Kb(0,T)}-\frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t-\lambda_1 T\cdot E(\widetilde{U}_1)+\ln\left[\prod_{j=0}^{m}\frac{1}{\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}}(1+c)^n\right]\right]\Big/\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

证明　到期时间为 T 且执行价格为 K 的欧式看涨期权的风险中性价格 $C(0,S(0))$满足

$$C(0,S(0))=E^Q[B^{-1}(T)(S(T)-K)^+]=E^Q[B^{-1}(T)S(T)I_{\{S(T)\geqslant K\}}]-KE^Q[B^{-1}(T)I_{\{S(T)\geqslant K\}}] \tag{11}$$

在此处,E^Q 表示在风险中性测度 Q 下的期望。对于 $E^Q[B^{-1}(T)S(T)I_{\{S(T)\geqslant K\}}]$,以 $S(t)$ 作为计价单位,将其测度变换到测度 Q^S;对于 $E^Q[B^{-1}(T)I_{\{S(T)\geqslant K\}}]$,以 $b(t,T)$ 作为计价单位,将其测度变换到测度 Q^b,$R-N$ 导数分别为 $\frac{\mathrm{d}Q^S}{\mathrm{d}Q}\bigg|\mathscr{F}_t=\frac{S(t)}{S(0)B(t)}$,$\frac{\mathrm{d}Q^b}{\mathrm{d}Q}\bigg|\mathscr{F}_t=\frac{b(t,T)}{b(0,T)B(t)}$。经过上述变换式(11)变为

$$C(0,S(0))=S(0)Q^S(S(T)\geqslant K)-Kb(0,T)Q^b(S(T)\geqslant K)=S(0)Q^S\left(\frac{b(T,T)}{S(T)}\leqslant\frac{1}{K}\right)-Kb(0,T)Q^b\left(\frac{S(T)}{b(T,T)}\geqslant K\right)\tag{12}$$

定义 $Y(t)=b(t,T)/S(t)$ 和 $Z(t)=S(t)/b(t,T)$,先分别求出 $Y(t)$、$Z(t)$ 在测度 Q^S 和 Q^b 下的表达式,再分别计算 $Q^S(S(T)\geqslant K)$ 与 $Q^b(S(T)\geqslant K)$。

引理 4 由 Girsanov's 定理,经由测度变换

$$\frac{\mathrm{d}Q^S}{\mathrm{d}Q}\bigg|\mathscr{F}_t=\frac{S(t)}{S(0)B(t)}=(1+c)^{N_2(t)}\exp\left\{\sigma W_2(t)-\frac{1}{2}\sigma^2t-c\lambda_2t\right\}\tag{13}$$

在测度 Q^S 下,$\widetilde{W}_2(t)=W_2(t)-\sigma t$ 为标准布朗运动,$\widetilde{N}_2(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=N_2(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)-\lambda_2(1+c)\upsilon(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$ 为泊松鞅。

$$\frac{\mathrm{d}Q^b}{\mathrm{d}Q}\bigg|\mathscr{F}_t=\frac{b(t,T)}{b(0,T)B(t)}=\int_0^t\int_{-1}^{\infty}\mathrm{e}^{G(s,T)y}N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\exp\left\{\int_0^tG(s,T)\sigma_r\mathrm{d}W_1(s)-\frac{1}{2}\int_0^tG^2(s,T)\sigma_r^2\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{-1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{G(s,T)y}-1)\lambda_1q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\right\}\tag{14}$$

在测度 Q^b 下,$\widetilde{W}_1(t)=W_1(t)-\sigma_r\int_0^tG(s,T)\mathrm{d}s$ 为标准布朗运动,$\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)-\mathrm{e}^{G(t,T)y}\cdot\lambda_1q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$ 为泊松鞅测度。$\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 的局部特征为 $\lambda^b=\lambda_1(1+E(\widetilde{U}_1))$,$q^b(\mathrm{d}y)=\frac{\mathrm{e}^{G(t,T)y}q(\mathrm{d}y)}{1+E(\widetilde{U}_1)}$。

引理 5 在测度 Q^S 下,$Y(T)$ 具有如下表达式

$$Y(T)=\frac{b(0,T)}{S(0)}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{N_2(T)}\prod_{j=0}^{N_1(T)}\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}\cdot\exp\left\{\lambda_1TE(\widetilde{U}_1)-\frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t+\lambda_2(1+c)T+\int_0^t\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)\right\}\tag{15}$$

证明 由 Itô 公式,对于 $b(t,T)$ 和 $1/S(t)$ 分别有

$$\frac{\mathrm{d}b(t,T)}{b(t,T)}=r(t)\mathrm{d}t+G(t,T)\sigma_r\mathrm{d}W_1(t)+\int_{-1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{G(t,T)y}-1)\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)\tag{16}$$

又在测度 Q^S 下有

$$\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)-\lambda_1q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}(1/S(t))}{1/S(t)}=-r(t)\mathrm{d}t-\sigma\mathrm{d}W_2(t)+\sigma^2\mathrm{d}t+c\lambda_2\mathrm{d}t+\left(\frac{-c}{1+c}\right)\mathrm{d}N_2(t)\tag{17}$$

