

引用格式:李紫奕,许兰喜. 共面磁场中两平行平板间层流稳定性吸引域半径的研究[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2021,48(1):111-114.

LI ZiYi, XU LanXi. The radius of the stability ball of laminar flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2021,48(1):111-114.

# 共面磁场中两平行平板间层流稳定性吸引域半径的研究

李紫奕 许兰喜\*

(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

**摘要:**考虑一水平方向无限的夹层,夹层中充满均匀的不可压缩的黏性导电液体,其中与流体相邻的介质是不导电的,并且夹层处于共面磁场中。文献[4]和[5]通过定义不同的广义能量泛函对该问题的层流解的非线性稳定性进行研究,并分别得到了层流解条件稳定的充分条件,本文通过比较这两篇文献中不同广义能量泛函下稳定性吸引域半径的大小来比较不同广义能量泛函的优劣。吸引域半径对比结果表明,共面磁场会导致文献[4]中的吸引域半径减小,但不会影响文献[5]中的吸引域半径。

**关键词:**平面平行剪切流; 能量泛函; 非线性稳定性

**中图分类号:** O361.5 **DOI:** 10.13543/j.bhxbzr.2021.01.015

## 引言

对于磁流体力学的稳定性研究在地球物理学、天文学、工程学等许多领域都有广泛的应用。Rionero<sup>[1]</sup>首先提出非线性磁流体力学中的经典能量法,之后该方法被 Joseph<sup>[2]</sup>、Straughan<sup>[3]</sup>加以应用并推广。

讨论一个无限水平均匀的黏性导电不可压缩的流体层,其中与流体相邻的介质不导电,并且夹层处于共面磁场中,文献[4]通过引入基本变量,利用李雅普诺夫直接法,即通过定义广义能量泛函对该系统层流解的线性和非线性稳定性进行了研究。在此基础上,Xu等<sup>[5]</sup>利用无源场的螺旋分解,通过构造新的广义能量泛函对该问题的非线性稳定性进行研究,并将所得结果与文献[4]中的结果对比,发现其文中的吸引域半径不依赖于共面磁场。这两篇文献均给出了层流解稳定的充分条件,且所证明的稳定性是有条件的,即初始扰动必须在某吸引域内。本

文通过数值计算来比较文献[4]和[5]中的吸引域半径在不同雷诺数下的大小,继而得出不同广义能量泛函的优劣性。

## 1 数学模型

考虑一水平方向无限的、均匀的、不可压缩黏性流体夹层  $R^2 \times (-d, d)$ , 该流体夹层位于一笛卡儿坐标系  $Oxyz$  中,  $z$  轴垂直于夹层且与重力方向相反, 流体夹层置于均匀的共面磁场  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{i} + H_1 \mathbf{j}$  中, 并满足边界条件  $\mathbf{U}(x, y, z, -d) = -V_0 \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{U}(x, y, z, d) = V_0 \mathbf{i}$ , 其中  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{U}$  分别为磁场和速度场,  $V_0, H_0, H_1 \in \mathbb{R}$ 。

设前述共面磁场内的流体夹层系统有层流解, 那么其无量纲化后的扰动方程组为<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \mathbf{U}'(z) \mathbf{i} + \mathbf{U}(z) \mathbf{u}_x = \\ \quad A_m (H_0 \mathbf{h}_z + H_1 \mathbf{h}_y + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h}) - \nabla \lambda + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{h}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} + \mathbf{U}(z) \mathbf{h}_x = \\ \quad H_0 \mathbf{u}_x + H_1 \mathbf{u}_y + h \mathbf{U}'(z) \mathbf{i} + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{h} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2020-04-12

