**引用格式:**肖蕊梅,江新华,李明远. 一类带小扰动的 Raman 散射的数学模型研究[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2021,48(5):124-128.

XIAO RuiMei, JIANG XinHua, LI MingYuan. A mathematical model of Raman scattering with small perturbations[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2021,48(5):124-128.

# 一类带小扰动的 Raman 散射的数学模型研究

肖蕊梅 江新华* 李明远

(北京化工大学 数理学院,北京 100029)

**摘 要:**研究一类带小扰动的 Raman 散射的数学模型的相关问题,使用积分方程和 Banach 不动点定理证明初值问题的解的存在唯一,并利用多重尺度法求解渐近解,再借助积分方程和 Gronwall 不等式得到渐近解的余项估计,从而证明了渐近解的一致有效性。

**关键词:**Raman 散射; 摄动方法; 渐近解; 余项估计

**中图分类号:**O175.14 **DOI:**10.13543/j.bhxbzr.2021.05.016

## 引 言

Raman 散射是基于光与物质作用后产生的对称分布在 Rayleigh 散射光两侧的非弹性光散射效应,可通过散射光与入射光相比频率的位移分析被散射分子的组成和结构。Raman 光谱技术广泛应用于食品质量[1]、生物医药[2]、刑事侦查[3]和环境保护[4]等领域,因此对 Raman 散射的研究有着重要的实际意义。

Lie 等[5]提出受激 Raman 散射中的分子振动模型可以用阻尼和外部正弦场驱动的 Morse 振子的经典方程来描述

$$y''(t)+\alpha y'(t)+(1-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{-y}=A\cos\omega t$$

式中,$t$ 为时间变量,$y$ 代表振子的振幅,也是时间 $t$ 的函数,$\alpha$ 为阻尼系数,$A$ 为调制强度,$\omega$ 为驱动频率。他们利用四阶 Runge-Kutta 法得到数值解,当阻尼系数 $\alpha$ 在 0.001~0.4 之间(此时阻尼极限较弱)且驱动频率 $\omega$ 较大时,以 $\omega$ 为横坐标,振子的最大振幅 $y_{\max}$ 为纵坐标建立坐标系作图,发现图像中间部分会出现稳定的上下两个分支,即双稳态现象,解到底收敛于哪个分支取决于初始条件和驱动场的相位。如果驱动频率从小到大开始变化,随着驱动频率的增加,$y_{\max}$ 的增长非常缓慢且一直收敛于下分支,直到某一个临界点,$y_{\max}$ 会突然增大并跳到上分支,接下来又会迅速减小;如果驱动频率从大到小变化,$y_{\max}$ 将从上分支开始迅速增大,直到某一个临界值,突然下降到下分支,体现了解的滞后现象。由于 Stokes 波强度的急剧增长与分子振幅的突然增加有关,一般的谐振子模型无法解释 Stokes 波强度的急剧增长现象,而 Morse 振子模型却可以很好地解释分子振幅的突然增加,因此该模型可以用来描述受激Raman散射中的分子振动,进而解释 Stokes 波强度的急剧增长现象。

本文旨在研究受激 Raman 散射分子振动数学模型在小阻尼且弱驱动下的初值问题

$$\begin{cases} y''+\varepsilon\alpha y'+(1-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{-y}=\varepsilon^2\cos(t+\varepsilon\omega t) \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varepsilon$ 是扰动系数,通常 $0<\varepsilon\ll 1$,$\alpha$、$\omega$ 为正常数。首先我们利用不动点定理证明初值问题(1)的解是存在唯一的,进而利用摄动方法求出渐近解的首项并给出余项估计,从而证明渐近解的一致有效性。

## 1 解的存在唯一性

为证明解的存在唯一性,作变量代换,令

$$y(t)=\varepsilon v(t)$$

代入式(1)得

收稿日期:2020-05-14

第一作者:女,1994 年生,硕士生

*通信联系人

E-mail:jiangxh@mail.buct.edu.cn

$$\begin{cases} v''+\varepsilon\alpha v'+v=-\dfrac{1}{\varepsilon}[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]+\\ \qquad \varepsilon\cos(t+\varepsilon\omega t)\\ v(0)=0, v'(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

