引用格式:蔡武晋,边慎,赵雷嘎. 一类非齐次 Schrödinger-Poisson 系统解的存在性[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2021,48(4):119-124.

CAI WuJin, BIAN Shen, ZHAO LeiGa. Existence of solutions for a class of inhomogeneous Schrödinger-Poisson system [J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2021,48(4):119-124.

一类非齐次 Schrödinger-Poisson 系统解的存在性

蔡武晋[1] 边 慎[1] 赵雷嘎[2*]

(1. 北京化工大学 数理学院, 北京 100029; 2. 北京工商大学 数学与统计学院, 北京 100048)

摘 要:研究一类非齐次 Schrödinger-Poisson 系统 $\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\phi(x)u=f(u)+g(x), & x\in R^3 \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in R^3 \end{cases}$。当 $V(x)$ 为径向对称位势,非齐次扰动项 $g(x)$ 的范数足够小时,通过 Ekeland's 变分原理和结合单调性方法的山路定理,证明了该系统解的存在性;当 $V(x)$ 为强制位势且 $f(u)$ 为奇函数时,通过 $(\mathrm{sP.S})_c$ 条件和对称山路引理构造一趋于无穷大的临界值序列,获得系统无穷多解的存在性。

关键词:Schrödinger-Poisson 方程; 位势函数; 变分方法; Ekeland's 变分原理; $(\mathrm{sP.S})_c$ 条件; 山路定理

中图分类号:O176 **DOI**:10.13543/j.bhxbzr.2021.04.015

引 言

本文研究非齐次 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\phi(x)u=f(u)+g(x), & x\in R^3 \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in R^3 \end{cases} \quad (1)$$

式中 $V(x)$ 和 $\phi(x)$ 分别表示有效势和电势。系统(1)首先在文献[1]中被提出,用于描述三维空间中与静电场相互作用的非线性 Schrödinger 方程的驻波,$f(u)$ 用于模拟多个粒子间的相互作用,$g(x)$ 为非齐次扰动。

近年来,在对非线性项和位势条件进行的各种假设下,系统(1)受到广泛研究[2-10]。文献[2]、[4]的研究表明,$f(u)$ 关于 u 的增长阶 p 的范围会对泛函的紧性和解的存在性产生影响。

当位势函数为常数时,Ruiz[4] 研究了带有参数的一类自治 Schrödinger-Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u+u+\lambda\phi u=|u|^{p-2}u, & x\in R^3 \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in R^3 \end{cases}$$

式中,$\lambda>0$,$2<p<6$。进一步,Ambrosetti 等[2] 证明了该系统的多解性。当 $g(x)\equiv 0$,$f(u)=|u|^{p-2}u$,$4\leqslant p<6$ 时,D'Aprile 等[3] 利用山路定理证明了系统(1)存在径向对称的正解。当位势函数不为常数时,目前的研究多局限于非线性项 $f(u)$ 的增长性介于 $4\leqslant p<6$ 的情形[5-9]。2006 年 Salvatore[5] 证明了在 $f(u)=|u|^{p-2}u$,$4\leqslant p<6$ 时系统(1)的多解性,Yang 等[9] 研究了系统(1)对任意的 $g(x)\in L^2(R^3)$ 具有一趋于无穷大的临界值序列。

本文对一般的非线性项 $f(u)$ 以及位势函数 $V(x)$,研究系统(1)解的存在性和多解性。特别地,允许 $f(u)$ 的增长性包含 $3<p<4$ 的情形;并在 $f(u)$ 为奇函数时,研究系统(1)无穷多解的存在性。

1 定理的提出

设势函数 $V(x)\in C(R^3,R)$ 满足:

(V_1) $V(x)=V(|x|)$;

(V_2) $\inf\limits_{x\in R^3} V(x)>0$;

(V_3) $2V(x)+(\nabla V(x),x)\geqslant 0$,几乎处处 $x\in R^3$,

其中$(\cdot,\cdot)$表示 R^3 的内积。

设 $g(x)\in C^1(R^3,R)\cap L^2(R^3,R)$ 为非负函数,满足:

(g_1) $g(x)=g(|x|)\neq 0$;