且 $Y(t)=b(t,T)/S(t)$,再由 Itô 公式可得

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)}=G(t,T)\sigma_r\mathrm{d}W_1(t)+\sigma^2\mathrm{d}t-\sigma\mathrm{d}W_2(t)+c\lambda_2\mathrm{d}t+\left(\frac{-c}{1+c}\right)\mathrm{d}N_2(t)+\int_{-1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{G(t,T)y}-1)\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)\tag{18}$$

下面给出在测度 Q^S 下 $Y(T)$ 的表达式。记 $\widetilde{W}_1(t)=W_1(t)$。由引理 4,$\widetilde{W}_2(t)=W_2(t)-\sigma t$ 为标准布朗运动,$\widetilde{N}_2(t)=N_2(t)-\lambda_2(1+c)t$,则有

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)}=G(t,T)\sigma_r\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t)-\sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_2(t)+\int_{-1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{G(t,T)y}-1)\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)+\left(\frac{-c}{1+c}\right)\mathrm{d}\widetilde{N}_2(t)\tag{19}$$

令 $\Delta(t)=\sqrt{\sigma^2+G^2(t,T)\sigma_r^2}$,$\widetilde{W}(t)=\int_0^t\frac{-\sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_2(s)+G(s,T)\sigma_r\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s)}{\Delta(s)}\mathrm{d}s$,即

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)}=\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)+\int_{-1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{G(t,T)y}-1)\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)+\left(\frac{-c}{1+c}\right)\mathrm{d}\widetilde{N}_2(t)\tag{20}$$

再由引理 2 可得到 $Y(T)$ 即为式(15)。

引理 6 在测度 Q^b 下,$Z(T)$ 表达式为

$$Z(T)=\frac{S(0)}{b(0,T)}(1+c)^{N_2(T)}\prod_{j=1}^{N_1(T)}\frac{1}{\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}}\cdot\exp\left\{-\lambda_1TE(\widetilde{U}_1)-\frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t-\int_0^T\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)\right\}\tag{21}$$

证明 类似地,对 $Z(t)=S(t)/b(t,T)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{Z(t)}=\sigma\mathrm{d}W_2(t)-G(t,T)\sigma_r\mathrm{d}W_1(t)+\int_{-1}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{G(t,T)y}}{\mathrm{e}^{G(t,T)y}}(N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)-\mathrm{e}^{G(t,T)y}\lambda_1q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t)+G^2(t,T)\sigma_r^2\mathrm{d}t+c\mathrm{d}N_2(t)\tag{22}$$

以下给出在测度 Q^b 下 $Z(T)$ 的表达式。记

$\widetilde{W}_2(t)=W_2(t)$，$\widetilde{W}_1(t)=W_1(t)-\sigma_r\int_0^t G(s,T)\mathrm{d}s$ 为标准布朗运动，$\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=N_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)-\mathrm{e}^{G(t,T)y}\lambda_1\cdot q(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$ 为鞅测度，则有

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{Z(t)}=\sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_2(t)-G(t,T)\sigma_r\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t)+c\mathrm{d}N_2(t)+\int_{-1}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{G(t,T)y}}{\mathrm{e}^{G(t,T)y}}\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)\tag{23}$$

令 $\Delta(t)=\sqrt{\sigma^2+G^2(t,T)\sigma_r^2}$，$\widetilde{W}(t)=\int_0^t\frac{-\sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_2(s)+G(s,T)\sigma_r\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s)}{\Delta(s)}\mathrm{d}s$，即

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{Z(t)}=-\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)+c\mathrm{d}N_2(t)+\int_{-1}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{G(t,T)y}}{\mathrm{e}^{G(t,T)y}}\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)\tag{24}$$

再由引理 2 可得 $Z(T)$ 即为式(21)。

在得到 $Y(T)$ 和 $Z(T)$ 的表达式后，对式(12)中 $Q^S(S(T)\geqslant K)$ 进行如下计算。

$$Q^S(S(T)\geqslant K)=Q^S\left(\frac{b(T,T)}{S(T)}\leqslant\frac{1}{K}\right)=Q^S(K\cdot Y(T)\leqslant 1)=Q^S(\ln KY(T)\leqslant 0)=Q^S(\ln K+\ln Y(T)\leqslant 0)\tag{25}$$

将 $Y(T)$ 的表达式（式(15)）代入式(25)，整理得到

$$Q^S(S(T)\geqslant K)=Q^S\Bigg(\int_0^T\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)\leqslant\ln\frac{S(0)}{Kb(0,T)}+\frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t-\lambda_1TE(\widetilde{U}_1)-\lambda_2(1+c)T-\ln\left[\prod_{j=0}^{N_1(T)}\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{N_2(T)}\right]\tag{26}$$

注意到在测度 Q 下随机积分 $\int_0^T\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)$ 服从均值为 0、方差为 $\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t$ 的高斯分布。