第一作者: 女, 1995年生, 硕士生

\* 通信联系人

E-mail: xulx@mail.buct.edu.cn

此时求解区域为  $R^2 \times (-1, 1) \times (0, +\infty)$ , 这里  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ ,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $\lambda = \frac{p}{\rho_0} + \frac{A_m |\mathbf{H} + \mathbf{h}|^2}{2}$ ,  $p$  为控制扰动的第三分量,  $\rho_0 \in \mathbb{R}$ , 雷诺数  $Re = \frac{V_0 d}{\nu}$ , 磁雷诺数  $Rm = \frac{V_0 d}{\eta}$ ,  $A_m = \frac{Q^2}{Re Rm}$ , 钱德拉塞卡数  $Q^2 = \frac{\mu H^2 d^2}{\rho_0 \nu \eta}$ , 其中  $\nu$  为运动黏度。同时方程组(1)满足以下初始条件和边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{u}_0(x, y, z) \\ \mathbf{h}(x, y, z, 0) = \mathbf{h}_0(x, y, z) \end{cases}, R^2 \times (-1, 1) \quad (2)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{0}, u_z = 0, v_z = 0, w = 0, z = \pm 1, \forall t > 0 \quad (3)$$

通常情况下, 研究稳定性时会假设扰动是关于  $x, y$  的周期函数,  $\mathcal{P} = \left[-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}\right] \times \left[-\frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\beta}\right]$  表示基本周期, 为排除刚性运动的情况, 还将加入下述条件:

$$\int_{\Omega} u d\Omega = 0, \int_{\Omega} v d\Omega = 0, \Omega = \mathcal{P} \times [-1, 1] \quad (4)$$

## 2 文献[4]中的稳定性结论

由于线性稳定性分析通常只能给出稳定的必要条件, 用线性稳定性理论判别为稳定的系统很有可能在实际中是不稳定的。因此为得到系统稳定的充分条件一般采用李雅普诺夫直接法进行研究, 即定义恰当的广义能量泛函来讨论流动的稳定性。文献[4]基于该思路构造了一个广义能量泛函  $E(t) = E_0(t) + bE_1(t)$ , 其中  $E_0(t) = \frac{1}{2} [\|\varphi\|^2 + \beta \|\Delta w\|^2 + A_m (\|\varphi^{(m)}\|^2 + \beta \|\Delta h\|^2) + \beta_1 \|\nabla \varphi^{(m)}\|^2]$ ,  $E_1(t) = \frac{1}{2} [\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{h}\|^2 + \|\nabla(\nabla \times \mathbf{u})\|^2 + \|\nabla h_{1x}\|^2 + \|\nabla h_{2x}\|^2 + \|\nabla h_{1y}\|^2 + \|\nabla h_{2y}\|^2]$ ,  $\varphi = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{k}$ ,  $\varphi^{(m)} = (\nabla \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{k}$ 。

然后对  $E(t)$  求导, 并结合方程组(1)及其对应的边界条件, 用不等式进行估计化简, 可得以下结论: 假设  $Rm < \frac{\pi^2}{8M}$ , 如果  $E(0) < \mathcal{B}^{-2}$ , 那么层流解是非线性渐进稳定的, 且有  $E(t) \leq E(0) \exp\{-p[1 - \mathcal{A}E^{\frac{1}{2}}(0)]t\}$ 。其中  $M =$

$$\max_{[-1, 1]} |U'(z)|, b = \frac{k_1}{2\sigma^2}, k_1 = \frac{1}{\pi^2} \min \left( \frac{16\beta M^2 Re}{\beta \pi^4}, \right.$$

$$\frac{16\beta M^2 Rm}{\beta \pi^4}, \frac{\pi^2}{8Re}, \frac{\pi^2}{4Rm}, \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{1}{Rm} - \frac{8M}{\pi^2} \right) \Big), \beta \geq \max \left[ \frac{64M^2 Re^2}{\pi^6}, \left( \frac{64M^2 Rm}{\pi^6} + \frac{4M^2}{\pi^4 A_m Re (H_0 + H_1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{Rm} - \frac{8M}{\pi^2}} \right) \right], \beta_1 = \frac{2M}{Re (H_0 + H_1)^2 \pi^2}, p = \frac{2}{\pi^2} \cdot \max \left( \frac{1}{(Re, Rm) \left( \frac{1}{k_1} + 1 \right)} \right),$$