记

$$\|v\|_{C[0,\frac{T}{\varepsilon}]}=\max_{[0,\frac{T}{\varepsilon}]}|v(t)|$$

**定理 1**　在 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\ll 1, 0<\varepsilon t\leqslant T$ 时，初值问题(2)存在唯一的解，且 $\|v\|_{C[0,\frac{T}{\varepsilon}]}\leqslant M$。其中 $\varepsilon_0$ 为足够小的正常数，并有

$$T=\frac{1}{32M_0(\varepsilon_0)}, M=2M_0(\varepsilon_0)$$

$$M_0(\varepsilon_0)=K_0[(\alpha+2\omega)(2+\varepsilon_0\omega)+\alpha\cdot(1+\varepsilon_0\omega)^2]$$

$$K_0=\frac{1}{\alpha^2+4\omega^2}$$

故 $T$、$M$、$M_0(\varepsilon_0)$、$K_0$ 也为正常数。

接下来将证明定理 1，将式(2)写成积分方程的形式

$$v=F(v)=F_1(v)+F_2(t) \tag{3}$$

其中，

$$F_1(v)=\int_0^t-\frac{1}{\varepsilon}\phi(t,\tau)[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]d\tau \tag{4}$$

$$F_2(t)=\int_0^t\phi(t,\tau)\varepsilon\cos(\tau+\varepsilon\omega\tau)d\tau \tag{5}$$

记

$$\phi(t,\tau)=\frac{1}{K_\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon\alpha(t-\tau)}{2}}\sin[K_\varepsilon(t-\tau)]$$

$$K_\varepsilon=\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{4}}$$

取 $\varepsilon_1=\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时，有

$$\frac{1}{2}\leqslant K_\varepsilon\leqslant 1$$

$$|\phi(t,\tau)|=\left|\frac{1}{K_\varepsilon}e^{-\frac{\alpha\varepsilon(t-\tau)}{2}}\sin[K_\varepsilon(t-\tau)]\right|\leqslant 2 \tag{6}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon v\to 0}\left|\frac{1}{(\varepsilon v)^2}[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]\right|=\frac{3}{2}$$

故 $\exists\,\varepsilon_2>0$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_2\ll 1$ 时

$$\left|\frac{1}{(\varepsilon v)^2}[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]\right|\leqslant 2$$

即

$$\left|\frac{1}{\varepsilon v}[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]\right|\leqslant\left|\frac{1}{(\varepsilon v)^2}[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]\right||\varepsilon v|\leqslant 2|\varepsilon v| \tag{7}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\xi\to 0}|(2e^{-2\varepsilon\xi}-e^{-\varepsilon\xi}-1)/(\varepsilon\xi)|=3$$

故 $\exists\,\varepsilon_3>0$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_3\ll 1$ 时

$$|(2e^{-2\varepsilon\xi}-e^{-\varepsilon\xi}-1)/(\varepsilon\xi)|\leqslant 6$$

即

$$|2e^{-2\varepsilon\xi}-e^{-\varepsilon\xi}-1|\leqslant|(2e^{-2\varepsilon\xi}-e^{-\varepsilon\xi}-1)/(\varepsilon\xi)|\cdot|\varepsilon\xi|\leqslant 6\varepsilon|\xi| \tag{8}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon v\to 0}\left|-\frac{1}{(\varepsilon v)^3}\left[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v+\frac{3}{2}\varepsilon^2v^2\right]\right|=\frac{7}{6}$$

故 $\exists\,\varepsilon_4>0$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_4\ll 1$ 时

$$\left|-\frac{1}{\varepsilon}\left[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v+\frac{3}{2}\varepsilon^2v^2\right]\right|\leqslant 2\varepsilon^2\cdot|v^3| \tag{9}$$

下面证明 $F(v)=F_1(v)+F_2(t)$ 是定义在连续函数空间上的压缩映像，从而用不动点定理证明定理 1。

取 $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$，由于

$$|F(v)|\leqslant\int_0^t|\phi(t,\tau)|\left|\frac{1}{\varepsilon v}[(1-e^{-\varepsilon v})e^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]\right||v|d\tau \tag{10}$$

由式(6)、(7)可知，当 $|v|\leqslant M, 0<\varepsilon t\leqslant T$ 时

$$|F_1(v)|\leqslant 2\times 2|\varepsilon v|\times|v|\times t\leqslant 4M^2T \tag{11}$$

