

引用格式:王彩宇,常玉,陈晓楠.一类带恐惧效应的三物种食物链模型的分支分析[J].北京化工大学学报(自然科学版),2021,48(5):119-123.

WANG CaiYu, CHANG Yu, CHEN XiaoNan. Bifurcation analysis of a model of a three-species food chain with a fear effect [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2021,48(5):119-123.

一类带恐惧效应的三物种食物链模型的分支分析

王彩宇 常玉* 陈晓楠

(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘 要:主要研究了恐惧效应对三物种食物链模型中分支动态的影响,运用中心流形定理和局部分支理论分析了 Hopf 分支、transcritical 分支和 saddle-node 分支的存在性,并给出相应的数值模拟结果。研究结果表明,分支是种群发生失稳和周期性振荡的根本原因,从而揭示了恐惧效应是维持种群稳定的重要因素。

关键词:中心流形; Hopf 分支; transcritical 分支; saddle-node 分支; 恐惧效应

中图分类号: O193 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2021.05.015

引 言

近年来,关于考虑恐惧效应对生态系统种群的影响的研究成为新的热点。恐惧效应是猎物持续心理压力的表现,已有研究表明,它可以减少猎物的觅食时间、转移其觅食区域,使猎物的生长率、繁殖率降低,从而间接影响猎物的种群数量^[1-4]。恐惧效应通常可用满足一定条件的函数 $f(k, y)$ 表示,这里 k 为恐惧系数, y 为捕食者种群密度。2016 年, Wang 等^[5]首次建立了二维带恐惧效应的捕食者-被捕食者模型,研究表明恐惧效应可影响周期轨的稳定性。随后, Panday 等^[6]建立了第一个三维带恐惧效应的三物种食物链模型,从理论上分析了解的边界性、持久性及平衡点的存在性,并通过数值模拟发现,随着恐惧系数 $k_i (i=1, 2)$ 的增大,三物种种群密度可由混沌变为稳定的周期性振荡直至达到定态平衡。

本文以文献[6]中带恐惧效应的三物种食物链模型为研究对象,运用中心流形定理和分支理论讨论了模型中的局部分支问题,从理论上严格证明了 supercritical Hopf 分支、subcritical Hopf 分支、tran-

scritical 分支和 saddle-node 分支的存在性。研究结果表明分支是引起种群失稳、产生周期性振荡的根本原因,从而揭示了恐惧效应是维持种群稳定的重要因素,进一步丰富和完善了恐惧效应对三物种食物链模型中种群动态影响的研究。

1 理论分析

1.1 带恐惧效应的三物种食物链模型

考虑如下模型^[6]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+k_1y}(1-x) - \frac{a_1xy}{1+b_1x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a_1xy}{1+b_1x} \frac{1}{1+k_2z} - \frac{a_2yz}{1+b_2y} - d_1y \\ \frac{dz}{dt} = \frac{a_2yz}{1+b_2y} - d_2z \end{cases} \quad (1)$$

式中, x, y, z 分别表示被捕食者、中间捕食者和上层捕食者的种群密度; $\frac{1}{1+k_1y}, \frac{1}{1+k_2z}$ 为恐惧效应函数, 其中 k_1 表示被捕食者对中间捕食者的恐惧系数, k_2 表示中间捕食者对上层捕食者的恐惧系数, 取值为 0.01; 其余参数的含义与取值详见文献[6]。

1.2 平衡点的存在性与稳定性

本文选取 k_1 为分支参数, 结合模型的实际意义, 取 $k_1 \in (0, 10)$, x, y, z 为非负数, 则系统(1)满足实际意义的平衡点如下:

$$O_1(0, 0, 0), O_2(1, 0, 0)$$

收稿日期: 2020-12-03

基金项目: 国家自然科学基金(11771033)

第一作者: 女, 1995 年生, 硕士生

* 通信联系人

E-mail: changyu@mail.buct.edu.cn

$$\begin{aligned}
& O_3 \left(0.105\,263, \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{1}{4} + 0.235\,457k_1} - \frac{1}{2k_1}, 0 \right) \\
& O_4 \left(\frac{2+\beta}{6}, 0.125, \sqrt{\frac{6\,250(2+\beta)}{3(4+\beta)}} + 2\,256.25 - \right. \\
& \left. 52.5 \right) \\
& O_5 \left(\frac{2-\beta}{6}, 0.125, \sqrt{\frac{6\,250(2-\beta)}{3(4-\beta)}} + 2\,256.25 - \right. \\
& \left. 52.5 \right)
\end{aligned}$$