同时不等式中  $\mathcal{A}$  的表达式如下。

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \frac{4C}{\sqrt{k_1}b} [Re + A_m \sqrt{ReRm} + \sqrt{A_m ReRm} + Rm \cdot \\ & \sqrt{A_m}] + 2C \sqrt{\frac{2}{k_1}b} [Re + \sqrt{ReRm}(A_m + 1) + Rm] + 8 \cdot \\ & (C + C_1^2) \left[ \sqrt{\frac{A_m ReRm}{k_1 b}} \left( \frac{1}{\sqrt{A_m}} + 1 \right) + \frac{\sqrt{A_m Rm + Re}}{\sqrt{k_1 b}} \right] + \\ & 2(C + C_1^2) \left( \frac{4 \sqrt{A_m Rm + Re}}{\sqrt{b k_1}} + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2\beta}{k_1}} Re + 4 \cdot \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{2ReRm}{b}} \right) + \frac{2A_m}{\sqrt{k_1}b} \left[ C \sqrt{\frac{2ReRm}{b}} + 4CRm \sqrt{2\beta k_1} + \right. \\ & \left. 2CRm + \sqrt{2}(C + 2C_1^2) \right] + 4Rm \left( \frac{4}{b} C_1^2 \sqrt{\frac{2\beta_1}{k_1}} + C_1^2 A_m \cdot \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{2b}{\beta_1}} + 3C \sqrt{\frac{2A_m}{\beta k_1}} \right) + 8CRm \sqrt{\frac{2}{b}} (1 + 2A_m) + 8C \cdot \\ & \left. \sqrt{ReRm} \left( \frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{\beta k_1 A_m}} \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

## 3 文献[5]中的稳定性结论

文献[5]通过对方程组(1)中的  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{h}$  进行极向环形分解, 令  $\mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \varphi \times \mathbf{k}) + \nabla \psi \times \mathbf{k} + \mathbf{f} = \boldsymbol{\delta} \cdot \varphi + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \psi + \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{h} = \nabla \times (\nabla \varphi^{(m)} \times \mathbf{k}) + \nabla \psi^{(m)} \times \mathbf{k} + \mathbf{f}^{(m)} = \boldsymbol{\delta} \cdot \varphi^{(m)} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \psi^{(m)} + \mathbf{f}^{(m)}$ , 其中  $\boldsymbol{\delta} \cdot = (\partial_{xz}, \partial_{yz}, -\Delta_2)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot = (\partial_y, -\partial_x, 0)$ , 由此消去方程组(1)中的  $\nabla \lambda$  得到一个新的无量纲扰动方程组。

之后应用李雅普诺夫直接法, 定义一个新的能量泛函, 再次研究该系统层流解的非线性稳定性。在此对构造及估计化简过程不作过多赘述, 直接给出文献[5]中的非线性稳定性结论: 假设  $Rm < \frac{\pi^2}{2M}$ , 如果  $\varepsilon(0) < \mathcal{B}^{-2}$ , 则对于所有磁雷诺数而言, 系统中层流解是非线性条件渐进稳定的, 且有  $\varepsilon(t) \leq \varepsilon(0) \exp\{-\Lambda_0 \min\{\pi^2, \alpha^2, \beta^2\} \cdot$

$(1 - \mathcal{B}\varepsilon^{\frac{1}{2}}(0))\}t_0$  其中  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + m\varepsilon_1(t)$ ,  
 $\varepsilon_0(t) = \frac{1}{2}\{\bar{\lambda}[\|\nabla_2\Delta\varphi\|^2 + A_m\|\nabla_2\Delta\varphi^{(m)}\|^2] +$   
 $\|\nabla_2\psi\|^2 + A_m\|\nabla_2\psi^{(m)}\|^2 + \|f\|^2 + \|f^{(m)}\|^2\},$   
 $m = \frac{A_0 A_m^2 \pi^6 \bar{\lambda}}{2M^2[\pi^2 A_m Re(1 + I_{\alpha\beta}) + Rm(1 + \pi^2)]'}$ .  
 $\frac{1}{(A_m Re + Rm)(\pi^4 \bar{\lambda} + \pi^2 + 2)}, I_{\alpha\beta} = \max\left\{\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}, A_0 = \min\left\{\frac{Rm^2}{Rm^2 + Re^2\left(1 - \frac{2MRm}{\pi^2}\right)}, \frac{Re^2\left(1 - \frac{2MRm}{\pi^2}\right)^2}{Rm^2 + Re^2\left(1 - \frac{2MRm}{\pi^2}\right)}, \frac{1}{2}\right\}, \bar{\lambda} = \frac{M^2}{2\pi^6}\left[Re^2 + Rm^2 \cdot \left(1 - \frac{2MRm}{\pi^2}\right)^{-1}\right], \varepsilon_1(t) = \frac{1}{2}\{\|\nabla u\|^2 + A_m \cdot \|\nabla h\|^2\}$ , 同时  $I_{\alpha\beta}$  中  $\alpha, \beta \neq 0$ , 不等式中  $\mathcal{B}$  的表达式如下。