(g_2) $(\nabla g(x),x)\in L^2(R^3)$。

收稿日期:2020-12-01

基金项目:北京工商大学科研启动费(19008020161)

第一作者:男,1997 年生,硕士生

*通信联系人

E-mail:zhaoleiga@163.com

这里(V_1)和(g_1)为函数满足径向对称的条件。

对非线性项$f(u)\in C(R,R)$,设

(f_1) $f(0)=f'(0)=0$;

(f_2) $\exists C>0$,使得$|f(u)|\leqslant C(|u|+|u|^p)$, $\forall u\in R$,其中$p\in(2,5)$;

(f_3) $\exists\theta>3$,使得$0\leqslant\theta F(u)\leqslant uf(u)$, $\forall u\in R$,其中$F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$。

为了描述结果,给出一些记号。设H和D分别表示$H^1(R^3)$和$D^{1,2}(R^3)=\{u\in L^6(R^3):|\nabla u|\in L^2(R^3)\}$的径向对称函数子空间,范数分别记为$\|u\|=\left[\int(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$, $\|u\|_D=\left(\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$,用$L^p$表示通常的$L^p(R^3)$空间,范数记为$\|\cdot\|_p$。弱收敛记为“$\rightharpoonup$”,强收敛记为“$\rightarrow$”, $\int_{R^3}\mathrm{d}x$记为$\int\mathrm{d}x$; C(或$C_1,C_2,C',\cdots$)表示正常数。

本文的主要结果是如下定理。

定理1 设$(V_1)\sim(V_3)$、$(f_1)\sim(f_3)$和$(g_1)\sim(g_2)$成立,则存在$C_p>0$,当$\|g\|_2<C_p$时,系统(1)在$H\times D$中至少存在一负能量解(u_0,ϕ_{u_0})和一正能量解(u_1,ϕ_{u_1})。

为获得无穷多解的存在性,设$V(x)\in C(R^3,R)$且(V_4) $\inf\limits_{x\in R^3}V(x)>0$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty}V(x)=+\infty$。

进一步对非线性项$f(u)$,设

(f_4) $f(-u)=-f(u)$, $\forall u\in R$;

(f_5) $\exists\theta>4$,使得$0\leqslant\theta F(u)\leqslant uf(u)$, $\forall u\in R$。

此时引入空间$H_V:=\left\{u\in H^1(R^3):\int V(x)u^2<\infty\right\}$。根据文献[11], H_V紧嵌入至$L^p(R^3)$,其中$2\leqslant p<6$。

定理2 设(V_4)、$(f_1)\sim(f_2)$和$(f_4)\sim(f_5)$成立,则对任意的$g(x)\in L^2(R^3)$,系统(1)在$H_V\times D$中存在无穷多解。

本文利用变分法进行证明。由于p的范围会对泛函的几何结构和紧性条件产生影响,当$3<p<4$时, Palais-Smale序列((P. S)序列)有界性难以验证,因此我们采用单调性方法结合Pohozaev恒等式,构造特殊的(P. S)序列,获得解的存在性。在H_V空间中,由于H_V紧嵌入到$L^2(R^3)$[10],可借助特征值问题获得空间分解,从而利用非偶泛函的临界点定理[11]获得无穷多解的存在性。

2 变分框架及预备引理

首先将系统(1)转化为单个方程[4]。对任意的$u\in H^1(R^3)$,可得到方程$-\Delta\phi=u^2$在空间$D^{1,2}(R^3)$中的唯一解ϕ_u,此解可表示为

$$\phi_u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y$$

将ϕ_u带入到系统(1)的第一个方程,得

$$-\Delta u+V(x)u+\phi_u(x)u=f(u)+g(x)$$

于是定义变分泛函为$I:H\to R$

$$I(u)=\frac{1}{2}\int\left[|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int F(u)\mathrm{d}x-\int g(x)u\mathrm{d}x \tag{2}$$

根据文献[1]中的命题4,易证$I\in C^1(E,R)$和$(u,\phi)\in H\times D$是方程(1)的解当且仅当$u\in H$是I的临界点,且$\phi=\phi_u$。引理1收集了ϕ_u的一些性质[4]。

引理1

(Ⅰ)对任意的$u\in H$, $\phi_u(x)\geqslant0$, $x\in R^3$;