其中 $\beta = \sqrt{8.5 - 0.9375k_1}$ 。运用动力系统的定性和稳定性理论进行分析可得如下结论。

结论 1

1) 当 $k_1 \in (0, 1.623\,42) \cup (7.756\,05, 9.066\,666)$ 时, 系统存在 5 个平衡点, 包含 4 个 saddles 和 1 个 source;

2) 当 $k_1 \in (1.623\,42, 4.8) \cup (4.8, 4.818\,66) \cup (5.863\,32, 7.069\,25) \cup (7.069\,25, 7.756\,05)$ 时, 系统存在 5 个平衡点, 包含 3 个 saddles、1 个 source 和 1 个 sink;

3) 当 $k_1 \in (4.818\,66, 5.863\,32)$ 时, 系统存在 5 个平衡点, 包含 2 个 saddles、1 个 source 和 2 个 sinks;

4) 当 $k_1 \in (9.066\,666, 10)$ 时, 系统存在 3 个平衡点, 均为 saddles;

5) 当 $k_1 = 1.623\,42, 4.8, 4.818\,66, 5.863\,32, 7.069\,25, 7.756\,05, 9.066\,666$ 时, 系统只存在 1 个非双曲平衡点, 其余为双曲平衡点。

1.3 平衡点的局部分支

1.3.1 Hopf 分支

由结论 1 中的 5) 可知, 当 $k_1 = 1.623\,42$ 时, 系统(1)有一个非双曲平衡点 $O_4(0.773\,6, 0.125, 8.428\,026)$, 其特征值为 $\{-0.376\,717, \pm 0.090\,73i\}$ 。令 $x_1 = x - 0.773\,6, y_1 = y - 0.125, z_1 = z - 8.428\,026, \rho = k_1 - 1.623\,42$, 代入系统(1)中, 再将坐标变换后得到的系统的右端函数在 $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ 处泰勒展开

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{D}f(\mathbf{X})\mathbf{Y} + \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \quad (2)$$

式中, $\mathbf{X} = (0.773\,6, 0.125, 8.428\,026)$, $\mathbf{Y} = (x_1, y_1, z_1)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = (f_1, f_2, f_3)^T$ 。将系统(2)变换成可使用中心流形定理的标准形式, 构造可逆变换矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -0.985\,362 & -0.392\,471 & -0.069\,607 \\ 0.097\,611 & 0.152\,13 & 0 \\ -0.139\,762 & 0 & 0.904\,422 \end{pmatrix}$$

令

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{U} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{U} = (x_2, y_2, z_2)^T$ 。将式(3)代入式(2)中, 可得

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}f(\mathbf{X})\mathbf{T}\mathbf{U} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{U}) \quad (4)$$

式中, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}f(\mathbf{X})\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = -0.376\,717$, $\mathbf{B} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.090\,73 \\ 0.090\,73 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{U}) = (g_1, g_2, g_3)^T, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0.020\,327\rho - 0.002\,112\rho^2 + 0.073\,096\rho x_2 + \\
&0.041\,317\rho y_2 + 0.004\,421\rho z_2 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= -0.013\,043\rho + 0.001\,355\rho^2 - 0.046\,901\rho x_2 - \\
&0.026\,51\rho y_2 - 0.002\,836\rho z_2 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= 0.003\,141\rho - 0.000\,326\rho^2 + 0.011\,296\rho x_2 + \\
&0.006\,385\rho y_2 + 0.000\,683\rho z_2 + \cdots
\end{aligned}$$

把参数 ρ 看作新的动态变量

$$\dot{\rho} = 0 \quad (5)$$

新系统(4)、(5)的平衡点 $O(x_2, y_2, z_2, \rho) = (0, 0, 0, 0)$ 存在一个三维局部中心流形, 可以表示为

$$\begin{aligned}
W_{\text{loc}}^3(O) &= \{(x_2, y_2, z_2, \rho) \in R^4 \mid x_2 = h(y_2, z_2, \rho), \\
&h(0, 0, 0) = 0, Dh(0, 0, 0) = 0, |y_2| < \delta_1, |z_2| < \\
&\delta_2, |\rho| < \delta_3, \delta_i (i=1, 2, 3) \text{ 充分小}\}。
\end{aligned}$$

下面计算局部中心流形。局部中心流形满足

$$\begin{aligned}
\Phi(h(y_2, z_2, \rho)) &= (D_{y_2}h(y_2, z_2, \rho), D_{z_2}h(y_2, z_2, \\
&\rho)) \left(\mathbf{B} \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \right) - \mathbf{A}h(y_2, z_2, \rho) - g_1 = 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