$$\mathcal{B} = \frac{2\sqrt{2}[C_{\alpha\beta}Rm + L_{\alpha\beta}Re + (L_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta})Re^{\frac{1}{2}}Rm^{\frac{1}{2}}]}{m^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\sqrt{2}[(C_{\alpha\beta}Rm + L_{\alpha\beta}Re)^{-\frac{1}{2}} + (L_{\alpha\beta}\bar{\lambda}^{\frac{1}{2}} + C_{\alpha\beta}I_{\alpha\beta}^{\frac{1}{2}})Re^{\frac{1}{2}}Rm^{\frac{1}{2}}]}{m\Lambda_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\sqrt{2}[C_{\alpha\beta}Rm + 2L_{\alpha\beta}Re + (L_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta})Re^{\frac{1}{2}}Rm^{\frac{1}{2}}]}{m\pi\Lambda_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\sqrt{2}(L_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta})Re^{\frac{1}{2}}Rm^{\frac{1}{2}}}{m\pi\Lambda_0^{\frac{1}{2}}A_m^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

#### 4 稳定性吸引域半径比较

根据共面磁场中无限均匀的不可压缩黏性流体夹层在两种不同广义能量泛函下的非线性稳定性结论,可以得到对应的稳定性吸引域半径,即:  $R_{[1]} = \mathcal{B}^{-2}$  和  $R_{[2]} = \mathcal{B}^{-2}$ , 其中  $R_{[1]}$  表示文献[4]中的稳定性吸引域半径,  $R_{[2]}$  表示文献[5]中的稳定性吸引域半径。

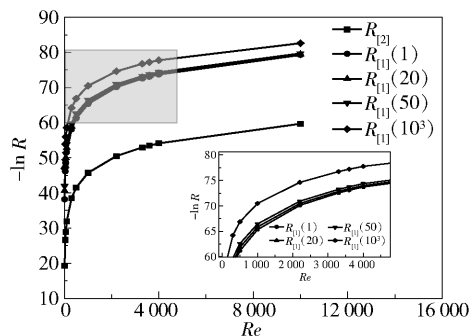
接下来比较不同雷诺数下  $R_{[1]}$  和  $R_{[2]}$  的大小。文献[5]在吸引域半径估计时多次利用嵌入不等式,嵌入不等式常数分别为

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{5}{2}}[h^3(\sqrt{2}-1)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{2^{\frac{5}{2}} \cdot 5(1 + \pi^{-2})^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{5}}}{3} \quad (7)$$

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}I_{\alpha\beta}}{2^{\frac{1}{4}}[\pi h^3(\sqrt{2}-1)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{2^{\frac{5}{2}} \cdot 5(1 + I_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{5}}}{3} \quad (8)$$

再观察  $R_{[2]}$  中的剩余常数  $A_0, m, \bar{\lambda}$ , 均与  $M$  取值有关, 且  $M = \max_{[-1,1]} |f'(z)|$ 。又因  $f'(z)$  为无量纲化后所得, 所以为便于比较和计算, 假设  $M = 2$ 。类似地, 之后涉及嵌入不等式中的常数时, 都只考虑  $h = 1$  和  $\alpha = \beta = \pi$  这种最简单的情况, 而计算  $R_{[1]}$  时, 涉及到的嵌入不等式常数  $C$  和  $C_1$  也与式(7)和式(8)取值一致。