(Ⅱ)存在常数$C>0$,使得$\|\phi_u\|_D\leqslant C\|u\|^2$,而且存在常数$\bar{C}>0$,使得$\int|\nabla\phi_u|^2\mathrm{d}x=\int\phi_u u^2\mathrm{d}x\leqslant\bar{C}\|u\|^4$;

(Ⅲ)对$t>0$,有$\phi_{v_t}(x)=t^2\phi_v(tx)$,其中$v_t(x)=t^2v(tx)$;

(Ⅳ)若在H中$u_n\rightharpoonup u$,则在D中$\phi_{u_n}\to\phi_u$。

3 定理1的证明

定理1的证明分为两步:一是通过Ekeland's变分原理证明其负能量解存在;二是通过结合单调性方法的山路定理证明其正能量解存在。

由$(f_1)\sim(f_2)$知,对任意$\varepsilon>0$,存在$C_\varepsilon>C$,使得

$$|f(u)|<\varepsilon|u|+C_\varepsilon|u|^p \tag{3}$$

由(f_3)知,存在$C>0$,使得

$$F(u)\geqslant C|u|^\theta,\theta>3 \tag{4}$$

引理2 设$(f_1)\sim(f_2)$成立,则存在$C_p>0$, $t_0>0$和$\rho_0>0$,使得当$\|g\|_2<C_p$时,对任意满足$\|u\|=t_0$的$u\in H$,有$I(u)\geqslant\rho_0$。

证明 由式(3)可知

$$\int F(u)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2+\frac{C_\varepsilon}{(p+1)}\|u\|_{p+1}^{p+1}\leqslant\frac{1}{4}\cdot$$

$\|u\|^2+\dfrac{C}{(p+1)S^{p+1}}\|u\|^{p+1}$

式中 S 为 H 嵌入到 $L^p(R^3)$ 的最佳 Sobolev 常数,故对任意的 $u\in H$,有

$$I(u)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|^2-\frac{C}{(p+1)S^{p+1}}\|u\|^{p+1}-\|g\|_2\cdot\|u\|_2=\|u\|\left(\frac{1}{4}\|u\|-\frac{C}{(p+1)S^{p+1}}\|u\|^p-\|g\|_2\right)。$$

令 $A(t)=t/4-Ct^p/[(p+1)S^{p+1}],t\geqslant 0$,则 $A(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 存在最大值。

令 $C_p:=\max\limits_{t\geqslant 0}A(t)$,设 $A(t_0)=\max\limits_{t\geqslant 0}A(t)$,则 $t_0=[(p+1)S^{p+1}/(4Cp)]^{1/(p-1)}$。

当 $\|g\|_2<C_p$ 时,有 $\rho_0=t_0(A(t_0)-\|g\|_2)>0$,使得对任意满足 $\|u\|=t_0$ 的 u,$I(u)\geqslant\rho_0$ 成立。证毕。

引理 3　设 (f_3) 和 (g_1) 成立,令 $c_0=\inf\{I(u):u\in B_{t_0}\}$,其中 $B_{t_0}=\{u\in H:\|u\|\leqslant t_0\}$,则 $c_0<0$,且存在 $u_0\in H$,使得 $I(u_0)=c_0$。

证明　由 (g_1),取 $v\in H$,使得 $\int g(x)v\mathrm{d}x>0$。令 $v_t(x)=t^2v(tx)$,由引理 1 得

$$I(v_t)=\frac{t^3}{2}\int|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{t}{2}\int V(x)v^2\mathrm{d}x+\frac{t^3}{4}\int\phi_v v^2\mathrm{d}x-Ct^{2\theta-3}\int v^{2\theta}\mathrm{d}x-t^2\int g(x)v\mathrm{d}x$$

又因为当 $t<1$ 时,$\|t^2v(tx)\|^2=t^3\int|\nabla v|^2\mathrm{d}x+t\int v^2\mathrm{d}x\leqslant t\|v\|^2$,故当 t 充分小时,$v_t\in B_{t_0}$,从而 $c_0<I(v_t)<0$。

由 Ekeland's 变分原理易得序列 $\{u_n\}\subset B_{t_0}$ 满足

(Ⅰ) $I(u_n)\to c_0$;