通过计算 $F_2(t)$ 可知，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\ll 1$ 时

$$F_2(t)=\frac{1}{\alpha^2(1+\varepsilon\omega)^2+\omega^2(2+\varepsilon\omega)^2}\Big\{\alpha(1+\varepsilon\omega)\sin(t+\varepsilon\omega t)-\omega(2+\varepsilon\omega)\cos(t+\varepsilon\omega t)-e^{-\frac{\alpha\varepsilon t}{2}}\frac{\alpha}{2K_\varepsilon}\cdot[1+(1+\varepsilon\omega)^2]\sin(K_\varepsilon t)+e^{-\frac{\alpha\varepsilon t}{2}}\omega(2+\varepsilon\omega)\cdot\cos(K_\varepsilon t)\Big\}\leqslant K_0[(\alpha+2\omega)(2+\varepsilon\omega)+\alpha(1+\varepsilon\omega)^2]\leqslant K_0[(\alpha+2\omega)(2+\varepsilon_0\omega)+\alpha(1+\varepsilon_0\omega)^2]$$

即

$$F_2(t)\leqslant M_0(\varepsilon_0) \tag{12}$$

将式(11)、(12)代入式(3)得

$$|F(v)|\leqslant|F_1(v)|+|F_2(t)|\leqslant M_0(\varepsilon_0)+4M^2T$$

令

$$M_0(\varepsilon_0)+4M^2T\leqslant M \tag{13}$$

当式(13)成立时,满足 $\|v\|_{C\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]}\leqslant M$, $\|F(v)\|_{C\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]}\leqslant M$,则 $F:v\rightarrow F(v)$ 是在连续空间 $C\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ 上的映射。

接下来证明 $F:v\rightarrow F(v)$ 为压缩映射,由式(3)可得

$$|F(v_1)-F(v_2)|=\left|\int_0^t\phi(t,\tau)[g(v_2)-g(v_1)]\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\int_0^t 2|g(v_2)-g(v_1)|\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

其中,

$$g(v)=\frac{1}{\varepsilon}[(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon v})\mathrm{e}^{-\varepsilon v}-\varepsilon v]$$

由于 $v_1\in v, v_2\in v$,故 $|v_1|\leqslant M$, $|v_2|\leqslant M$,则有

$$g'(v)=2\mathrm{e}^{-2\varepsilon v}-\mathrm{e}^{-\varepsilon v}-1$$

根据不等式(8)和拉格朗日中值定理 $\exists\xi\in(v_1,v_2)$, $|\xi|\leqslant M$,有

$$|g(v_2)-g(v_1)|=|g'(\xi)(v_2-v_1)|\leqslant|2\mathrm{e}^{-2\varepsilon\xi}-\mathrm{e}^{-\varepsilon\xi}-1||v_2-v_1|\leqslant 6\varepsilon M|v_2-v_1| \tag{15}$$

将式(15)和 $0<\varepsilon t\leqslant T$ 代入式(14)得

$$|F(v_1)-F(v_2)|\leqslant 12\varepsilon M|v_1-v_2|t\leqslant 12MT|v_1-v_2|$$

令

$$12MT<1 \tag{16}$$

取 $T=\frac{1}{32M_0(\varepsilon_0)}$, $M=2M_0(\varepsilon_0)$ 即可同时满足式(13)和式(16),此时 $F:v\rightarrow F(v)$ 为连续空间 $C\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ 上的压缩映射,根据 Banach 不动点定理, $v=F(v)$ 存在唯一的解 $v(t)$,即初值问题(2)存在唯一的解,故定理 1 得证。

## 2 多重尺度法求近似解

根据文献[6]中对多重尺度法的介绍,可取两时间尺度分别为 $t_1=t, t_2=\varepsilon t$,代入式(1)得

$$\begin{cases}(\partial_{t1}^2+2\varepsilon\,\partial_{t_1}\partial_{t_2}+\varepsilon^2\,\partial_{t2}^2)y+\varepsilon\alpha(\partial_{t_1}+\varepsilon\,\partial_{t_2})y+\\ \qquad(1-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{-y}=\varepsilon^2\cos(t_1+\omega t_2)\\ y(0,0)=0,(\partial t_1+\varepsilon\,\partial t_2)y|_{(0,0)}=0\end{cases} \tag{17}$$