由于 $(U_j)_{j\geqslant 1}$，$\{N_1(t)\}_{t\geqslant 0}$，$\{N_2(t)\}_{t\geqslant 0}$ 相互独立，在测度 Q^S 下，$\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 的强度不变，利用全概率公式得

$$Q^S(S(T)\geqslant K)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1T}(\lambda_1T)^m}{m!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2T}(\lambda_2T)^n}{n!}E^{Q^S}[\Phi(d_1^{m,n})]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)T}(\lambda_1T)^m(\lambda_2T)^n}{m!\ n!}E[\Phi(d_1^{m,n})]\tag{27}$$

其中 $d_1^{m,n}$ 即为式(9)。

同理，对于式(12)中 $Q^b(S(T)\geqslant K)$ 有

$$Q^b(S(T)\geqslant K)=Q^b\left(\frac{S(T)}{b(T,T)}\geqslant K\right)=Q^b(\ln(Z(T)/K)\geqslant 0)=Q^b(\ln Z(T)-\ln K\geqslant 0)\tag{28}$$

将 $Z(T)$ 的表达式（式(21)）代入式(28)，整理得到

$$Q^b(S(T)\geqslant K)=Q^b\left(\int_0^T\Delta(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)\leqslant\ln\frac{S(0)}{Kb(0,T)}-\frac{1}{2}\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t-\lambda_1TE(\widetilde{U}_1)+\ln\left(\prod_{j=1}^{N_1(T)}\frac{1}{\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}}(1+c)^{N_2(T)}\right)\right)\tag{29}$$

又因为在测度 Q^b 下，$\widetilde{N}_1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 的局部特征变为 $\lambda^b=\lambda_1(1+E(\widetilde{U}_1))$，$q^b(\mathrm{d}y)=\frac{\mathrm{e}^{G(t,T)y}q(\mathrm{d}y)}{1+E(\widetilde{U}_1)}$，则有

$$Q^b(S(T)\geqslant K)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda^bT}(\lambda^bT)^m}{m!}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2T}(\lambda_2T)^n}{n!}E^{Q^b}[\Phi(d_2^{m,n})]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1(1+U)T}(\lambda_1(1+E(\widetilde{U}_1))T)^m}{m!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2T}(\lambda_2T)^n}{n!}E\left[\Phi(d_2^{m,n})\frac{\prod_{j=1}^{m}\mathrm{e}^{G(t,T)U_j}}{(1+E(\widetilde{U}_1))^m}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)T}(\lambda_1T)^m(\lambda_2T)^n}{m!\ n!}\mathrm{e}^{-\lambda_1TE(\widetilde{U}_1)}E[\Phi(d_2^{m,n})\mathrm{e}^{G(t,T)\sum_{j=1}^{m}U_j}]\tag{30}$$

其中 $d_2^{m,n}$ 即为式(10)。

综合式(11)、(27)、(30)，即可整理得到欧式看涨期权的价格公式(8)。

4　结束语

本文研究利率和资产均服从 Lévy 跳扩散模型下的欧式看涨期权的定价问题。在计算过程中利用带跳的测度变换公式完成测度变换，利用 Lévy-Itô 型积分公式与 Doleans-Dade 指数公式完成计价单位转换的计算。该模型可以更好地捕捉市场中的利率波动以及适应利率市场环境，并且使用计价单位转化原理使得定价问题变得简便。

参考文献：

[1] DENG G H, XI H. Pricing reset option in a fractional Brownian motion market[C]// Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, 2011: 5727 –

5731.

[2] CARR P, WU L R. The finite moment log stable process and option pricing[J]. The Journal of Finance, 2003, 58(2): 753 –777.

[3] 郭精军, 张亚芳. 次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价[J]. 应用数学, 2017, 30(3): 503 – 511.
GUO J J, ZHANG Y F. European option pricing under subfractional Vasicek stochastic interest rate model[J]. Mathematica Applicata, 2017, 30(3): 503 – 511. (in Chinese)

[4] 钱晓松. 跳扩散模型中的测度变换与期权定价[J]. 应用概率统计, 2004, 20(1): 91 –99.
QIAN X S. Changes of probability measure and options pricing in jump-diffusion models[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2004, 20(1): 91 – 99. (in Chinese)

[5] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177 –188.

[6] BJÖRK T, KABANOV Y, RUNGGALDIER W. Bond market structure in the presence of marked point processes[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(2): 211 – 223.

[7] NIU L Q. Some stability results of optimal investment in a simple Lévy market[J]. Mathematics and Economics, 2008, 42: 445 –452.

Pricing of European options in double Lévy jump-diffusion models

NAN JiaXin　WANG Li *

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: We obtain the princing formula for European options when the interest rate is given by Vasicek model with Lévy jumps. The underlying asset is also described by a model with Lévy jumps(that is why we call double Lévy). The main method we used was to change the pricing numeraires, which can be achieved by changing the measures by Girsanov transformations.

Key words: Lévy jump diffusion model; zero-coupon bonds; numeraire; change of measure; option pricing

(责任编辑:吴万玲)