将 $h(y_2, z_2, \rho)$ 在 $(y_2, z_2, \rho) = (0, 0, 0)$ 处泰勒展开

$$h(y_2, z_2, \rho) = ay_2^2 + bz_2^2 + c\rho^2 + dy_2z_2 + epy_2 + fpz_2 + O(|\bar{\rho}|^3) \quad (7)$$

其中 $|\bar{\rho}| = \sqrt{y_2^2 + z_2^2 + \rho^2}$ 。将式(7)代入式(6)中, 由同类项系数之和为 0 可得

$$\begin{aligned}
h(y_2, z_2, \rho) &= 0.461\,178y_2^2 + 0.128\,936z_2^2 + \\
&0.009\,442\rho^2 + 0.472\,164y_2z_2 + 0.124\,223\rho y_2 + \\
&0.055\,85\rho z_2 + O(|\bar{\rho}|^3) \quad (8)
\end{aligned}$$

将式(8)代入系统(4)、(5)中, 可得系统(4)、(5)限制在平衡点 O 的局部中心流形上的系统(9)、(10)。

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = -0.09073z_2 - 0.013043\rho + 0.001355\rho^2 - \\ 0.004922z_2^2 - 0.215799y_2^2 - 0.02651y_2\rho - \\ 0.002836z_2\rho - 0.18723y_2z_2 - 0.000584\rho^3 - \\ 0.711073y_2^3 - 0.029558z_2^3 - 0.181638\rho y_2^2 - \\ 0.122233\rho y_2 - 0.018447\rho z_2^2 - 0.014124\rho^2 y_2 - \\ 0.004482\rho^2 z_2 - 0.731845y_2^2 z_2 - \\ 0.280321y_2 z_2^2 + \cdots = p(y_2, z_2, \rho) \\ \dot{z}_2 = 0.09073y_2 + 0.003141\rho + 0.055346y_2^2 - \\ 0.000326\rho^2 + 0.000683z_2\rho + 0.006385y_2\rho + \\ 0.008122y_2 z_2 + 0.089835y_2^3 + 0.00312z_2^3 + \\ 0.01954\rho y_2 z_2 + 0.030257\rho y_2^2 + 0.002719\rho z_2^2 + \\ 0.000788z_2\rho^2 + 0.002376y_2\rho^2 + 0.109875y_2^2 z_2 + \\ 0.038222y_2 z_2^2 + 0.000141\rho^3 + \cdots = q(y_2, z_2, \rho) \end{cases} \quad (9)$$

$$\dot{\rho} = 0 \quad (10)$$

系统(9)、(10)满足如下条件: $p(0,0,0) = 0$,

$$q(0,0,0) = 0, a = \frac{1}{16} [p_{y_2 y_2 y_2} + p_{y_2 z_2 z_2} + q_{y_2 y_2 z_2} + q_{z_2 z_2 z_2}]|_{(0,0,0)} + \frac{1}{16 \times 0.09073} [p_{y_2 z_2} (p_{y_2 y_2} + p_{z_2 z_2}) - q_{y_2 z_2} (q_{y_2 y_2} + q_{z_2 z_2}) - p_{y_2 y_2} q_{y_2 y_2} + p_{z_2 z_2} q_{z_2 z_2}]|_{(0,0,0)} = -0.018515 \neq 0, d = \frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\rho))}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = -0.012914 \neq$$

0。其中 $\operatorname{Re}(\lambda(\rho))$ 为系统(9)中平衡点 O 的特征值的实部。因此系统(9)、(10)的平衡点 O 发生了 Hopf 分支,并在平衡点的小邻域内产生一族周期轨。因为 $d < 0, a < 0$, 故当 $\rho < 0$ ($|\rho|$ 充分小)时,在平衡点的小邻域内产生一族稳定的周期轨。同理还可从理论上严格证明,当 k_1 取其他参数值时,平衡点 O_4 和 O_5 也会发生 Hopf 分支,故可得结论 2。

结论 2

1) 当 $k_1 = 1.62342$ 时,系统(1)的平衡点 O_4 发生 supercritical Hopf 分支。当 $k_1 < 1.62342$ 时,平衡点 O_4 是不稳定的,并且在 O_4 的局部邻域内产生了一族稳定的周期轨。

