引用格式:王杰,许兰喜. 弹性体内一类表面波的求解[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2021,48(2):124 - 128.
WANG Jie, XU LanXi. Solution of a class of surface waves in an elastic body[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2021,48(2):124 - 128.

弹性体内一类表面波的求解

王 杰 许兰喜*

(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘 要: 研究了在平面应变假设条件下,弹性体内一类表面波的求解以及一般解的结构。文献[6]只给出了表面波的一个右行波解,且无求解过程。基于表面波的解可表示为膨胀波和畸变波的叠加,利用分离变量法求出了表面波的一般解,一般解包含无穷多个行波解,这些行波解可能为左行波、右行波或左右行波的叠加。另外,还讨论了表面波一般解的结构以及不同行波解波速之间的关系,发现不同行波的波速大小相同。

关键词: 平面应变假设; 膨胀波; 畸变波; 表面波

中图分类号: O343. 1 **DOI:** 10. 13543/j. bhxbzr. 2021. 02. 016

引 言

表面波又叫作瑞利波,这种波在弹性体表面传播,只侵入弹性体内一小段距离,当离弹性体表面很远时,位移趋于零。表面波的发现对地震科学的发展起到了推动作用,不仅可以解释许多地球物理、声学和工程力学现象,而且还具有实际意义,例如应用于地震、石油、地质的勘探,材料的无损探伤,工程结构的抗震抗爆以及岩土动力学等领域。常见的关于表面波的研究有两种方法:一种是解析法,即求解表面波在相应定解条件下的解,该方法大部分都是从直角坐标系出发,导出经典的波动方程从而进行研究;另一种是数值方法,利用有限元、边界元等手段对一些复杂结构中的表面波问题求近似解。Thomson[1] 最早提出求解固体介质中弹性波的矩阵方法,之后被 Haskell[2] 推广到表面波垂直分量的计算中。近年来,针对表面波的研究主要集中在其传播及性质应用方面。如杨天春等[3] 采用水平层状介质模型,利用传递矩阵方法推导表面波的质点位移表达式,同时对曲线特征进行分析。柴华友等[4] 研究表面源激发的瑞利波的传播特性,比较了激发模态与简正模态相速度的差异。阎守国等[5] 利用数值方法研究了半空间表面波的传播和衰减特性,发现通过该特性可以提高表面波勘探的准确性并扩大其应用范围。本文应用解析法对表面波的解进行分析,得到了表面波的一般解。此外,还研究了表面波一般解的结构以及不同行波解波速之间的关系。

收稿日期: 2020-08-26
第一作者: 女,1995 年生,硕士生
* 通信联系人
E-mail: xulx@ mail. buct. edu. cn

1 数学模型

弹性体内的表面波也是一种弹性波,因此满足弹性力学基本方程组[6]

$$(\lambda + G)\nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{U}) + G\Delta\boldsymbol{U} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2}$$

式中,$\boldsymbol{U} = (u, v, w)$ 为位移矢量,u、v、w 均为 x、y、z 和 t 的函数,ρ 为弹性体的密度,$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ 为剪切弹性模量,$\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ 为拉梅常数,E、ν 分别为弹性模量和泊松比。

1.1 表面波的平面应变假设

对本文所讨论的弹性体,以 $y = 0$ 为弹性体表面,y 轴指向弹性体内,建立如图 1 所示的坐标系。在平面应变假设下,边界的法向量 $\boldsymbol{N} = (0, -1, 0)$,弹性体变形为二维的,即 $\boldsymbol{U} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$。

由表面波的特性可知表面波满足

$$\lim_{y \to +\infty} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

弹性体表面为自由振动,数学表示为

$$y = 0: \begin{cases} u_y + v_x = 0 \\ \lambda e + 2Gv_y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

式中,e 为体积膨胀率。

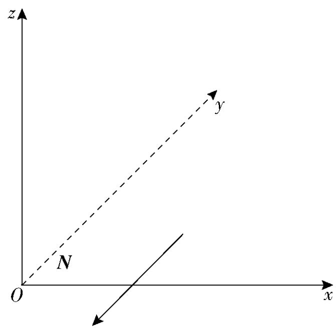

图 1　表面波的求解坐标系

Fig. 1　Solving the coordinate system of a surface wave

自然边界条件为

(ⅰ) $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}(x,y,t)$ 有界　　(3)