基于上述条件, 在之后数值计算求解  $R_{[1]}$  和  $R_{[2]}$  时, 只改变雷诺数  $Re$  的值, 磁雷诺数  $Rm$  取定值, 即  $Rm = 1$ , 其余常数的赋值情况与前文一致。需注意的是, 当计算  $R_{[1]}$  时,  $H_0 + H_1$  的值也会改变。为便于同  $R_{[2]}$  比较, 这里取 4 组常数进行数值计算, 即  $H_0 + H_1 = 1, 20, 50, 1000$ , 计算结果如图 1 所示。



$R_{[1]}(X)$  中的  $X$  表示  $H_0 + H_1$  的取值。

图 1 不同雷诺数下的稳定性吸引域半径

Fig. 1 Radii of stable attractive regions for different Reynolds numbers

本文中的吸引域半径小于 1, 因此靠近横轴的曲线对应较大的吸引域半径。观察图中的曲线可知, 当雷诺数增大时, 两种不同能量泛函下的吸引域半径均不断变小, 说明此时的系统越发不稳定。当共面磁场  $H$  的取值为 1, 20, 50 和 1000 时, 无论雷诺数如何取值,  $R_{[2]}$  始终大于  $R_{[1]}$ 。

#### 5 结论

对两篇文献中吸引域半径的数值计算结果分析后可得, 对本文取定的参数有  $R_{[2]} > R_{[1]}$  成立。计算表明, 文献[4]中的吸引域半径随共面磁场中参数  $H$  的增大而减小, 这说明对文献[4]中的能量泛函而言, 共面磁场可导致层流解的不稳定, 但该计算

结果是否能真实地反映实际情况还有待实验验证。与此对照,共面磁场中参数  $H$  对于文献[5]中的吸引域半径却无影响,由此可得文献[5]中的能量泛函在某种程度上优于文献[4]中的能量泛函。

同时,分析文献[4]和[5]中的能量泛函还发现,两篇文献中的能量泛函均由两部分组成,其中第二部分的泛函是用来控制非线性项的。第二部分泛函的选取直接影响吸引域半径的大小。比较发现,文献[4]中的第二部分泛函远大于文献[5]中的第二部分泛函,这正是导致文献[4]中吸引域半径较小的原因。因此在定义广义能量泛函时第二部分泛函应尽可能的小。

#### 参考文献:

[1] RIONERO S. Sulla stabilità asintotica in media in mag-

netoidrodinamica [J]. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1967, 76: 75 – 92.

[2] JOSEPH D D. Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1966, 22: 163 – 184.

[3] STRAUGHAN B. The energy method, stability, and nonlinear convection [M]. 2nd ed. New York: Springer, 2004: 201 – 216.

[4] MULONE G, SALEMI F. On the nonlinear stability of laminar flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field [J]. *Ricerche di Matematica*, 1992, 41: 209 – 225.

[5] XU L X, LAN W L. A new approach to the nonlinear stability of viscous flow in a coplanar magnetic field [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, 40 (10): 3415 – 3423.

## The radius of the stability ball of laminar flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field

LI ZiYi XU LanXi \*

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** We consider an incompressible fluid layer with infinite horizontal uniform viscous conductivity, in which the medium adjacent to the fluid is non-conductive and the interlayer is in a coplanar magnetic field. Two previous papers in the literature have studied the nonlinear stability of the laminar solution of this problem by defining different generalized energy functionals, and obtained sufficient conditions for the stability of the laminar solution. In this paper, the advantages and disadvantages of different generalized energy functions are compared by comparing the radius of the stability ball for the two generalized energy functions employed in the previous two papers. It is found that the coplanar magnetic field will reduce the radius of the stability ball in one case, but will not affect the radius of the stability ball in the other case.

**Key words:** plane parallel shear flow; energy functional; nonlinear stability

(责任编辑:吴万玲)