2) 当 $k_1 = 4.81866$ 时,平衡点 O_5 发生 supercritical Hopf 分支。当 $k_1 < 4.81866$ 时,平衡点 O_5 是不稳定的,并且在 O_5 的小邻域内产生了一族稳定的周期轨。

3) 当 $k_1 = 5.86332$ 时,平衡点 O_5 发生 subcritical Hopf 分支。当 $k_1 < 5.86332$ 时,平衡点 O_5 是稳

定的,并且在 O_5 的小邻域内产生了一族不稳定的周期轨。

4) 当 $k_1 = 7.75605$ 时,平衡点 O_4 发生 subcritical Hopf 分支。当 $k_1 < 7.75605$ 时,平衡点 O_4 是稳定的,并且在 O_4 的小邻域内产生了一族不稳定的周期轨。

1.3.2 transcritical 分支

由结论 1 中的 5), 当 $k_1 = 4.8$ 时,系统(1)有一个非双曲平衡点 $O_5(0, 0.125, -5)$, 其特征值为 $\{0.029282, -0.109282, 0\}$, 可得限制在 $(x_3, y_3, z_3, \varphi) = (0, 0, 0, 0)$ 的二维局部中心流形上的系统(11)为

$$\begin{cases} \dot{z}_3 = -0.048828\varphi z_3 + 0.018998z_3^2 + \cdots = f(z_3, \varphi) \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

因系统(11)满足 $f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z_3}(0,0) = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial z_3^2}(0,0) = 0.037996, \frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial \varphi}(0,0) = -0.048828$, 故当 $k_1 = 4.8$ 时,系统(1)在平衡点 $O_5(0, 0.125, -5)$ 处发生了 transcritical 分支。通过类似的推导可得,当 $k_1 = 7.06925$ 时,系统(1)在平衡点 $(0.105263, 0.125, 0)$ 处也发生了 transcritical 分支。在平衡点 $(0.105263, 0.125, 0)$ 的局部邻域内,当 $k_1 > 7.06925$ 时,系统有两个平衡点,1 个 saddle O_3 和 1 个 source O_5 , 这两个平衡点在 $k_1 = 7.06925$ 处重合为 1 个平衡点 $(0.105263, 0.125, 0)$; 当 $k_1 < 7.06925$ 时,系统(1)有两个平衡点,1 个 source O_3 和 1 个 saddle O_5 。

1.3.3 saddle-node 分支

由结论 1 中的 5), 当 $k_1 = 9.066666$ 时,系统(1)有一个非双曲平衡点 $(0.333375, 0.125, 4.928057)$, 其特征值为 $\{0.039415 \pm 0.438067i, 0\}$, 可得限制在平衡点 $(x_4, y_4, z_4, \mu) = (0, 0, 0, 0)$ 的二维局部中心流形上的系统(12)。

$$\begin{cases} \dot{z}_4 = -0.001468\mu - 0.000163\mu z_4 - 0.000307z_4^2 + \\ 0.000078\mu^2 + \cdots = g(z_4, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

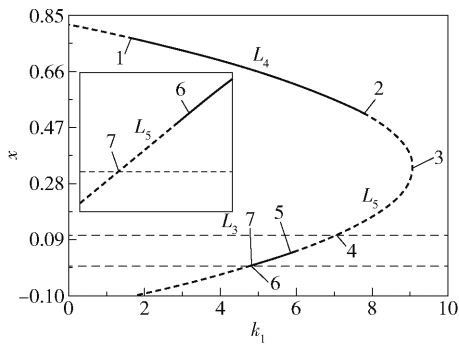
因系统(12)满足 $g(0,0) = 0, \frac{\partial g}{\partial z_4}(0,0) = 0$,

$$\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0) = -0.001468, \frac{\partial^2 g}{\partial z_4^2}(0,0) = -0.000614,$$

所以当 $k_1 = 9.066\ 666$ 时,系统(1)在平衡点 $(0.333\ 375, 0.125, 4.928\ 057)$ 处经历了 saddle-node 分支。在平衡点 $(0.333\ 375, 0.125, 4.928\ 057)$ 的局部邻域内,当 $k_1 > 9.066\ 666$ 时,系统(1)没有平衡点;当 $k_1 = 9.066\ 666$ 时,系统(1)有 1 个平衡点;当 $k_1 < 9.066\ 666$ 时,系统(1)有两个平衡点,即 1 个 saddle O_4 和 1 个 source O_5 。