(ⅱ) $\forall$ 取定 x、y，$\lim\limits_{t\to\pm\infty}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$　　(4)

1.2　模型的求解方法

根据向量分析引理，将弹性波分解为膨胀波和畸变波的叠加，即 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_2$，分别满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{U}_1}{\partial t^2}=\dfrac{2G+\lambda}{\rho}\Delta_2\boldsymbol{U}_1\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{U}_1=0\end{cases}\tag{5}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{U}_2}{\partial t^2}=\dfrac{G}{\rho}\Delta_2\boldsymbol{U}_2\\ \mathrm{div}\boldsymbol{U}_2=0\end{cases}\tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{U}_1=(u_1,v_1,0)$，$\boldsymbol{U}_2=(u_2,v_2,0)$ 分别表示膨胀波和畸变波的解，$\Delta_2=\partial_x^2+\partial_y^2$ 为二维拉普拉斯算子。

2　模型的求解

2.1　膨胀波的解

运用分离变量法求解方程组(5)。为了运算方便，将 $\dfrac{2G+\lambda}{\rho}$ 记作 a^2，则式(5)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\Delta_2 u_1\\ \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=a^2\Delta_2 v_1\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x}=\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\end{cases}$$

求解 v_1，令 $v_1=X_1(x)Y_1(y)T_1(t)$，代入得 $X_1(x)Y_1(y)T_1''(t)=a^2(X_1''(x)Y_1(y)T_1(t)+X_1(x)Y_1''(y)T_1(t))$，两边同除 $X_1(x)Y_1(y)T_1(t)$，得到

$$\frac{T_1''(t)}{T_1(t)}=a^2\left(\frac{X_1''(x)}{X_1(x)}+\frac{Y_1''(y)}{Y_1(y)}\right)\tag{7}$$

若式(7)成立，需满足 $\dfrac{T_1''(t)}{T_1(t)}$、$\dfrac{X_1''(x)}{X_1(x)}$、$\dfrac{Y_1''(y)}{Y_1(y)}$ 分别是与 t,x,y 无关的常数，可分别设

$$p=\frac{T_1''(t)}{T_1(t)},s=\frac{X_1''(x)}{X_1(x)},r=\frac{Y_1''(y)}{Y_1(y)}$$

先求解本征值问题 $T_1''(t)=pT_1(t)$，步骤如下。

1) $p>0$，通解为 $T_1(t)=a_1\mathrm{e}^{\sqrt{p}t}+a_2\mathrm{e}^{-\sqrt{p}t}$。

当 $a_1\neq0$ 或 $a_2\neq0$ 时，$\lim\limits_{t\to\pm\infty}T_1(t)=\pm\infty$，这与自然边界条件(3)矛盾，故该本征值问题无 $p>0$ 的本征值。

2) $p=0$，通解为 $T_1(t)=a_1+a_2t$。

(ⅰ) 当 $a_2=0$ 时，$T_1(t)=a_1$，由自然边界条件(4)可知 $a_1=0$。

(ⅱ) 当 $a_2\neq0$ 时，$\lim\limits_{t\to\pm\infty}T_1(t)=\pm\infty$，与自然边界条件(3)矛盾，所以 $a_2=0$。

综上，该本征值问题没有 $p=0$ 的本征值。

3) $p<0$，令 $p=-p_1^2$，通解为

$T_1(t)=a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t)$

同理求解本征值问题 $X_1''(x)=sX_1(x)$，令 $s=-s_1^2$，可得 $X_1(x)=d_1\cos(s_1x)+d_2\sin(s_1x)$。

本征值问题 $Y_1''(y)=rY_1(y)$ 的求解步骤如下。

1) $r<0$，通解为

$Y_1(y)=c_1\cos(\sqrt{-r}y)+c_2\sin(\sqrt{-r}y)$

此时不满足条件(1)，所以 $r<0$ 不是该本征问题的本征值。

2) $r=0$，通解为 $Y_1(y)=c_1+c_2y$。

当 $c_1\neq0$ 或 $c_2\neq0$ 时，不满足条件(1)，所以该本征值问题没有 $r=0$ 的本征值。

3) $r>0$，通解为 $Y_1(y)=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}y}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}y}$。

由式(1)得 $c_1=0$，则 $Y_1(y)=c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}y}$，令 $r=r_1^2$，得 $Y_1(y)=c_2\mathrm{e}^{-r_1y}$。