(Ⅱ) $I'(u_n)\to 0$,在 H^{-1} 中(H^{-1} 为 H 的对偶空间)。

因为 $\{u_n\}\subset B_{t_0}$,显然有界,则 $\{u_n\}$ 是泛函 I 的一列有界(P.S)序列。

由 H 嵌入到 $L^p(2<p<6)$ 的紧性,利用文献[4]中的方法,易知存在 $u_0\in H$ 使得 $u_n\to u_0$。故 $I(u_0)=c_0$ 且 $I'(u_0)=0$。证毕。

易知 $F(u)$ 的增长性在 $(3,6)$ 之间,当 $\theta\in(4,6)$ 时容易证明泛函(P.S)序列的有界性,但在 $\theta\in(3,4)$ 时难以证明(P.S)序列是有界的,所以我们引用如下单调性方法来构造 $\theta\in(3,4)$ 时的泛函的特殊(P.S)序列。

命题 1(L. Jeanjean's 引理[12])　假设 $(H,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间,$J\in R^+$ 是一个区间,$(\Phi_\mu)_{\mu\in J}$ 是定义在空间 H 上的一列 C^1 泛函并且有如下形式

$$\Phi_\mu(u)=A(u)-\mu B(u),\ \forall\mu\in J$$

式中,$B(u)\geqslant 0,\forall u\in H$。当 $\|u\|\to\infty$ 时,$B(u)\to+\infty$ 或者 $A(u)\to+\infty$。如果存在 v_1、$v_2\in H$,使得对任意的 $\mu\in J$,有

$$c(\mu):=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\Phi_\mu(\gamma(t))>\max\{\Phi_\mu(v_1),\Phi_\mu(v_2)\}$$

式中,$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H):\gamma(0)=v_1,\gamma(1)=v_2\}$
则对几乎处处的 $\mu\in J$,存在序列 $\{v_n\}\subset H$ 满足:

(Ⅰ) $\{v_n\}$ 是有界的;

(Ⅱ) $\Phi_\mu(v_n)\to c(\mu)$;

(Ⅲ) 在 H 的对偶空间中 $\Phi'_\mu(v_n)\to 0$。

为应用命题 1 寻找系统(1)的正能量解,构造近似问题

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\phi(x)u=\mu f(u)+g(x), & x\in R^3\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in R^3\end{cases}$$

其中 $\mu\in[1/2,1]$。取 $J=[1/2,1]$,定义 $\Phi_\mu(u):H\to R$,$\Phi_\mu(u)=A(u)-\mu B(u)$,其中 $A(u)=\frac{1}{2}\int[|\nabla u|^2+V(x)u^2]\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int g(x)\cdot u\mathrm{d}x$,$B(u)=\int F(u)\mathrm{d}x$,则 $(\Phi_\mu)_{\mu\in J}$ 是定义在 H 上的一列 C^1-泛函,对任意的 $u\in H$ 有 $B(u)\geqslant 0$,当 $\|u\|\to\infty$ 时,有

$$A(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\|g\|_2\|u\|\to\infty$$

引理 4　设 (g_1) 成立,则

(Ⅰ) 存在 ρ_0、$t_0>0$ 和满足 $\|e\|>t_0$ 的函数 $e\in H$ 使得对任意的 $\|u\|=t_0$,$\Phi_\mu(u)\geqslant\rho_0$ 成立;$\Phi_\mu(e)<0$,其中 $\mu\in[1/2,1]$;

(Ⅱ) 对任意的 $\mu\in[1/2,1]$,有

$$c_\mu:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\Phi_\mu(\gamma(t))>\max\{\Phi_\mu(0),\Phi_\mu(e)\}$$

式中 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H):\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\}$。

证明

(Ⅰ) 显然 $\Phi_\mu(u)\geqslant\Phi_1(u)$ 对 $u\in H$ 和 $\mu\in[1/2,1]$ 恒成立。由引理 2 知,存在与 $\mu\in[1/2,1]$ 无关的常数 $\rho_0>0$ 和 $t_0>0$,使得对任意的 $\|u\|=t_0$,不等式 $\Phi_1(u)\geqslant\rho_0$ 成立。取 $w\in H$,使 $\int g(x)w\mathrm{d}x>0$,令