令

$$y=\varepsilon y_0+\varepsilon^2 y_1+\varepsilon^3 y_2+\cdots \tag{18}$$

故

$$(1-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{-y}=\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3-\cdots\right)\left(1-y+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3+\cdots\right)=\varepsilon y_0+\varepsilon^2\left(y_1-\frac{3}{2}y_0^2\right)+\cdots \tag{19}$$

将式(18)、(19)代入到式(17),并令 $\varepsilon$ 的一次幂系数相等得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2}+y_0=0\\ y_0(0,0)=0,\left.\dfrac{\partial y_0}{\partial t_1}\right|_{(0,0)}=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}y_0=A(t_2)\cos t_1+B(t_2)\sin t_1\\ A(0)=0,B(0)=0\end{cases} \tag{20}$$

令 $\varepsilon$ 的二次幂系数相等得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1=\dfrac{3}{2}y_0^2-2\dfrac{\partial^2 y_0}{\partial t_1\partial t_2}-\alpha\dfrac{\partial y_0}{\partial t_1}+\cos(t_1+\omega t_2)\\ y_1(0,0)=0,\left.\dfrac{\partial y_1}{\partial t_1}\right|_{(0,0)}=-\left.\dfrac{\partial y_0}{\partial t_2}\right|_{(0,0)}\end{cases}$$

解得

$$y_1=-\frac{1}{2}t_1\cos t_1[2A'(t_2)+\alpha A(t_2)-\sin(\omega t_2)]-\frac{1}{2}t_1\sin t_1[2B'(t_2)+\alpha B(t_2)-\cos(\omega t_2)]+F_1(t_2)\cos t_1+F_2(t_2)\sin t_1+\frac{1}{2}\cos t_1\cos(\omega t_2)+\frac{1}{4}[-A^2(t_2)+B^2(t_2)]\cdot\cos(2t_1)-\frac{1}{2}A(t_2)B(t_2)\sin(2t_1)-B'(t_2)\cos t_1-\frac{1}{2}\alpha B(t_2)\cos t_1+\frac{3}{4}[A^2(t_2)+B^2(t_2)]$$

为消除长期项,需满足

$$\begin{cases}2A'(t_2)+\alpha A(t_2)-\sin(\omega t_2)=0\\ 2B'(t_2)+\alpha B(t_2)-\cos(\omega t_2)=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A(t_2)=K_0[2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t_2}{2}}\omega-2\omega\cos(\omega t_2)+\\ \qquad\alpha\sin(\omega t_2)]\\ B(t_2)=K_0[-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t_2}{2}}\alpha+\alpha\cos(\omega t_2)+\\ \qquad 2\omega\sin(\omega t_2)]\end{cases} \tag{21}$$

将式(21)以及 $t_1=t, t_2=\varepsilon t$ 代入到式(20)得

$$y_0(t)=\sqrt{K_0}[\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\varepsilon t}{2}}\cos(t+\varphi)-\cos(t+\varepsilon\omega t+\varphi)] \tag{22}$$

记 $\cos\varphi=\frac{2\omega}{\sqrt{\alpha^2+4\omega^2}}$, $\sin\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4\omega^2}}$,因此

初值问题(1)渐近解的首项为

$$\varepsilon y_0(t)=\varepsilon\sqrt{K_0}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\varepsilon t}{2}}\cos(t+\varphi)-\cos(t+\varepsilon\omega t+\varphi)\right]$$

## 3　余项估计

**定理 2**　在 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\ll 1, 0<\varepsilon t\leqslant T$ 时，有 $|y(t)-\varepsilon y_0(t)|=\varepsilon|v(t)-y_0(t)|\leqslant\varepsilon^2 M_3(\varepsilon_0,T)$，其中 $M_3(\varepsilon_0,T)$ 是与 $\varepsilon_0$ 和 $T$ 有关的正常数。

令 $v(t)=y_0(t)+R(t)$，代入式(2)得

$$\begin{cases}R''+\varepsilon\alpha R'+R=g_1(t)+\dfrac{3}{2}\varepsilon R^2+3\varepsilon y_0 R+g_2(t)\\ R(0)=0, R'(0)=0\end{cases}\tag{23}$$