综上，$X_1(x)$、$Y_1(y)$ 和 $T_1(t)$ 分别表示为

$$\begin{cases}X_1(x)=d_1\cos(s_1x)+d_2\sin(s_1x)\\ Y_1(y)=c_2\mathrm{e}^{-r_1y}\\ T_1(t)=a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t)\end{cases}\tag{8}$$

式中 a_1、a_2、c_2、d_1、d_2 均为常数。

将式(8)代入 $v_1=X_1(x)Y_1(y)T_1(t)$，得

$v_1=c_2\mathrm{e}^{-r_1y}(d_1\cos(s_1x)+d_2\sin(s_1x))(a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t))$

由式(5)中第二个式子得 $\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=\dfrac{\partial v_1}{\partial x}$，两边分别对 y 积分

$$u_1=\frac{s_1c_2}{-r_1}\mathrm{e}^{-r_1y}(-d_1\sin(s_1x)+d_2\cos(s_1x))\cdot(a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t))+C_1(x,t)$$

故 u_1, v_1 分别为

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{s_1c_2}{-r_1}\mathrm{e}^{-r_1y}(-d_1\sin(s_1x)+d_2\cos(s_1x))\cdot\\ \qquad(a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t))+C_1(x,t)\\ v_1=c_2\mathrm{e}^{-r_1y}(d_1\cos(s_1x)+d_2\sin(s_1x))\cdot\\ \qquad(a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t))\end{cases}\tag{9}$$

式中 $C_1(x,t)$ 是关于 x,t 的函数。

又由式(7)可得

$$r_1^2=s_1^2-\frac{p_1^2}{a^2}=s_1^2-h^2\tag{10}$$

式中,$h^2\triangleq\dfrac{p_1^2}{V_1^2}=\dfrac{\rho p_1^2}{\lambda+2G}$,$r_1>0$,这里 V_1 为膨胀波波速,且有 $V_1^2=\dfrac{\lambda+2G}{\rho}=\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}$。当式(9)中的参数满足式(10)的条件时,就得到了膨胀波的解。

2.2 畸变波的解

与膨胀波的求解类似,若令 $d^2=\dfrac{G}{\rho}$,可得方程(6)的一般解为

$$\begin{cases}u_2=c_2'\mathrm{e}^{-r_2y}(d_1'\cos(s_2x)+d_2'\sin(s_2x))\cdot\\ \qquad(a_1'\cos(p_2t)+a_2'\sin(p_2t))\\ v_2=-\dfrac{s_2c_2'}{r_2}\mathrm{e}^{-r_2y}(d_1'\sin(s_2x)-d_2'\cos(s_2x))\cdot\\ \qquad(a_1'\cos(p_2t)+a_2'\sin(p_2t))+C_2(x,t)\end{cases}\tag{11}$$

式中 $C_2(x,t)$ 是关于 x、t 的函数,且有

$$r_2^2=s_2^2-\frac{p_2^2}{d^2}=s_2^2-k^2\tag{12}$$

式中 $k^2\triangleq\dfrac{p_2^2}{V_2^2}=\dfrac{\rho p_2^2}{G}$,$r_2>0$,这里 V_2 为畸变波波速,且 $V_2^2=\dfrac{G}{\rho}=\dfrac{E}{2(1+\nu)\rho}$。当式(11)中的参数满足式(12)时,就得到了畸变波的解。

2.3 表面波的解

将式(9)、(11)这两个解叠加得

$$\begin{cases}u=\dfrac{s_1c_2}{-r_1}\mathrm{e}^{-r_1y}\varphi_1+c_2'\mathrm{e}^{-r_2y}\varphi_2+C_1(x,t)\\ v=c_2\mathrm{e}^{-r_1y}\varphi_3-\dfrac{s_2c_2'}{r_2}\mathrm{e}^{-r_2y}\varphi_4+C_2(x,t)\end{cases}\tag{13}$$