$w_t(x)=t^2w(tx)$, $t>0$。则对任意的 $\mu\in[1/2,1]$,有

$$\Phi_\mu(w_t)\leqslant\frac{1}{2}\int[|\nabla w_t|^2+V(x)w_t^2]\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\phi_{w_t}\cdot w_t^2\mathrm{d}x-\int g(x)w_t\mathrm{d}x-\mu\int F(w_t)\mathrm{d}x\leqslant\frac{t^3}{2}\int|\nabla w|^2\mathrm{d}x+\frac{t}{2}\int V(x)w^2\mathrm{d}x+\frac{t^3}{4}\int\phi_w w^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}Ct^{2\theta-3}\int|w|^\theta\mathrm{d}x$$

注意到 $\theta>3$,存在与 $\mu\in[1/2,1]$ 无关且充分大的常数 $t_0>0$,使得 $\Phi_\mu(w_{t_0})<0$ 对 $\mu\in[1/2,1]$ 一致成立。所以取 $e=w_{t_0}$,(Ⅰ)得证。

(Ⅱ)由 c_μ 的定义可知,对 $\mu\in[1/2,1]$ 有 $c_\mu\geqslant c_1\geqslant\rho_0>0$,其中 $\rho_0>0$ 由(Ⅰ)给定,既然 $\Phi_\mu(0)=0$ 且 $\Phi_\mu(e)<0$ 对 $\mu\in[1/2,1]$ 一致成立,则(Ⅱ)得证。证毕。

由命题 1 和引理 4 知,存在数列 $\{\mu_k\}\subset[1/2,1]$ 有如下性质:① $\mu_k\xrightarrow{k\to\infty}1$;② Φ_{μ_k} 分别在 c_{μ_k} 水平集上有一列有界(P. S)序列 $\{u_n^k\}$。

再由 H 紧嵌入到 $L^p(2<p<6)$,利用文献[4]中的方法,易得对任意的 $k\in N$,存在 $u_k\in H$ 使得 $u_n^k\xrightarrow{n\to\infty}u_k$,故 u_k 是近似问题在 $\mu=\mu_k$ 时的解,且

$$0<\rho_0\leqslant\Phi_{\mu_k}(u_k)=c_{\mu_k}\leqslant c_{1/2}\tag{5}$$

对任意的 $k\in N$,有

$$\Phi'_{\mu_k}(u_k)=0\tag{6}$$

在定理 1 的假设条件中,仿照文献[13]的方法,可以证明 u_k 满足下列 Pohozaev 恒等式

$$\frac{1}{2}\int\left[|\nabla u_k|^2+\frac{3}{2}V(x)u_k^2\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int(\nabla V(x),x)u_k^2\mathrm{d}x+\frac{5}{4}\int\phi_{u_k}u_k^2\mathrm{d}x=3\mu_k\int F(u_k)\mathrm{d}x+\int[3g(x)+(\nabla g(x),x)]u_k\mathrm{d}x$$

下面证明序列 $\{u_k\}$ 的有界性,有如下引理。

引理 5 在定理 1 的条件下,$\{u_k\}$ 在 H 中有界。

证明 将证明分为两步。

步骤 1 证明 $\{\|u_k\|_2\}$ 有界。

设 $\|u_k\|_2\xrightarrow{k}+\infty$,令 $v_k=u_k(\|u_k\|_2)^{-1}$,$A_k=\int[|\nabla v_k|^2+V(x)v_k^2]\mathrm{d}x$,$B_k=\int[2V(x)+(\nabla V(x),x)]v_k^2\mathrm{d}x$,$C_k=\lambda\|u_k\|_2^2\int\phi_{v_k}v_k^2\mathrm{d}x$,$D_k=(\|u_k\|_2^2)^{-1}\int\mu_kF(u_k)\mathrm{d}x$,$E_k=(\|u_k\|_2^2)^{-1}\int\mu_ku_kf(u_k)\mathrm{d}x$。

等式(5)、(6)和 u_k 满足的 Pohozaev 恒等式两边同时乘以 $(\|u_k\|_2^2)^{-1}$,得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}A_k+\frac{1}{2}B_k+\frac{5}{4}Y_k=3D_k+o(1)\\ \frac{1}{2}A_k+\frac{1}{4}C_k=D_k+o(1)\\ A_k+C_k=E_k+o(1)\end{cases}$$