其中

$$g_1(t)=-\frac{1}{\varepsilon}\left[(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon v})\mathrm{e}^{-\varepsilon v}-\varepsilon v+\frac{3}{2}\varepsilon^2 v^2\right]$$

$$g_2(t)=\frac{3}{2}\varepsilon y_0^2-y_0''-\varepsilon\alpha y_0'-y_0+\varepsilon\cos(t+\varepsilon\omega t)$$

将初值问题(23)写成积分方程的形式

$$R=\int_0^t\phi(t,\tau)\left[g_1(\tau)+\frac{3}{2}\varepsilon R^2+3\varepsilon y_0 R+g_2(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

由式(6)知 $|\phi(t,\tau)|\leqslant 2$，则

$$|R|\leqslant s_1(t)+s_2(t)+s_3(t)\tag{24}$$

其中，$s_1(t)=2\int_0^t|g_1(\tau)|\mathrm{d}\tau$，$s_2(t)=\int_0^t|3\varepsilon R^2+6\varepsilon y_0 R|\mathrm{d}\tau$，$s_3(t)=\left|\int_0^t\phi(t,\tau)g_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right|$。

根据不等式(9)

$$s_1(t)\leqslant 2\int_0^t 2\varepsilon^2|v^3|\mathrm{d}\tau\leqslant 4\varepsilon^2 M^3 t\leqslant 4\varepsilon M^3 T\tag{25}$$

由式(22)可知，$|y_0(t)|\leqslant 2\sqrt{K_0}$，则

$$s_2(t)\leqslant\varepsilon A\int_0^t(|R^2|+|R|)\mathrm{d}\tau\tag{26}$$

记 $A=\max\{12\sqrt{K_0},3\}$，故 $A$ 为正常数。

利用 Maple 软件计算 $s_3(t)$ 可知

$$s_3(t)=\left|\int_0^t\phi(t,\tau)g_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right|=|f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+f_4(t)+f_5(t)+f_6(t)|$$

其中

$$f_1(t)=\int_0^t\varepsilon^2K_0\phi(t,\tau)\left(\frac{1}{2}\alpha^2\omega\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\alpha\tau}{2}}\cos\tau-\frac{1}{4}\alpha^3\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\alpha\tau}{2}}\sin\tau\right)\mathrm{d}\tau$$

$$f_2(t)=\int_0^t\varepsilon^2K_0\phi(t,\tau)\left[-(\alpha^2+2\omega^2)\omega\cos(\tau+\varepsilon\omega\tau)-\alpha\omega^2\sin(\tau+\varepsilon\omega\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$f_3(t)=\int_0^t\varepsilon K_0^2\phi(t,\tau)\left[-3\alpha\omega\mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha\tau}\sin(2\tau)+\frac{3}{4}(4\omega^2-\alpha^2)\mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha\tau}\cos(2\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$f_4(t)=\int_0^t\varepsilon K_0^2\phi(t,\tau)\left[6\alpha\omega\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\alpha\tau}{2}}\sin(2\tau+\varepsilon\omega\tau)+\frac{3}{2}(\alpha^2-4\omega^2)\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\alpha\tau}{2}}\cos(2\tau+\varepsilon\omega\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$f_5(t)=\int_0^t\varepsilon K_0^2\phi(t,\tau)\left[-3\alpha\omega\sin(2\tau+2\varepsilon\omega\tau)+\frac{3}{4}(4\omega^2-\alpha^2)\cos(2\tau+2\varepsilon\omega\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$f_6(t)=\int_0^t\varepsilon K_0\phi(t,\tau)\left[-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\alpha\tau}{2}}\cos(\varepsilon\omega\tau)+\frac{3}{4}(1+\mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha\tau})\right]\mathrm{d}\tau$$

通过 Maple 软件计算可知，存在常数 $\varepsilon$ 和 $T$，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\ll 1, 0<\varepsilon t\leqslant T$ 时，有

$$s_3(t)\leqslant\varepsilon M_1(\varepsilon_0,T)\tag{27}$$

其中 $M_1(\varepsilon_0,T)$ 是与 $\varepsilon_0$ 和 $T$ 有关的正常数。

将式(25)～(27)代入到式(24)得

$$|R|\leqslant 4\varepsilon M^3T+\varepsilon A\int_0^t(|R^2|+|R|)\mathrm{d}\tau+\varepsilon M_1(\varepsilon_0,T)\leqslant\varepsilon\left[M_2(\varepsilon_0,T)+A\int_0^t(|R^2|+|R|)\mathrm{d}\tau\right]\tag{28}$$