式中 φ_1、φ_2、φ_3 和 φ_4 都是关于 x,t 的函数。

$$\begin{cases}\varphi_1=(-d_1\sin(s_1x)+d_2\cos(s_1x))\cdot\\ \qquad(a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t))\\ \varphi_2=(d_1'\cos(s_2x)+d_2'\sin(s_2x))\cdot\\ \qquad(a_1'\cos(p_2t)+a_2'\sin(p_2t))\\ \varphi_3=(d_1\cos(s_1x)+d_2\sin(s_1x))\cdot\\ \qquad(a_1\cos(p_1t)+a_2\sin(p_1t))\\ \varphi_4=(d_1'\sin(s_2x)-d_2'\cos(s_2x))\cdot\\ \qquad(a_1'\cos(p_2t)+a_2'\sin(p_2t))\end{cases}$$

由式(1)得

$$\lim_{y\to+\infty}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}C_1(x,t)\\ C_2(x,t)\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

所以 $C_1(x,t)=0$,$C_2(x,t)=0$。

利用 $C_1=C_2=0$,则式(13)变为

$$\begin{cases}u=\dfrac{s_1c_2}{-r_1}\mathrm{e}^{-r_1y}\varphi_1+c_2'\mathrm{e}^{-r_2y}\varphi_2\\ v=c_2\mathrm{e}^{-r_1y}\varphi_3-\dfrac{s_2c_2'}{r_2}\mathrm{e}^{-r_2y}\varphi_4\end{cases}\tag{14}$$

将式(14)代入式(2)中第一个式子,可得当 $y=0$ 时有

$$2s_1c_2\varphi_1(x,t)+\left(-r_2c_2'-\frac{s_2^2c_2'}{r_2}\right)\varphi_2(x,t)=0\tag{15}$$

下面证明 $s_1=s_2$。由于系数 $c_2,c_2',d_i,d_i',a_i,a_i'$ 具有任意性($i=1,2$),不妨取 $c_2=c_2'=1$,$d_1=-d_2'=0$,$d_2=d_1'=1$,$a_1=a_1'=1$,$a_2=a_2'=0$。

则式(15)变为

$$k_1\cos(s_1x)\cos(p_1t)+k_2\cos(s_2x)\cos(p_2t)=0$$

式中,$k_1=2s_1$,$k_2=-r_2-\dfrac{s_2^2}{r_2}$。令 $t=0$ 可得

$$k_1\cos(s_1x)+k_2\cos(s_2x)=0$$

又 $k_1=2s_1\neq0$,可得 $\cos(s_1x)$、$\cos(s_2x)$ 线性相关,由此有 $s_1=s_2$。同理可得 $p_1=p_2$。

利用 $s_1=s_2$,式(15)变为

$$2s_1c_2\varphi_1(x,t)+\left(-r_2c_2'-\frac{s_1^2c_2'}{r_2}\right)\varphi_2(x,t)=0\tag{16}$$

下面证明对任意的 x,t 都有 $\varphi_1(x,t)=\varphi_2(x,t)$。

由系数的任意性,不妨令

$$c_2=\frac{r_2^2+s_1^2}{2s_1r_2}c_2'$$

代入式(16)得 $(r_2^2+s_1^2)(\varphi_1-\varphi_2)=0$。又 $(r_2^2+$

$s_1^2)>0$，所以有 $\varphi_1=\varphi_2$。

将式(14)代入式(2)中第二个式子，同理得 $\varphi_3=\varphi_4$。

将 $\varphi_1=\varphi_2$，$\varphi_3=\varphi_4$ 和 $s_1=s_2$ 代入式(14)得

$$\begin{cases} u=\left(\dfrac{s_1c_2}{-r_1}\mathrm{e}^{-r_1y}+c_2'\mathrm{e}^{-r_2y}\right)\varphi_1 \\ v=\left(c_2\mathrm{e}^{-r_1y}-\dfrac{s_1c_2'}{r_2}\mathrm{e}^{-r_2y}\right)\varphi_3 \end{cases} \tag{17}$$

将式(17)代入式(2)可得

$$\begin{cases} 2r_2s_1c_2+c_2'(-r_2^2-s_1^2)=0 \\ \lambda(s_1^2c_2-r_1^2c_2)+2G(-r_1^2c_2+r_1s_1c_2')=0 \end{cases} \tag{18}$$

求解式(18)即可得表面波的解。

3　解的性质

3.1　解的波速

虽然表面波的解不唯一，但是其波速并不会随解的不同而发生改变，下面证明这一性质。从一般解式(14)入手，将式(14)代入式(2)，得到式(18)，发现与变量 x、y、t 有关的项全部被消除了，只与常数 r_1、r_2、s_1、c_2、c_2' 有关，因此不妨预测不同解的波速是相同的。