这里 $o(1)$ 表示 $k\to+\infty$ 时的无穷小量。解上述方程组可得

$$B_k=4(3D_k-E_k)+o(1)$$

结合(f_3),由于 $\theta>3$,则当 k 充分大时 $B_k<0$,此时与(V_3)矛盾,所以 $\{\|u_k\|_2\}$ 有界。

步骤 2 证明 $\{\|\nabla u_k\|_2\}$ 有界。

设 $\|\nabla u_k\|_2\xrightarrow{k}+\infty$,令 $w_k=u_k(\|\nabla u_k\|_2)^{-1}$,$a_k=\int V(x)w_k^2\mathrm{d}x$,$b_k=\int[2V(x)+(\nabla V(x),x)]w_k^2\mathrm{d}x$,$c_k=\lambda\|\nabla u_k\|_2^2\int\phi_{w_k}w_k^2\mathrm{d}x$,$d_k=(\|\nabla u_k\|_2^2)^{-1}\int\mu_kF(u_k)\mathrm{d}x$,$e_k=(\|\nabla u_k\|_2^2)^{-1}\cdot\int\mu_ku_kf(u_k)\mathrm{d}x$。

同理在式(5)、(6)和 u_k 满足的 Pohozaev 恒等式两边同时乘以 $(\|\nabla u_k\|_2^2)$,得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k+\frac{5}{4}c_k=3d_k+o(1)\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{4}c_k=d_k+o(1)\\ 1+a_k+c_k=e_k+o(1)\end{cases}$$

解上述方程组可得 $b_k=4(3d_k-e_k)-1+o(1)$。结合(f_3),由于 $\theta>3$,则当 k 充分大时 $b_k<0$,此时与(V_3)矛盾,所以 $\{\|\nabla u_k\|_2\}$ 也有界。证毕。

定理 1 的证明 由引理 3 知,u_0 为系统(1)的负能量解;由引理 5 和 $\mu_k\to1$ 易知,$\{u_k\}$ 是 $I=\Phi_1$ 的有界(P. S)序列,再由 H 紧嵌入到 $L^p(2<p<6)$ 得,系统(1)存在非平凡解 u_1 且 $I(u_1)>0$。证毕。

4 定理 2 的证明

本节中,定义变分泛函为 $I_V:H_V\to R$。

为证明定理 2,给出如下定义。

定义 1($(P.S)_c$ 条件) 设 $I\in C^1(E,R)$,其中 E 是 Hilbert 空间。如果一序列 $\{u_n\}\subset E$ 满足 $I(u_n)\to c$ 且 $I'(u_n)\to0$,则称序列 $\{u_n\}$ 在水平 c 上是一(P. S)序列,记为 $(P.S)_c$ 序列。如果任何 $(P.S)_c$ 序列包含一个收敛子序列,则称 I 满足 $(P.S)_c$

条件。

定义 2（$(sP.S)_c$ 条件[11]）　设 $I \in C^1(E,R)$，E 是一 Hilbert 空间，I 满足 $(P.S)_c$ 条件。若序列 $\{u_n\} \subset E$ 满足：

（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} I(-u_n) = c$；

（Ⅱ）存在实数 λ_n，使得

$\lim\limits_{n\to\infty} \| I'(u_n) - \lambda_n I'(-u_n) \| = 0$。

则称序列 $\{u_n\}$ 在水平 c 上是一对称 $(P.S)_c$ 序列，记为 $(sP.S)_c$ 序列。如果任何 $(sP.S)_c$ 序列在 E 中包含一收敛子序列，则称 I 满足 $(sP.S)_c$ 条件。

命题 2（对称山路引理[11]）　I 是一 C^1 泛函，在 Hilbert 空间 $H_V = X \oplus Y$ 上满足 $(sP.S)_c$ 条件且 $\dim(X) < \infty$，设 $I(0)=0$ 且满足：