2 数值模拟

图 1 是被捕食者的种群密度 x 关于 k_1 的分支图。 $L_i(i=3,4,5)$ 表示发生分支的平衡点 $O_i(i=3,4,5)$ 曲线。其中平衡点的分支类型和分支参数值总结于表 1,表中 HB、SNB、TB 分别表示 Hopf 分支、saddle-node 分支和 transcritical 分支,以 HB¹ 为例,上标表示发生分支的序号, $k_1^{(i)}(i=1,2,\cdots,7)$ 表示第 i 个分支的参数值。



实线表示稳定的平衡点,虚线表示不稳定的平衡点。

图 1 分支图

Fig. 1 Bifurcation diagram

表 1 图 1 中平衡点的局部分支

Table 1 The local bifurcation of equilibrium points in Figure 1

分支类型	k_1	分支类型	k_1
HB ¹	1.623 42($k_1^{(1)}$)	HB ⁵	5.863 32($k_1^{(5)}$)
HB ²	7.756 05($k_1^{(2)}$)	HB ⁶	4.818 66($k_1^{(6)}$)
SNB ³	9.066 666($k_1^{(3)}$)	TB ⁷	4.8($k_1^{(7)}$)
TB ⁴	7.069 25($k_1^{(4)}$)		

平衡点 O_4 和 O_5 在 $k_1^{(3)}$ 处发生 SNB³ 且重合。随着恐惧系数 k_1 的减小,当 $k_1^{(2)} < k_1 < k_1^{(3)}$ 时,平衡点 O_4 和 O_5 是不稳定的。不稳定的平衡点 O_4 在 $k_1^{(2)}$ 处发生 HB² 并获得稳定性,又在 $k_1^{(1)}$ 处发生 HB¹ 失去稳定性。在 $k_1 < k_1^{(1)}$ 的小邻域内,三物种种群密度呈稳定的周期振荡。

当 $k_1^{(4)} < k_1 < k_1^{(2)}$ 时,平衡点 O_3 和 O_5 的不稳定

性随着 k_1 的减小而降低, O_3 和 O_5 在 $k_1^{(4)}$ 处重合并发生 TB⁴。当 $k_1 < k_1^{(4)}$ 时,平衡点 O_3 不稳定, O_5 不再具有实际意义。平衡点 O_5 在 $k_1^{(5)}$ 处发生 HB⁵ 获得稳定性,又在 $k_1^{(6)}$ 处发生 HB⁶ 失去稳定性。不稳定的 O_5 在 $k_1^{(7)}$ 处发生 TB⁷。

由结论 2 中的 2)、4) 可知,三物种的种群密度存在双稳定现象,当 $k_1 = 4.818\ 49$ 时,取初始值为 $(0.000\ 724, 0.125\ 125, -4.953\ 48)$,可模拟出系统有一个稳定的平衡点 O_4 和一个稳定的周期轨共存,如图 2 所示。

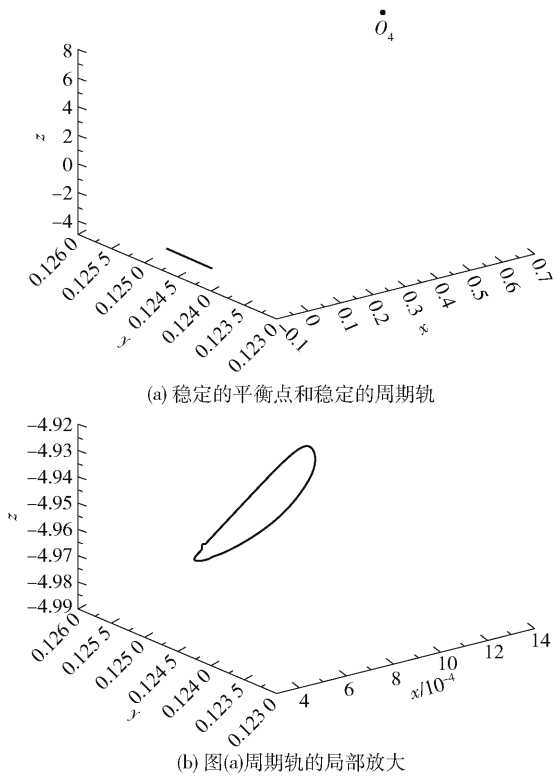


图 2 稳定的平衡点和稳定的周期轨($k_1 = 4.818\ 49$)

Fig. 2 A stable equilibrium point and a stable periodic orbit ($k_1 = 4.818\ 49$)