由式(18)得

$$\begin{cases} 2r_2s_1+K(-r_2^2-s_1^2)=0 \\ \lambda(r_1^2-s_1^2)+2G(r_1^2-Kr_1s_1)=0 \end{cases} \tag{19}$$

式中常数 $K=\dfrac{c_2'}{c_2}$。利用式(19)中第二个式子和式(10)、(12)，以及

$$\frac{k^2}{h^2}=\frac{\lambda+2G}{G}=2+\frac{\lambda}{G}$$

可得

$$K=\frac{-k^2+2s_1^2}{2s_1\sqrt{s_1^2-h^2}}$$

将 K 代入式(19)中第一个式子，有

$$4s_1^2\sqrt{s_1^2-k^2}\sqrt{s_1^2-h^2}=(k^2-2s_1^2)^2$$

两边分别平方再同除 s_1^8，得

$$16\left(1-\frac{k^2}{s_1^2}\right)\left(1-\frac{h^2}{s_1^2}\right)=\left(\frac{k^2}{s_1^2}-2\right)^4 \tag{20}$$

又由式(10)、(12)可得膨胀波波速 $V_1^2=\dfrac{p_1^2}{h^2}$，畸变波波速 $V_2^2=\dfrac{p_1^2}{k^2}$，再由式(9)、(11)可得表面波的速度 $V_3^2=\dfrac{p_1^2}{s_1^2}$，记 $\alpha=\dfrac{V_3}{V_2}$，又 $\dfrac{V_2^2}{V_1^2}=\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$，代入式(20)化简得

$$\alpha^6-8\alpha^4+\frac{8(2-\nu)}{1-\nu}\alpha^2-\frac{8}{1-\nu}=0 \tag{21}$$

式(21)的求解参考文献[1]。由式(21)可得 α 的值只与 ν 有关，当 ν 取定时，α 为定值。当 $\nu=0.25$ 时，可得 $\alpha=0.9194$，则波速

$$V_3=\alpha V_2=0.9194\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{22}$$

特别地，当 $\nu=0.5$ 时，可得 $\alpha=0.9553<1$，表面波波速 $V_3=\alpha V_2=0.9553\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}<V_2<V_1$。

由式(22)可知，α 确定后，表面波的波速只与剪切弹性模量 G 和弹性体的密度 ρ 有关。当这两个量固定时，表面波所有行波解的波速是相等的，并且与文献[1]所求右行波解的波速吻合。

同时，还可以得到弹性体内膨胀波、畸变波和表面波的速度大小关系为 $V_3<V_2<V_1$。

3.2　解的结构

由式(16)得到了表面波的一般解，下面我们探索表面波的解的结构。令 $a=\left(\dfrac{s_1c_2}{-r_1}\mathrm{e}^{-r_1y}+c_2'\mathrm{e}^{-r_2y}\right)$，$b=\left(c_2\mathrm{e}^{-r_1y}-\dfrac{s_1c_2'}{r_2}\mathrm{e}^{-r_2y}\right)$，则式(17)变为

$$\begin{cases} u=u_1+u_2=a\varphi_1 \\ v=v_1+v_2=b\varphi_3 \end{cases} \tag{23}$$

对式(23)利用积化和差公式，得

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}(l_1\boldsymbol{h}_1+l_2\boldsymbol{h}_2+l_3\boldsymbol{h}_3+l_4\boldsymbol{h}_4)$$

式中 l_1、l_2、l_3、l_4 和 $\boldsymbol{h}_1$、$\boldsymbol{h}_2$、$\boldsymbol{h}_3$、$\boldsymbol{h}_4$ 分别为

$$l_1=\frac{d_2a_2-d_1a_1}{2},\ l_2=\frac{-d_1a_1-d_2a_2}{2}$$

$$l_3=\frac{d_1a_2+d_2a_1}{2},\ l_4=\frac{-d_1a_2+d_2a_1}{2}$$

$$\boldsymbol{h}_1=\begin{pmatrix} \sin(s_1x+p_1t) \\ -\cos(s_1x+p_1t) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{h}_2=\begin{pmatrix} \sin(s_1x-p_1t) \\ -\cos(s_1x-p_1t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{h}_3=\begin{pmatrix} \cos(s_1x+p_1t) \\ \sin(s_1x+p_1t) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{h}_4=\begin{pmatrix} \cos(s_1x-p_1t) \\ \sin(s_1x-p_1t) \end{pmatrix}$$