（Ⅰ）存在 $\rho > 0$ 和 $\alpha \geqslant 0$ 使得 $\inf I(S_\rho(Y)) \geqslant \alpha$；

（Ⅱ）空间 H_V 中存在递增的有限维子空间序列 $\{E_n\}_n$ 都包含 X，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dim(E_n) = \infty$，且存在 $R_n > \rho$，使得 $\sup I(S_{R_n}(E_n)) \leqslant 0$。

则 I 具有一趋于无穷的临界值序列。

定理 2 的证明将分为下面 3 个引理。

引理 6　设 (V_4) 和 (f_4) 成立，则泛函 I_V 满足 $(sP.S)_c$ 条件。

证明　先证 I_V 对任意的 c 满足 $(P.S)_c$ 条件。设 $\{u_n\}$ 为一 $(P.S)_c$ 序列，结合 (f_5) 则有

$$I_V(u_n) - \frac{1}{\theta} I_V'(u_n) u_n + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \int g(x) u_n \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| u_n \|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right) N(u) + \int \left[F(u_n) - \frac{1}{\theta} u_n f(u_n) \right] \mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| u_n \|^2$$

这里 $\theta > 4$，其中 $N(u) = \int \phi_u u^2 \mathrm{d}x = \iint \frac{u^2(x) u^2(y)}{|x-y|} \cdot \mathrm{d}y\mathrm{d}x$，故 $\| u_n \|$ 有界。由 H_V 嵌入到 $L^p(2 \leqslant p < 6)$ 的紧性，得到 $\{u_n\}$ 具有收敛子列。

现设 $\{u_n\}$ 为一 $(sP.S)_c$ 序列，则由定义2可知 $\int g u_n \mathrm{d}x \to 0$，$I_0(u_n) \to c$，则有

$$\langle I_0'(u_n), v \rangle - \frac{1-\lambda_n}{1+\lambda_n} \int g(x) v \mathrm{d}x \to 0,\ \forall v \in H_V \tag{7}$$

式中 $I_0(u) = \frac{1}{2} \| u \|^2 + \frac{1}{4} N(u) - \int F(u) \mathrm{d}x$。由式(7)可知存在 $c_0 > 0$，使得 $\| I_0'(u_n) \| \leqslant c_0$。因此

$$c + c_0 \| u_n \| \geqslant I_0(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle I_0'(u_n), u_n \rangle \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| u_n \|^2$$

故 $\| u_n \|$ 有界，再由 (f_4)、引理 1 与 Hölder 不等式易知

$N(u_n) \to N(u)$，$\langle N'(u_n), v \rangle \to \langle N'(u), v \rangle$，$\forall v \in H_V$

结合 Nemytski 算子的连续性[14] 易推导出 $\{u_n\}$ 的强收敛性。证毕。

由 H_V 嵌入到 L^2 的紧性，特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x) u = \lambda u \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, x \in R^3 \end{cases}$$

具有一趋于无穷的特征值序列，记为 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$，设 e_k 表示特征值为 λ_k 时对应的特征函数。

引理 7　设 $(f_1) \sim (f_2)$ 成立，则对足够大的 $k_0 \in N$，存在 $\rho_0 > 0$，使得对 $\forall u \in Y := span\{e_k; k \geqslant k_0\}$，当 $\| u \| = \rho_0$ 时，$I_V(u) \geqslant 1$。

证明　令 $A = \| g \|_2$，因为 $N(u) \geqslant 0$，由式(3)再结合 Hölder 不等式，则对 $u \in Y$ 有

$$I_V(u) = \frac{1}{2} \| u \|^2 + \frac{1}{4} N(u) - \int F(u) - \int g(x) \cdot u \geqslant \frac{1}{4} \| u \|^2 - C_\varepsilon \| u \|_2^r \| u \|_6^{\theta - r} - A \| u \| \geqslant \left(\frac{1}{4} - C_0 \lambda_{k_0}^{-\frac{r}{2}} \| u \|^{\theta - 2}\right) \| u \|^2 - A \| u \|$$

式中，$r = 3 - \theta/2 > 0$。

取 $\rho_1 > 0$，使得 $\rho_1^2 - 8(A\rho_1 + 1) = 0$，且 $C_0 \lambda_{k_0}^{-r/2} \cdot \rho_1^{\theta-2} \leqslant 1/8$，则 $I_V(u) \geqslant 1$。证毕。