由图 3 可以看出,当 $k_1 = 9.1$ 时,中间捕食者的种群密度呈周期性振荡。

3 结论

本文研究了恐惧效应对三物种食物链模型种群动态的影响,分析了 supercritical Hopf 分支、subcritical Hopf 分支、transcritical 分支和 saddle-node 分支的存在性。研究结果表明当恐惧系数低于分支值 1.623 42 时,三物种的种群密度呈稳定的周期性振荡;当恐惧系数 k_1 保持在一定水平,即 $k_1 \in (1.623\ 42, 4.818\ 44) \cup (5.863\ 32, 7.756\ 05)$ 时,三物种的种群

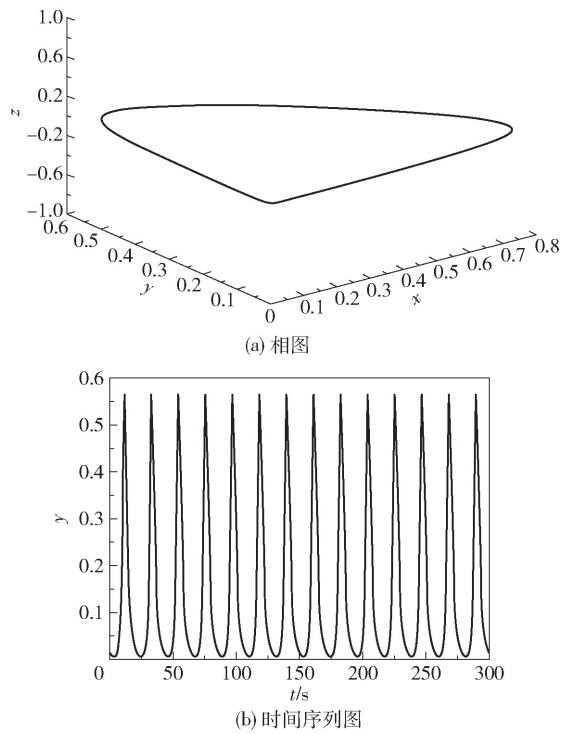


图 3 周期轨的相图和时间序列图($k_1=9.1$)

Fig. 3 The phase and time series diagram of the periodic orbit ($k_1=9.1$)

密度呈单稳态;当 $k_1 \in (4.81844, 4.81866)$ 时,三物种的种群密度出现双稳定现象,系统有一个稳定的平衡点和一个稳定的周期轨共存;当 $k_1 \in (4.81866, 5.86332)$ 时,系统有两个稳定的平衡点共存;当

$k_1 \in (7.75605, 10)$ 时,被捕食者的种群密度失稳,出现周期性振荡现象。因此恐惧效应是稳定三物种动态的重要因素。

参考文献:

[1] ZANETTE L Y, WHITE A F, ALLEN M C, et al. Perceived predation risk reduces the number of offspring songbirds produce per year [J]. Science, 2011, 334 (6061): 1398 – 1401.

[2] ZHANG H S, CAI Y L, FU S M, et al. Impact of the fear effect in a prey-predator model incorporating a prey refuge [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 356: 328 – 337.

[3] SHA A, SAMANTA S, MARTCHEVA M, et al. Backward bifurcation, oscillations and chaos in an eco-epidemiological model with fear effect [J]. Journal of Biological Dynamics, 2019, 13(1): 301 – 327.

[4] RIPPLE W J, ESTES J A, BESCHTA R L, et al. Status and ecological effects of the world’s largest carnivores [J]. Science, 2014, 343(6167): 1241484.

[5] WANG X Y, ZANETTE L, ZOU X F. Modelling the fear effect in predator-prey interactions [J]. Journal of Mathematical Biology, 2016, 73(5): 1179 – 1204.

[6] PANDAY P, PAL N, SAMANTA S, et al. Stability and bifurcation analysis of a three-species food chain model with fear [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(1): 1850009.

Bifurcation analysis of a model of a three-species food chain with a fear effect

WANG CaiYu CHANG Yu* CHEN XiaoNan

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: We have investigated the influence of fear effect on bifurcation dynamics in a three-species food chain model. The existence of Hopf bifurcation, saddle-node bifurcation and transcritical bifurcation were studied using the corresponding center manifolds and local bifurcation theory, and numerical simulation studies demonstrated various types of bifurcation. All these results indicate that bifurcation is the fundamental cause of population instability and periodic oscillations that occur, and that fear effects play an important role in maintaining population stability.

Key words: center manifold; Hopf bifurcation; transcritical bifurcation; saddle-node bifurcation; fear effect

(责任编辑:吴万玲)