易证 $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$，$\boldsymbol{h}_3$，$\boldsymbol{h}_4$ 线性无关。

事实上，由 $k_1\boldsymbol{h}_1+k_2\boldsymbol{h}_2+k_3\boldsymbol{h}_3+k_4\boldsymbol{h}_4=0$，通过取 x，t 分别为 0，联立解得 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$。

综上，可得解的结构为

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\left[a'\begin{pmatrix} -\dfrac{s_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{s_1}{r_2} \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{\xi} \tag{24}$$

式中,$\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \boldsymbol{h}_4\}$,$a' \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{-r_1 y}\}$,$b' \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{-r_2 y}\}$。

由此可知解有 3 种可能,即左行波、右行波或者左右行波的叠加。特别地,当 $l_2 = 1, l_1 = l_3 = l_4 = 0$ 时,得到了文献[1]所给的右行波解。

4 结论

本文基于弹性力学基本方程组和向量分析引理,利用分离变量法,分别得到了满足条件的膨胀波和畸变波的解,通过叠加最终得到表面波的一般解。在对一般解的分析中得到的结论如下。

(1)表面波的解不唯一。它的一般解的结构为

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left[a' \begin{pmatrix} -\dfrac{s_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{s_1}{r_2} \end{pmatrix} \right] \boldsymbol{\xi}$$

其中 $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \boldsymbol{h}_4\}$,$a' \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{-r_1 y}\}$,$b' \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{-r_2 y}\}$。

这些行波解可能为左行波,也可能为右行波,还可能为左右行波的叠加。

(2)当 ν 取定时,表面波不同解的波速只与弹性体密度 ρ 和剪切弹性模量 G 有关。膨胀波、畸变波和表面波的速度大小关系为 $V_3 < V_2 < V_1$。

参考文献:

[1] THOMSON W T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium[J]. Journal of Applied Physics, 1950, 21(2): 89 - 93.

[2] HASKELL N A. The dispersion of surface waves on multilayered media[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1953, 43(1): 17 - 34.

[3] 杨天春, 王齐仁, 廖建平. 瑞利面波单点谱比曲线的理论计算与分析[J]. 应用力学学报, 2015, 32(4): 630 - 635, 707.
YANG T C, WANG Q R, LIAO J P. Study on spectral ratio of horizontal to vertical spectral ratio for Rayleigh waves [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2015, 32(4): 630 - 635, 707. (in Chinese)

[4] 柴华友, 柯文汇, 黄祥国, 等. 表面源激发的瑞利波传播特性分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(2): 325 - 332, 340.
CHAI H Y, KE W H, HUANG X G, et al. Analysis of propagation behavior of Rayleigh waves activated by surface sources[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(2): 325 - 332, 340. (in Chinese)

[5] 阎守国, 谢馥励, 张碧星. 含孔隙介质的分层半空间表面瑞利波的衰减特性[J]. 地球物理学报, 2018, 61(2): 781 - 791.
YAN S G, XIE F L, ZHANG B X. Attenuation of Rayleigh waves in a layered half-space surface with a porous layer[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2018, 61(2): 781 - 791. (in Chinese)

[6] 谷超豪, 李大潜, 沈玮熙. 应用偏微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 54 - 62.
GU C H, LI D Q, SHEN W X. Partial differential equation [M]. Beijing: Higher Education Press, 2014: 54 - 62. (in Chinese)

Solution of a class of surface waves in an elastic body

WANG Jie XU LanXi*

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: Under the assumption of plane strain, the solution and the solution structure of a class of surface waves in an elastic body have been studied in the previous literature. In reference [6], only one right traveling wave solution of a surface wave has been given, without a detailed solution process. Based on the fact that the solution of a surface wave can be expressed as the superposition of an expansion wave and a distorted wave, the general solution of surface wave is obtained by using the method of separating variables. The solution contains an infinite number of traveling wave solutions, which may be left traveling waves, right traveling waves or a superposition of left and right traveling waves with the same wave velocity. In addition, the solution space of surface waves and the velocity relationship between different solutions are discussed.

Key words: plane strain hypothesis; expansion wave; distortion wave; surface wave

(责任编辑:吴万玲)