引理 8　设 (f_5) 成立，令 $X = span\{e_j; j < k_0\}$ 为 Y 的正交补空间，对任意包含 X 的有限维子空间 $E_n \in H_V$，存在 $R_n > \rho$，使得 $sup\ I_V(S_{R_n}(E_n)) \leqslant 0$。

证明　由引理 3 得

$N(u) \leqslant C_1 \| u \|^4$

则对 $u \in E_n$ 和 $R > 0$，由 (f_5)，有

$$I_V(Ru) \leqslant \frac{R^2}{2} \| u \|^2 + \frac{C_1 R^4}{4} \| u \|^4 - CR^\theta \| u \|_\theta^\theta + CR \| u \|$$

由于 $\theta > 4$，再由有限维空间范数的等价性，可得结论。证毕。

定理 2 的证明　由引理 6 ~ 8，可知所有关于命题 2 的条件满足，所以得到 I_V 具有一趋于无穷大的临界值序列，从而系统(1)具有无穷多解。

至此，定理 1 和定理 2 已全部证明。

参考文献:

[1] BENCI V, FORTUNATO D. An eigenvalue problem for Schrödinger－Maxwell equations[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1998, 11(2): 283－293.

[2] AMBROSETTI A, RUIZ D. Multiple bound states for the Schrödinger－Poisson problem[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2008, 10(3): 391－404.

[3] D'APRILE T, MUGNAI D. Non-existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2004, 4(3): 307－322.

[4] RUIZ D. The Schrödinger－Poisson equation under the effect of a nonlinear local term[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 237: 655－674.

[5] SALVATORE A. Multiple solitary waves for a non-homogeneous Schrödinger－Maxwell system in R^3[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2006, 6(2): 157－169.

[6] MERCURI C. Positive solutions of nonlinear Schrödinger－Poisson systems with radial potentials vanishing at infinity [J]. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni, 2008, 19(3): 211－227.

[7] ZHAO L G, LIU H D, ZHAO F K. Existence and concentration of solutions for the Schrödinger－Poisson equations with steep well potential[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 255 (1): 1－23.

[8] YU Y X, ZHAO F K, ZHAO L G. The concentration behavior of ground state solutions for a fractional Schrödinger－Poisson system[J]. Calculus of Variations & Partial Differential Equations, 2017, 56: 116.

[9] YANG M B, LI B R. Solitary waves for non-homogeneous Schrödinger－Maxwell system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(1): 66－70.

[10] BARTSCH T, WANG Z Q. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on RN[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1995, 20(9/10): 1725－1741.

[11] EKELAND I, GHOUSSOUB N. Z_2-equivariant Ljusternik-Schnirelman theory for non-even functionals [J]. Annales de I'lnstitut Henri Poincaré C, Analyse non linéare, 1998, 15(3): 341－370.

[12] JEANJEAN L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on RN[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 1999, 129(4): 787－809.

[13] BERESTYCKI H, LIONS P L. Nonlinear scalar field equations, I. existence of a ground state[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1983, 82(4): 313－345.

[14] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
LU W D. The variational method in differential equations [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)

Existence of solutions for a class of inhomogeneous Schrödinger－Poisson system

CAI WuJin[1] BIAN Shen[1] ZHAO LeiGa[2*]

(1. College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029;
2. School of Mathematics and Statistics, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

Abstract: In this paper, we are concerned with a class of inhomogeneous Schrödinger－Poisson systems $\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi(x)u = f(u) + g(x), & x \in R^3 \\ -\Delta\phi = u^2, & x \in R^3 \end{cases}$. When $V(x)$ is a radially symmetric potential and the norm of the inhomogeneous term $g(x)$ is sufficiently small, we prove the existence of the solutions of the system via Ekeland's variational principle and the mountain pass lemma combined with a monotonicity method. When $V(x)$ is a coercive potential and $f(u)$ is an odd function, by using the $(\mathrm{sP.S})_c$ condition and symmetric mountain pass theorem, we construct a sequence of critical values that tends to infinity, and thus confirm the existence of infinitely many solutions of the equation.

Key words: Schrödinger－Poisson equation; potential function; variational method; Ekeland's variational principle; $(\mathrm{sP.S})_c$ condition; mountain pass lemma

(责任编辑:吴万玲)