其中 $M_2(\varepsilon_0,T)$ 也是与 $\varepsilon_0$ 和 $T$ 有关的正常数，且

$$M_2(\varepsilon_0,T)=M_1(\varepsilon_0,T)+4M^3T=M_1(\varepsilon_0,T)+32M_0^3(\varepsilon_0)T$$

由文献[7－8]可知，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\ll 1, 0<\varepsilon t\leqslant T$ 时，存在与 $\varepsilon_0$ 和 $T$ 有关的正常数 $M_3(\varepsilon_0,T)$，使得

$$|R|\leqslant\varepsilon M_3(\varepsilon_0,T)$$

根据第 2 节求得的渐近解首项为 $\varepsilon y_0$，故

$$|y-\varepsilon y_0|\leqslant\varepsilon|R|\leqslant\varepsilon^2M_3(\varepsilon_0,T)$$

由此可知第 2 节求得的渐近解首项是一致有效的。

## 4　结束语

本文利用多重尺度法求解了受激 Raman 散射分子振动数学模型中初值问题的渐近解首项，并证明了初值问题的解的存在性和渐近解的一致有效性，但不足之处是只求解了渐近解的首项，且在选取时间尺度时仅选取了两个时间尺度，故求得的近似

解不够精确。若要得到更高的精确度,可计算渐近解的后几项或者选取多重时间尺度,当然计算量也会随之增加。

**参考文献:**


[1] 陈繁, 刘翠玲, 陈兰珍, 等. 基于拉曼光谱技术的蜂王浆品质定量模型研究[J]. 光谱学与光谱分析, 2019, 39(2): 471 -476.
CHEN F, LIU C L, CHEN L Z, et al. Research on quantitative model of royal jelly quality by Raman spectroscopy[J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2019, 39(2): 471 -476. (in Chinese)

[2] 李佳佳, 刘靖丽, 靳如意, 等. 激光拉曼光谱分析中药复方制剂中青蒿素含量的研究[J]. 光谱学与光谱分析, 2019, 39(8): 2403 -2408.
LI J J, LIU J L, JIN R Y, et al. Quantitative measurement of artemisinin content in Chinese traditional compound medicine by Raman spectroscopy[J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2019, 39(8): 2403 -2408. (in Chinese)

[3] KUROUSKI D, VAN DUYNE R P. In situ detection and identification of hair dyes using surface-enhanced Raman spectroscopy (SERS)[J]. Analytical Chemistry, 2015, 87: 2901 -2906.

[4] 何蔚, 孙贤君. 拉曼光谱应用技术研究[J]. 标准科学, 2018(3): 70 -75.
HE W, SUN X J. Discussion on application technology of Raman spectrum[J]. Standard Science, 2018(3): 70 -75. (in Chinese)

[5] LIE G C, YUAN J M. Bistable and chaotic behavior in a damped driven Morse oscillator: a classical approach[J]. The Journal of Chemical Physics, 1986, 84(10): 5486 -5493.

[6] HOLMES M H. Introduction to perturbation methods [M]. 2nd ed. New York: Springer, 1995: 105 -153.

[7] SMITH D R. Singular-perturbation theory [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985.

[8] 卢祥虎, 张艳丹, 江新华. Schnakenberg 方程解的渐近分析[J]. 数学计算: 中英文版, 2014, 3(2): 68 -75.
LU X H, ZHANG Y D, JIANG X H. Asymptotic analysis of the solution of Schnakenberg equation[J]. Mathematical Computation, 2014, 3(2): 68 -75. (in Chinese)


# A mathematical model of Raman scattering with small perturbations


XIAO RuiMei JIANG XinHua* LI MingYuan

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)



**Abstract**: In this paper, we study a mathematical model of Raman scattering with small perturbations. Using an integral equation and the Banach fixed point theorem, the existence and the uniqueness of the solution for the initial value problems is proved. The first term of the asymptotic solution is obtained by using the method of multiple scale. With the use of the integral equation and Gronwall's inequality, the error estimation of the asymptotic solution is shown to be uniformly valid.



**Key words**: Raman scattering; perturbation methods; asymptotic solution; error estimation